TELE SECUNDARIA

CONCEPTOS
GUÍA DE APRENDIZAJE

MATEMÁTICAS 8

SEP

Revolución educativa
Colombia aprende

Ministerio de
Educación Nacional
República de Colombia

Libertad y Orden

COLOMBIA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL

COORDINACIÓN PEDAGÓGICA Y EDITORIAL

Mary Luz Isaza Ramos

ASESORÍA PEDAGÓGICA Y DIDÁCTICA

Edith Figueredo de Urrego	Ciencias Naturales y Educación Ambiental: (Biología, Física, Química, Educación Ambiental)
Cecilia Casasbuenas Santamaría	Matemáticas

ADAPTACIONES Y/O PRODUCCIONES NACIONALES MATERIAL IMPRESO

Edith Figueredo de Urrego Ana María Cárdenas Navas	Biología y Educación Ambiental
Cecilia Casasbuenas Santamaría Virginia Cifuentes de Buriticá	Matemáticas
Patricia Arbeláez Figueroa	Educación en Tecnología
Eucaris Olaya	Educación Ética y en Valores Humanos
Alejandro Castro Barón	Español
Mariela Salgado Arango Alba Irene Sáchica	Historia Universal
Antonio Rivera Serrano Javier Ramos Reyes	Geografía Universal
Edith Figueredo de Urrego Alexander Aristizábal Fúquene César Herreño Fierro Augusto César Caballero Adiela Garrido de Pinzón	Física, Química y Ambiente
Betty Valencia Montoya Enoc Valentín González Palacio Laureano Gómez Ávila	Educación Física
Edith Figueredo de Urrego Mary Luz Isaza Ramos	Horizontes de Telesecundaria
Mary Luz Isaza Ramos Edith Figueredo de Urrego	Perspectivas del Camino Recorrido

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA - MÉXICO
COORDINACIÓN GENERAL PARA LA MODERNIZACIÓN DE LA EDUCACIÓN
UNIDAD DE TELESECUNDARIA

COORDINACIÓN GENERAL	Guillermo Kelley Salinas Jorge Velasco Ocampo
ASESORES DE TELESECUNDARIA PARA COLOMBIA	Pedro Olvera Durán
COLABORADORES	
ESPAÑOL	María de Jesús Barboza Morán, María Carolina Aguayo Roussell, Ana Alarcón Márquez, María Concepción Leyva Castillo, Rosalía Mendizábal Izquierdo, Pedro Olvera Durán, Isabel Rentería González, Teresita del Niño Jesús Ugalde García, Carlos Valdés Ortíz.
MATEMÁTICAS	Miguel Aquino Zárate, Luis Bedolla Moreno, Martín Enciso Pérez, Arturo Eduardo Echeverría Pérez, Jossefina Fernández Araiza, Esperanza Issa González, Héctor Ignacio Martínez Sánchez, Alma Rosa Pérez Vargas, Mauricio Rosales Avalos, Gabriela Vázquez Tirado, Laurentino Velázquez Durán.
HISTORIA UNIVERSAL	Francisco García Mikel, Ivonne Boyer Gómez, Gisela Leticia Galicia, Víctor Hugo Gutiérrez Cruz, Sixto Adelfo Mendoza Cardoso, Alejandro Rojas Vázquez.
GEOGRAFÍA GENERAL	Rosa María Moreschi Oviedo, Alicia Ledezma Carbajal, Ma. Esther Encizo Pérez, Mary Frances Rodríguez Van Gort, Hugo Vázquez Hernández, Laura Udaeta Collás, Joel Antonio Colunga Castro, Eduardo Domínguez Herrera, Alma Rosa María Gutiérrez Alcalá, Lilia López Vega, Víctor López Solano, Ma. Teresa Aranda Pérez.

BIOLOGÍA	Evangelina Vázquez Herrera, César Minor Juárez, Leticia Estrada Ortuño, José Luis Hernández Sarabia, Lilia Mata Hernández, Griselda Moreno Arcuri, Sara Miriam Godrillo Villatoro, Emigdio Jiménez López, Joel Loera Pérez, Fernando Rodríguez Gallardo, Alicia Rojas Leal.
INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA Y QUÍMICA	Ricardo León Cabrera, Ma. del Rosario Calderón Ramírez, Ma. del Pilar Cuevas Vargas, Maricela Rodríguez Aguilar, Joaquín Arturo Melgarejo García, María Elena Gómez Caravantes, Félix Murillo Dávila, Rebeca Ofelia Pineda Sotelo, César Minor Juárez, José Luis Hernández Sarabia, Ana María Rojas Bribiesca, Virginia Rosas González.
EDUCACIÓN FÍSICA	María Alejandra Navarro Garza, Pedro Cabrera Rico, Rosalinda Hernández Carmona, Fernando Peña Soto, Delfina Serrano García, María del Rocío Zárate Castro, Arturo Antonio Zepeda Simancas.
PERSPECTIVAS DEL CAMINO RECORRIDO	Rafael Menéndez Ramos, Carlos Valdés Ortíz, Carolina Aguayo Roussell, Ma. de Jesús Barbosa Morán, Ana Alarcón Márquez.

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA - MÉXICO
COORDINACIÓN GENERAL PARA LA MODERNIZACIÓN DE LA EDUCACIÓN
UNIDAD DE TELESECUNDARIA

ASESORÍA DE CONTENIDOS

ESPAÑOL	María Esther Valdés Vda. de Zamora
MATEMÁTICAS	Eloísa Beristáin Márquez
INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA Y QUÍMICA	Benjamín Ayluardo López, Luis Fernando Peraza Castro
BIOLOGÍA	Rosario Leticia Cortés Ríos
QUÍMICA	Luis Fernando Peraza Castro
EDUCACIÓN FÍSICA	José Alfredo Rutz Machorro
CORRECCIÓN DE ESTILO Y CUIDADO EDITORIAL	Alejandro Torrecillas González, Marta Eugenia López Ortíz, María de los Angeles Andonegui Cuenca, Lucrecia Rojo Martínez, Javier Díaz Perucho, Esperanza Hernández Huerta, Maricela Torres Martínez, Jorge Issa González
DIBUJO	Jaime R. Sánchez Guzmán, Juan Sebastián Nájera Balcázar, Araceli Comparán Velázquez, José Antonio Fernández Merlos, Maritza Morillas Medina, Faustino Patiño Gutiérrez, Ignacio Ponce Sánchez, Aníbal Angel Zárate, Gerardo Rivera M. y Benjamín Galván Zúñiga.

ACUERDO DE COOPERACIÓN MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE COLOMBIA Y LA SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA DE MÉXICO

Colombia ha desarrollado importantes cambios cualitativos en los últimos años como espacios generadores de aprendizaje en los alumnos. En este marco el Ministerio de Educación de Colombia firmó con la Secretaría de Educación Pública de México un **ACUERDO DE COOPERACIÓN EDUCATIVA,** con el propósito de alcanzar mayores niveles de cooperación en el ámbito educativo.

En el acuerdo, el Gobierno de México a través de la Secretaría de Educación Pública, ofrece al Gobierno de Colombia el Modelo Pedagógico de **TELESECUNDARIA**, como una modalidad educativa escolarizada apoyada en la televisión educativa como una estrategia básica de aprendizaje a través de la Red Satelital Edusat.

El Ministerio de Educación de Colombia ha encontrado en el modelo de **TELESECUNDARIA**, una alternativa para la ampliación de la cobertura de la Educación Básica Secundaria en el área rural y una estrategia eficiente para el aprendizaje de los alumnos y las alumnas.

El programa se inicia en Colombia a través de una **ETAPA PILOTO**, en el marco del **PROYECTO DE EDUCACIÓN RURAL**, por oferta desde el Ministerio de Educación de Colombia en el año 2000, realizando las adaptaciones de los materiales impresos al contexto colombiano, grabando directamente de la Red Satelital Edusat los programas de televisión educativa, seleccionando los más apropiados a las secuencias curriculares de sexto a noveno grado, organizando 41 experiencias educativas en los departamentos de Antioquia, Cauca, Córdoba, Boyacá, Cundinamarca y Valle del Cauca, capacitando docentes del área rural y atendiendo cerca de 1 200 alumnos en sexto grado. El pilotaje continuó en el año 2001 en séptimo grado, 2002 en octavo grado, y en el año 2003 el pilotaje del grado noveno.

En la etapa de expansión del pilotaje se iniciaron por oferta en el presente año 50 nuevas experiencias en el marco del Proyecto de Educación Rural. Otras nuevas experiencias se desarrollaron con el apoyo de los Comités de Cafeteros, el FIP y la iniciativa de Gobiernos Departamentales como el del departamento del Valle del Cauca que inició 120 nuevas Telesecundarias en 23 municipios, mejorando los procesos de ampliación de cobertura con calidad.

El Proyecto de Educación para el Sector Rural del Ministerio de Educación Nacional - PER, inició acciones en los diez departamentos focalizados y en ocho de ellos: Cauca, Boyacá, Huila, Antioquia, Córdoba, Cundinamarca, Bolívar y Norte de Santander se organizaron por demanda 40 nuevas experiencias del programa de Telesecundaria a partir del año 2002.

Al presentar este material hoy a la comunidad educativa colombiana, queremos agradecer de manera muy especial al **Gobierno de México**, a través de la **Secretaría de Educación Pública de México - SEP** y del **Instituto Latinoamericano para la Comunicación Educativa - ILCE**, el apoyo técnico y la generosidad en la transmisión de los avances educativos y tecnológicos al Ministerio de Educación de Colombia.

TABLA DE CONTENIDO

Núcleo Básico 5

Núcleo Básico 6

PRESENTACIÓN

Al iniciar este grado, suponemos que posees un rico acervo cultural adquirido durante los años anteriores; de ahí que tengas capacidad para elegir entre varios caminos, opciones y procedimientos.

El texto está diseñado para ayudarte en el aprendizaje de las matemáticas, pero te corresponde una parte importante: involucrarte en las actividades que se te plantean y discutirlas con tus compañeros. Cuando trabajes de manera individual debes concentrarte y realizarlas con interés. En realidad, para aprender es necesario sólo que desees hacerlo y realices un esfuerzo constante en esa dirección.

El aprendizaje es tu responsabilidad individual; en ello, tú eres irreemplazable, pero mucho ayudan las discusiones con tus compañeros, porque de ellas aprenderás lo que te puede ser útil. Conviene que compartas las diferentes formas de resolver un problema; de este modo se enriquecerán mutuamente con diversos puntos de vista.

Aprender matemáticas no se limita a resolver ejercicios; abandona la idea de que saber hacer operaciones o ejercicios rutinarios significa que ya dominas la materia. El aprendizaje de matemáticas implica el desarrollo de capacidades de análisis y síntesis, es decir, aprender a razonar. Es comunicar tus ideas mediante el lenguaje matemático y hablar acerca de las matemáticas; es hacer conjeturas y proponer formas para verificarlas; es interpretar información y traducir de un sistema de representación a otro; es utilizarlas para encontrar explicaciones e intervenir acertadamente en situaciones de la vida diaria. ¿Te has dado cuenta de la presencia de las matemáticas en las diferentes culturas que han sido tu objeto de estudio en los grados anteriores?

Las matemáticas han sido y seguirán siendo creación de la mente humana y por tanto, constituyen un patrimonio cultural del que todos podemos disfrutar y al cual podemos seguirle aportando nuevos resultados. Entrégate con entusiasmo y dedicación a la continuación de este viaje y tendrás éxitos en tus estudios y habrás desarrollado formas de pensamiento que te serán de gran utilidad en otras asignaturas y en tu vida diaria. Esto es lo más valioso que te puede aportar el estudio de las matemáticas.

Finalmente, deseamos y esperamos que esta obra te sea de gran utilidad.

¡Éxitos!

Núcleo Básico 1

HORIZONTES DE LAS MATEMÁTICAS

Este núcleo te servirá de introducción para el estudio de las matemáticas de octavo grado.

Se pretende dar una visión actual y al futuro acerca de la importancia de las matemáticas en los avances del mundo, sin perder de vista que pueden ser la base de estudios posteriores dentro de tu proyecto de vida.

Algunas sesiones te serán útiles para que obtengas un panorama general de los temas que vas a estudiar, otras para que aprendas a organizar tu tiempo y utilices una metodología en la resolución de problemas, así como para que inicies el nuevo curso con una valoración de tus conocimientos actuales con los cuales puedas continuar tu preparación académica y, junto con el conocimiento de otras asignaturas ampliar tu comprensión de la realidad social y cultural en que vives.

Recuerda que nuestro lema es: Educar para vivir mejor.

1 ¿HASTA DÓNDE SE PUEDE LLEGAR?

Las matemáticas en el desarrollo de otras ciencias. Alcance de los adelantos donde participan las matemáticas

“Lo que hoy ha empezado como novela de ciencia-ficción, mañana será terminado como reportaje”. Esta frase nos señala cómo la ciencia avanza a pasos agigantados y lo que ahora puede parecer “cosa de locura” no tardará mucho en ser creado por el hombre.

Comenta con un compañero(a) el papel que han desempeñado las matemáticas en acontecimientos como:

- la conquista del espacio
- producción de maquinaria especializada y de computación
- adelantos farmacológicos
- determinación de caracteres hereditarios
- experimentos genéticos
- sistematización y explicación de experiencias de la física y de la química
- otros relacionados con tu experiencia y conocimientos y con el desarrollo de tu comunidad.

Expón, ante el grupo, tus comentarios y enriquécelos con los de tus compañeros.

Con tu mismo compañero(a) haz la siguiente lectura:

LAS MATEMÁTICAS EN EL DESARROLLO DE OTRAS CIENCIAS

A lo largo de nuestra vida personal y de la historia hemos tenido la oportunidad de constatar la presencia de las matemáticas en actividades que están en la base de todas las organizaciones sociales. Quién pone en duda su utilidad en el manejo y representación de conceptos como el tiempo, el espacio, el dinero, como ejemplos emblemáticos.

En pocas ocasiones las personas actuamos sobre objetos, mientras que en mayor medida lo hacemos sobre representaciones (simbólicas, gráficas, icónicas…) de tales objetos. Por tanto, la capacidad de interpretación simbólica se hace cada vez más necesaria para comprender y actuar sobre la realidad. Las matemáticas desde sus distintos lenguajes, contribuyen notablemente al desarrollo de esta capacidad.

Las matemáticas se han configurado a lo largo de la historia a impulsos de la necesidad real o intelectual de las personas por resolver problemas que tienen su origen, en muchas ocasiones, en otros ámbitos del conocimiento o de la actividad humana, pero cuya solución ha sido decisiva en el avance social y personal. Uno de los indicadores del uso de las matemáticas son los medios de comunicación: analizándolos podemos ver qué tipo de matemáticas se emplean en ellos —números, gráficas, diagramas o argumentos—, cómo y para qué. Con toda justicia cabe decir que las matemáticas forman parte importante del patrimonio cultural de la humanidad, en estrecha relación con otros conocimientos sociales y científicos que gracias a ellas pueden ser modelados para su estudio y un mayor aprovechamiento.

Comenta con tus compañeros qué otros proyectos en desarrollo y a futuro conoces y si las matemáticas tienen injerencia en ellos.

Atiende al video; en él verás algunas escenas de lo que, hasta hace poco tiempo, eran sueños y ahora es realidad. Asimismo, observa qué cosas están planeadas para un futuro no muy lejano.

Elige cualquiera de los siguientes incisos y comenta tu punto de vista con tus compañeros de grupo.

a) En la explotación de los recursos marítimos, ¿cómo pueden contribuir las matemáticas?

b) En la siembra, ¿cómo puedes servirte de las matemáticas?

c) ¿En qué aspectos de la construcción de casas crees que se apliquen las matemáticas?

d) En una granja, ¿cómo pueden aprovecharse las matemáticas?

En forma individual, responde en tu cuaderno las siguientes preguntas:

a) ¿Qué aplicación tienen las matemáticas en el desarrollo de tu comunidad?
b) ¿En qué actividades de tu vida cotidiana aplicas los conocimientos matemáticos adquiridos?
c) ¿Qué actividad has pensado desarrollar cuando termines 8o. grado y cómo te pueden servir los conocimientos matemáticos adquiridos en la escuela?

Espera las indicaciones de tu maestro para evaluar esta sección.

2 ¿QUÉ HAY DE NUEVO EN OCTAVO GRADO?

Contenido del programa de matemáticas de 8o. grado
Conocimientos de los temas de estudio

¡Qué satisfacción continuar avanzando en la búsqueda y comprensión del conocimiento! Los resultados redundarán en tu crecimiento como ser humano y en grandes beneficios para tu familia y para la comunidad.

Con un compañero(a) haz un recuento de lo visto en 7o. grado.

Para ello, hagan un cuadro de cinco columnas encabezadas con los nombres de los contenidos centrales.

Aritmética	Álgebra	Geometría	Presentación y tratamiento de información	Nociones de probabilidad

En cada columna escriban los temas tratados, como también los que según tu profesor(a) quedaron pendientes.

Desde esa perspectiva lean la propuesta para el grado octavo.

TELESECUNDARIA 8o. GRADO

ARITMÉTICA	ÁLGEBRA	GEOMETRÍA	PRESENTACIÓN Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN	PROBABILIDAD
• Números racionales ✓ Equivalencia, orden ✓ Operaciones +, –, x, ¸ • Potenciación y radicación de fracciones • Potencias de diez • Notación científica • Variación proporcional inversa • El número Pi • Raíz cuadrada (tanteo, interpolación, método babilónico)	• Funciones • Concepto • Notaciones • Funciones lineales • Gráfica de funciones de la forma $f(x) = mx + b$; $f(x) = mx - b$ $f(x) = -mx + b$; $f(x) = -mx - b$ • Pendiente de una recta • Función cuadrática • Gráfica de funciones de la forma $y = x^2 + a$ $y = (x - a)^2$ $y = (x + a)^2$ • Desigualdades • Operaciones entre monomios y polinomios • Algunos productos notables	• Caracterización y descripción de sólidos • Poliedros regulares e irregulares • Cuerpos de revolución • Tetraedro y octaedro • Volumen y capacidad de sólidos • Cubos y paralelepípedos • Congruencia de triángulos • Teorema de Pitágoras	• Población y muestra • Variables y parámetros estadísticos • Tipos de variables • Medidas estadísticas	• Probabilidad de un evento • Noción frecuencial • Fórmula clásica de probabilidad • Probabilidad nula

Con la orientación de tu profesor(a) analiza también el cuadro de contenido de 9o. grado y consideren la posibilidad de traer algunos de los temas propuestos en este último grado para que sean estudiados en 8o. grado. Temas de la aritmética y del álgebra podrán ser objeto de esta adecuación.

Intégrense con otra pareja de compañeros(as) para analizar en grupo los cuadros de contenido y decidir si hay vacíos en algunos conocimientos del grado anterior que ameriten un repaso. Conviene que al momento de hacer el análisis, tengan en cuenta que en la Guía Didáctica están los cuadros de 6o. y 7o. que podrán hacerse en cartulina y colgarse en el salón.

¿Cómo les parece la secuencia de los contenidos relacionados en cada columna?

¿Qué comentarios les suscita cada uno de ellos?

Para mirar el video tengan a mano el cuadro de contenido de 8o. grado y tomen nota de aquellos temas que se mencionan en él y que no figuran en dicho cuadro. Ellos serán objeto de estudio en el grado 9o.

Con base en el cuadro de 8o. grado y en el video, responde individualmente las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles son los temas de 7o. grado que debo repasar?
- ¿Qué temas de los comentados en el video no serán objeto de estudio en 8o. grado?
- De los contenidos propuestos para 8$^{o.}$ grado ¿cuáles me interesan más? ¿Por qué?

En sesión plenaria y bajo la asesoría del maestro(a) se hace una síntesis de los posibles vacíos conceptuales del año anterior y se elabora un plan para superarlos. Igualmente, se comenta el desplazamiento de temas para noveno grado.

Téngase en cuenta que la propuesta de México para secundaria, está conformada por tres grados, mientras que este ciclo en Colombia es de cuatro grados; de ahí que algunos videos evidencien este hecho y en algunos casos aparezcan como terminales de la secundaria.

3 NO HAY PROBLEMA

Resolución de problemas
Búsqueda de estrategias para resolver problemas

¿Te has enfrentado a algún problema que no hayas podido resolver? ¿Te gustaría conocer caminos que lleven a la resolución de problemas?

¡Diviértete resolviendo éstos!

Problema 1: Se dispone de tres recipientes que puedan contener respectivamente 8, 5 y 3 litros.

Si el recipiente de 8 l se llena completamente de agua:

a) ¿Cómo hacer para aislar 2 l de agua?

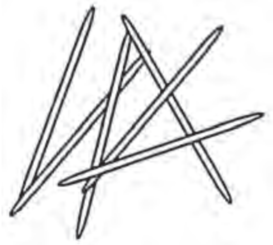
b) ¿Cómo hacer para aislar 1 l de agua?

c) ¿Cómo hacer para aislar 4 l de agua?

Problema 2: Una vaca produce 6 200 litros de leche en un año. Si su rendimiento aumenta en un 12%, ¿cuál será la nueva producción?

¿Qué puedes decir de esta vaca?

Problema 3: Con seis palillos forma cuatro triángulos.



¿Seguiste algún método especial en la resolución de esos problemas?

No lo olvides comparar con los aportes de otros compañeros(as).

Observa en el video cómo las matemáticas han ayudado, desde hace mucho tiempo, a resolver problemas. Comenta en tu grupo cuál fue la idea principal del programa.

Reúnete en equipo y lee el siguiente texto:

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Un aspecto esencial de las matemáticas y sus procedimientos de resolución de problemas es que fomentan en el alumno el razonamiento y la toma de decisiones frente a situaciones circundantes; es decir, le ayudan a ejercitar procesos mentales y hacen que reflexione y busque la manera de vencer los obstáculos que se le presentan, y encontrar caminos más convenientes que le permitan **resolver problemas.**

La resolución de problemas no se limita a la lectura de enunciados y a la búsqueda de respuestas inmediatas. Significa también saber manejar situaciones cotidianas aplicando los conocimientos ya adquiridos y descubriendo nuevas estrategias que indiquen uno o más caminos para tal fin.

Para resolver un problema es conveniente seguir ciertos pasos:

1. Empezar por analizar el planteamiento del problema.

2. Localizar los datos del problema, examinarlos y buscar puntos de contacto con conocimientos anteriores.

3. Buscar un proceso operacional con el que se pueda llegar al resultado.

4. Si es posible, hacer un cálculo mental del resultado.

5. Realizar las operaciones necesarias y encontrar el resultado.

6. Analizar si, a la luz del problema, el resultado es razonable.

Con base en los puntos anteriores, analícese el siguiente problema:

- Un grupo de alumnos se reúne todas las tardes durante una semana para pintar la barda de su escuela. El lunes pintan 6.5 m, el martes 5.75 m, el miércoles 7.85 m, el jueves 6.9 m y el viernes 5 m. ¿Cuántos metros de barda pintaron en total?

1. Se lee el problema y se inicia su análisis estableciendo cuál es la pregunta; en este caso, cuántos metros de barda se pintaron en la semana.

2. Se localizan los datos que da el problema:

Lunes	6.5	m
Martes	5.75	m
Miércoles	7.85	m
Jueves	6.9	m
Viernes	5	m

3. Se busca un proceso operacional; como lo que se quiere encontrar es el total de metros de barda que se pintaron, se realiza una adición. Utilizando sólo las cifras de los enteros se realiza **una estimación del resultado**, en forma mental o escrita:

$$6 + 5 + 7 + 6 + 5 = 29$$

Este dato se toma sólo como una aproximación del resultado.

4. Si se emplea el **cálculo mental** debe anotarse el resultado.

5. Se realizan en forma escrita las operaciones necesarias.

$$6.7 + 5.75 + 7.85 + 6.9 + 5 = 32.20$$

Este resultado se comprueba con la ayuda de la calculadora.

6. Se establece la razonabilidad del resultado, sin olvidar las unidades con las que se está trabajando ni la pregunta formulada.

Resultado: Pintaron 32.2 m de barda en una semana.

El análisis de problemas y su correcta resolución ayudará a tener un pensamiento más ordenado y a seguir un camino más confiable.

¿Cómo te pareció tu forma de proceder, en la resolución de los dos problemas iniciales, frente a lo expuesto en la lectura?

Con un compañero(a), analiza el siguiente problema y contesta las preguntas.

Jorge entró a un almacén donde había tres suéteres. El primero costaba $100 000, el segundo la mitad y el tercero el triple del segundo. ¿Cuál era el costo de los tres suéteres?

1. ¿Cuál es el primer paso para resolverlo?

2. ¿Qué pregunta el problema?

3. ¿Qué datos da el problema?

4. ¿Con cuáles operaciones se puede resolver el problema?

5. ¿Cómo procedes mentalmente para resolverlo?

6. ¿Cuál es una estimación del resultado? (Suma las cifras de mayor orden)

7. ¿Realizando las operaciones en forma escrita, ¿cuál es el resultado?

8. ¿Son razonables? Si no lo fueron, rectifica tus operaciones

Comprueba los resultados en la calculadora.

Lee en voz alta tus respuestas. Si hay errores, corrige.

Individualmente, resuelve el siguiente problema.

¿Cuál es el total de litros de aceite en 3 cajas que contienen 24 envases cada una, con 0.475 *l* en cada envase?

Lee atentamente el problema y analiza.

1. ¿Cuál es la pregunta del problema?

2. ¿Qué datos ofrece el problema?

3. ¿Qué operación lo resuelve?

4. Haz una estimación del resultado.

5. Realiza las operaciones. ¿Cuál es el resultado?

6. ¿El resultado es aproximado a la estimación que hiciste?

7. Comprueba con la calculadora. ¿Fue correcto tu resultado?

8. Anota tu resultado con la unidad señalada.

Compara tus respuestas con la clave. Si hay diferencias, analiza y corrige.

CLAVE

1) Total de litros; 2) 3 cajas con 24 envases, cada envase con 0.475 *l*; 3) Una multiplicación; 4) 30 litros (es valor aproximado, por lo tanto, puede ser sólo parecido); 5) 34.2 *l*; 6) Sí debe serlo; 7) Sí debe serlo; 8) Son 34.2 *l* en total.

4 UN CAMINO SEGURO

Cómo estudiar matemáticas
Estrategias para el estudio y comprensión de las matemáticas

Debes tener presente que no es el tiempo que le dediques sino la calidad del estudio que realices, el que te ayudará a aprovechar mejor tus conocimientos.

Con un compañero(a) analiza y contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Tienes alguna forma especial o método para estudiar matemáticas? ¿Cuál?

2. ¿Es importante seguir un método? ¿Por qué?

3. Discute en grupo tus conclusiones.

Observa el video; te mostrará buenos hábitos de estudio. Comenta con tus compañeros cómo el video enriquece tus hábitos de estudio.

Lee en equipo.

CÓMO ESTUDIAR MATEMÁTICAS

Cuando un estudiante ingresa en una escuela, su objetivo principal es el aprendizaje de nuevos conceptos, el logro de algunas metas, su crecimiento personal y el cambio de ciertos hábitos y habilidades que le conduzcan a progresar en conocimientos; todo ello se adquiere con buenos hábitos de estudio y de autoevaluación, actividades adecuadas y actitudes que faciliten una mayor comprensión de sí mismo y del objeto de estudio y que le permitan avanzar en todo sentido.

Algunas actividades que contribuyen a que tu formación se realice de una manera más ordenada y eficaz son:

1. Escuchar con atención. No sólo oír sino entender y cuestionar aquello que se plantea, estableciendo mentalmente modelos que te ayuden a comprender, valorar y retener lo escuchado.

2. Evaluarse con sinceridad y decidir cambiar o avanzar hacia metas de crecimiento personal y convivencia pacífica.

3. Reconocer en los otros aquellas cualidades, hábitos y costumbres que los llevan al éxito.

Comenta en equipo el ejercicio siguiente:

1. ¿Por qué crees necesario discutir con el grupo sobre un tema específico?

2. En el lugar donde estudias, ¿existen libros que puedas consultar? ¿Son suficientes para los trabajos que realizas? ¿Qué puedes hacer en caso de que no lo sean?

3. ¿Crees que es suficiente la cantidad de ejercicios que realizas en la escuela? ¿Qué puedes hacer para que resulten más completos?

4. ¿Por qué será importante aplicar el conocimiento en la resolución de problemas?

5. ¿Realizas otras actividades mientras estudias?

6. ¿Será necesario que cambies tus hábitos de estudio? ¿Por qué?

Expónle al grupo tus respuestas y concluye.

Individualmente, anota en tu cuaderno lo que entiendas sobre cada una de las siguientes expresiones.

1. Escuchar con atención
2. Crecimiento personal
3. Convivencia pacífica
4. Autoevaluación
5. Realizar ejercicios
6. Resolver problemas
7. Visitar la biblioteca

Comenta con el grupo tus respuestas. Si hay dudas, consulta con tu maestro(a).

5 SER O NO SER

Evaluación diagnóstica

Esta evaluación diagnóstica tiene como finalidad determinar qué conocimientos del grado 7o. asimilaste, debido a que aplicarás muchos de ellos en éste. Asimismo, la evaluación permitirá que, tanto el profesor como tú, detecten los temas que no dominas y aprecies que entre mayor haya sido su comprensión más fácil te resultará avanzar en otros temas.

Observa el video; en éste se te dará información para contestar el cuestionario; si tienes alguna duda, coméntala con tu profesor.

En forma individual, contestarás un cuestionario que te permitirá apreciar tus conocimientos y avances del curso anterior.

EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA

Nombre del estudiante: ____

Número de aciertos: ____________

Trabaja en tu cuaderno. Escribe el número de la pregunta y el literal que escojas como la respuesta correcta.

1. Es el mcm de (8, 12, 15) ( )

a) 60 b) 120 c) 90

2. Es el mcd de (20, 25,15) ( )

a) 5 b) 10 c) 50

3. Resultado que se obtiene de multiplicar (–35) (–13) (2) ( )

a) 910 b) –83 c) –910

4. Es el resultado de (–20) + (30) – (–15) + (–5) ( )

a) –70 b) 20 c) –10

5. Cociente que se obtiene de dividir $\frac{8}{17} \div 2$ ( )

a) $\frac{16}{17}$ b) $\frac{10}{17}$ c) $\frac{8}{34}$

6. Es el resultado de $\left(-\frac{9}{5}\right)(0.8)$ ( )

a) 1.44 b) $\frac{72}{50}$ c) $-\frac{72}{50}$

7. Fracción común impropia equivalente a $2\frac{5}{7}$ ( )

a) $\frac{17}{7}$ b) $\frac{10}{7}$ c) $\frac{19}{7}$

8. Fracción común menor que $-\frac{7}{3}$ ( )

a) $-\frac{5}{4}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $-\frac{5}{2}$

9. Fracción común equivalente a 0.27 ( )

a) $\frac{27}{100}$ b) $\frac{2.7}{10}$ c) $\frac{0.27}{100}$

10. Diferencia que se obtiene en $\frac{9}{7} - \frac{2}{7} - \frac{3}{63}$ ( )

a) $\frac{4}{63}$ b) $\frac{60}{63}$ c) $\frac{104}{63}$

11. Número de kilómetros que hay en $\frac{6}{4}$ de milla, si un kilómetro es aproximadamente $\frac{5}{8}$ de milla. ( )

a) $\frac{16}{15}$ b) $\frac{12}{5}$ c) $\frac{15}{16}$

12. Constante que se tiene en la fórmula P = πd (perímetro del círculo) ( )

a) $2r$ b) π c) d

13. Expresión algebraica equivalente a la mitad de un número menos el triple de otro. ( )

a) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3}$ b) $\frac{x}{2} - 3y$ c) $\frac{x - 3y}{2}$

14. Forma de leer en lenguaje común la expresión $\frac{x\,y}{3}$ ( )

a) El triple del producto de dos números.

b) El producto de dos números divididos entre tres.

c) La tercera parte del producto de dos números.

15. Potencia indicada que se obtiene de multiplicar $(3a^2\,b)^6\,(3a^2\,b)^2$ ( )

a) $(3a^2\,b)^{12}$ b) $(3a^2\,b)^8$ c) $(3a^4\,b^2)^8$

16. Resultado que se obtiene de simplificar la expresión $26xy^2 - 13y^2 - 29xy^2 - 46xy$ ( )

a) $-3xy^2 - 46xy - 13y^2$ b) $-49xy^2 - 13y^2$ c) $-3x^3y^5 - 13y^2$

17. Valor numérico del polinomio $-3a^2b + 2ab^2 + b^2$, cuando $a = -2$ y $b = -1$ ( )

a) 9 b) –15 c) 7

18. Resultado que se obtiene al simplificar la expresión $(5x^2 + 3x + 2) - (8x - 4) - (6x^2 + 10)$ ( )

a) $11x^2 + 11x + 8$ b) $-x^2 - 11x + 16$ c) $-x^2 - 5x - 4$

19. Producto que se obtiene en $(5m^2 - n)\,(3m^2 + 2n)$ ( )

a) $15m^4 + 13m^2n - 2n^2$ b) $15m^4 + 7m^2n - 2n^2$ c) $15m^4 - 13mn^2 - 2n^2$

20. Enunciado de la propiedad fundamental de la igualdad. ( )

a) Si dos igualdades tienen un miembro común, los otros dos son iguales.

b) Si a los dos miembros de una igualdad se les aumenta, disminuye, multiplica o divide entre la misma cantidad, la igualdad subsiste.

c) Se pueden suprimir sumandos o factores iguales en los dos miembros de una igualdad y el resultado es otra igualdad.

21. Valor de la incógnita que hace verdadera la ecuación $32 = 16 - x$ ( )

a) 48 b) –16 c) 16

22. Número que sumado a –17 da como resultado 25. ( )

a) – 8 b) 8 c) 42

23. Medida del frente de un terreno cuya área es de 1 800 m^2 y tiene de fondo 20 m ( )

a) 80 m b) 90 m c) 70 m

24. Ecuación que se obtiene de: "Por cuatro cuadernos y un bicolor se pagaron $ 23 500 y el bicolor costó $2 500". ( )

a) $4x + 2\ 500 = 23\ 500$ b) $4x + y = 23\ 500$ c) $4x + y = 23\ 500 - 2\ 500$

25. Ecuación que se obtiene de: "Si al doble de la edad de María se le adicionan 4, resulta 30". ( )

a) $2x = 30$ b) $\frac{x}{2} + 4$ c) $2x + 4 = 30$

26. Valor numérico de la incógnita en la ecuación $11x - 4 = 8x + 14$ ( )

a) $x = 6$ b) $x = 4$ c) $x = 5$

27. Es una escala natural. ( )

a) 8 : 1 b) 3 : 3 c) 5 : 1

28. Razón de proporcionalidad del área de una figura cuando se reproduce una figura a escala de ampliación. ( )

a) al cubo b) uno a uno c) al cuadrado

29. Tipo de simetría en la cual existe una rotación de 180°. ( )

a) axial b) central c) de reflexión

30. Fórmula para determinar el área de un rombo ( )

a) $A = \frac{Dd}{2}$ b) $A = b \cdot h$ c) $A = \frac{(B + b)\, h}{2}$

31. Forma general de expresar el teorema de Pitágoras ( )

a) $a^2 = c^2 + b^2$ b) $a^2 + b^2 = c^2$ c) $b^2 = c^2 + a^2$

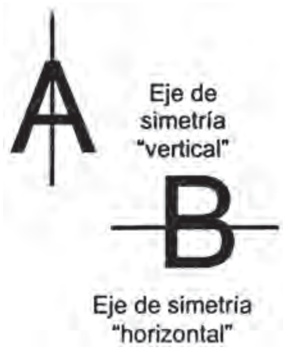
32. Medida de uno de los ángulos interiores de un triángulo si dos de ellos son iguales y sus medidas suman 125°. ( )

a) 55° b) 180° c) 62.5°

33. Es el perímetro de un rodeo de forma circular, si tiene un radio de 7 m ( )

a) 21.98 m b) 43.96 m c) 152.86 m

34. Letras y ejes de simetría.



a) ¿Cuáles son las letras del alfabeto que tienen un eje de simetría vertical?

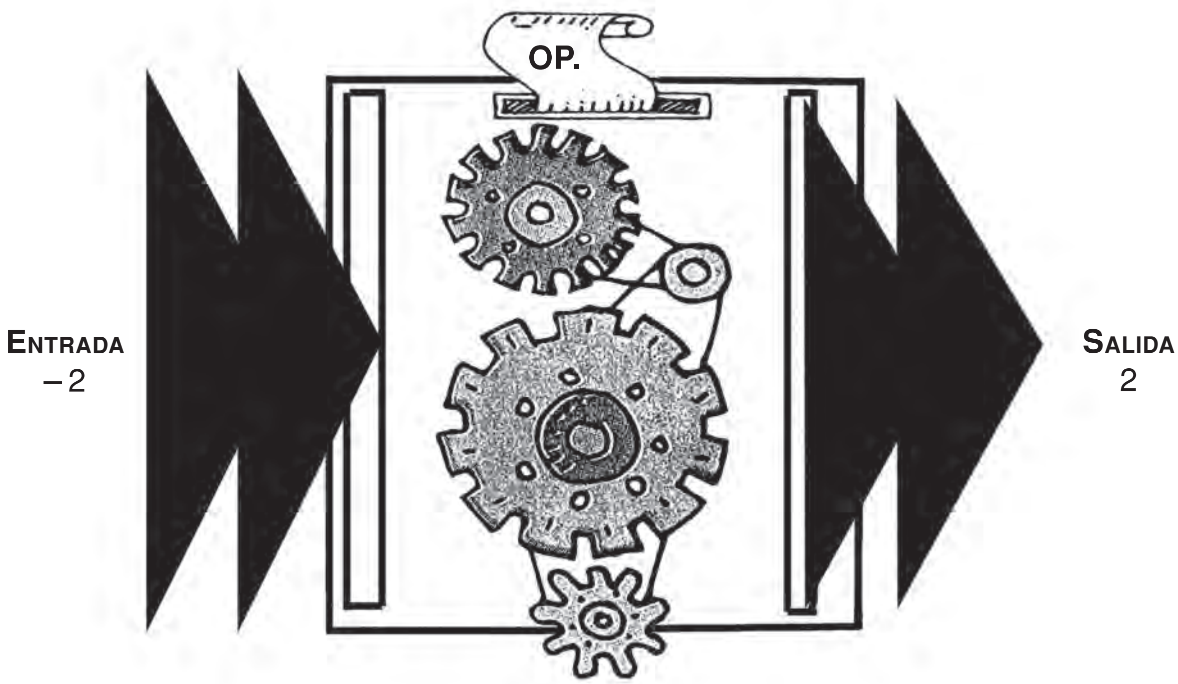
b) ¿Cuáles tienen un eje de simetría horizontal?

c) ¿Cuáles no tienen eje de simetría?

d) ¿Cuáles tienen dos ejes de simetría?

35. Opuesto de un número entero.

Existe una máquina que cambia a todo número entero que entra en ella por su opuesto.



a) Qué números se obtienen a la salida si entran:

– 2; 4; 0; –120

b) Cuáles números entraron si a la salida se obtuvieron:

25; – 38; 0; 1

Una vez que hayas terminado, conserva tu cuaderno; en la siguiente sesión se analizará el examen.

6 PARECE QUE NO FUE

Análisis de resultados
Determinación del nivel de conocimientos del grado séptimo

Una vez que pusiste en práctica los conocimientos adquiridos en cursos anteriores, deberás analizar los aciertos y errores que tuviste en la evaluación diagnóstica; ello te servirá de guía para saber en qué temas tienes deficiencias.

Observa el video y comenta con tus compañeros(as) cuál es la finalidad de una evaluación diagnóstica.

Comenta con tu grupo las siguientes preguntas:

1. ¿Consideras que esta evaluación es necesaria antes de comenzar un nuevo curso? ¿Por qué?

2. La evaluación diagnóstica que realizaste en el grado séptimo, ¿te fue útil? ¿En qué forma?

3. ¿Crees que antes de aplicar una evaluación diagnóstica es necesario que se les avise para que repasen y la aprueben satisfactoriamente? ¿Por qué?

Espera a que el profesor o la profesora indique quién expondrá sus respuestas ante el grupo y luego realiza comentarios al respecto.

Lee en silencio las siguientes instrucciones. Al terminar, realiza lo que se indica en ellas con la ayuda de tu profesor(a).

a) Intercambia tu cuaderno con uno de tus compañeros(as).

b) El profesor o la profesora proporcionará la respuesta correcta; marca con (✔) si la respuesta es correcta y con una (**X**) si es errónea; anota a un lado de los errores la respuesta correcta.

c) Anota en la parte superior el número de aciertos y de errores.

d) Devuelve el cuaderno a tu compañero(a).

e) Anota en tu cuaderno el número de aciertos que obtuviste; considera el número de la pregunta y el tema correspondiente.

Tema	Número de la pregunta	Número de aciertos
Operaciones con números racionales	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 35	
Expresiones algebraicas	12, 13, 14	
Operaciones algebraicas	15, 16, 17, 18, 19	
Ecuaciones de primer grado	20, 21, 22, 23, 24, 25, 26	
Escalas y simetría	27, 28, 29, 34	
Áreas y Teorema de Pitágoras	30, 31	
Ángulos interiores de un triángulo	32	
Perímetro del círculo	33	

Con base en el cuadro anterior, puedes advertir en qué temas tienes deficiencias; de este modo podrás repasarlos, ya que te servirán de base para el grado octavo.

Observa la siguiente escala y, de acuerdo con el número de aciertos que obtuviste, determina la calificación que has obtenido.

Recuerda que ésta no cuenta en ningún momento para calificar un mes o el curso.

ESCALA ESTIMATIVA

35 - 29	MUY BIEN
28 - 22	BIEN
21 - 15	REGULAR
14 - 0	MAL

7 ACEPTO EL RETO

Proyecto personal
Elaboración de un proyecto personal

¿Alguna vez te has preguntado cuáles son las metas y objetivos que se propusieron tus padres con respecto a tu educación y a la de tus hermanos? Y tú mismo, ¿qué has pensado al respecto?

Observa el video, ya que en él se te dará una visión general de lo que es un proyecto personal. Comenta con tus compañeros(as) cuál fue la idea principal del programa.

Haz la siguiente lectura, ya que con ella tendrás una mejor idea de cómo elaborar tu proyecto personal.

PROYECTO PERSONAL

En la mayoría de las actividades humanas siempre se tienen proyectos, tanto de forma directa como indirecta; en éstos siempre se tienen objetivos que cumplir y para alcanzarlos deben seguirse ciertos planes y estrategias. Asimismo para alcanzar los objetivos; se deben ir logrando metas previas en tiempos establecidos; conforme se vayan cubriendo éstas, se estará más cerca de los objetivos finales. Por otra parte, conviene considerar los imprevistos; sin embargo, si los objetivos se cubren entre un 70% y un 80%, se puede considerar que el proyecto es satisfactorio.

Algunos ejemplos de proyectos son: instalar una fábrica; mejorar un sistema de riego; construir una escuela, un hospital o una unidad habitacional; desarrollar una investigación en diferentes ciencias para proporcionar los descubrimientos al servicio de la sociedad, etc.

En lo que respecta al proyecto personal, ya se tiene la experiencia de haber elaborado dos en cursos anteriores; ahora, con base en esa experiencia, si no se consiguieron los objetivos buscados, deben hacerse cambios para mejorar el proyecto; si da resultado en este curso, se puede realizar uno cada vez que inicies un nuevo curso. Se debe establecer qué tiempo debe dedicarse, después de clase, a las materias que se consideren con mayor dificultad; también si se hará en forma individual o con otros compañeros(as); o si se tiene la finalidad de resolver dudas o afirmar conocimientos; todo ello traerá como consecuencia la asimilación y comprensión de otros temas.

No olvides considerar aquellos propósitos que te aproximan cada vez más a hacer de ti un ser humano solidario, sembrador de paz, amante de la armonía, de la belleza interior y del entorno; una persona capaz de escuchar y comprender las razones y problemas de los otros, de reconocer su propia grandeza y valores para comunicarlos, acrecentarlos e irradiarlos; también puedes considerar aquellos que hagan de ti un asiduo conversador contigo mismo como posibilidad para desentrañar debilidades y enfrentarlas, para convertirlas en retos y oportunidades de crecimiento personal.

Contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas para que inicies tu proyecto personal.

1. El proyecto personal del grado séptimo, ¿para qué te sirvió?

2. ¿Consideras que un proyecto para el grado octavo ayudará a tu aprendizaje? ¿De qué manera?

3. Dependiendo de las actividades que realizas después de salir de la escuela, ¿qué tiempo dedicarías a cada una de las materias para tener un mejor dominio de ellas? ¿Lo harías en forma individual o con otros compañeros? ¿Por qué?

4. ¿Cuáles son los objetivos que te has propuesto para este nuevo curso?

5. Si se cumplen la mayoría de las metas que te propusiste en el proyecto ¿aplicarías un proyecto similar al continuar tus estudios? ¿Con qué finalidad?

Espera a que el profesor(a) indique quién leerá sus respuestas ante el grupo; después, si lo consideras necesario, da tus opiniones al respecto.

Escribe en tu cuaderno tu proyecto para el grado octavo de matemáticas; éste debe tener un título, los objetivos que te propongas alcanzar, los planes que deberás seguir y las metas que irás cubriendo para obtener buenos resultados.

Consulta tu proyecto con el profesor(a); luego, él o ella elegirá los que considere convenientes y los leerá ante el grupo.

En caso de que se esté llevando a cabo un proyecto en tu comunidad, coméntalo.

8 ¡DEMUESTRA QUÉ SABES!

Evaluación personal
Demostración del aprendizaje logrado

Al iniciar un curso, es importante tener un panorama general del mismo, a fin de estar preparado para emprender el trabajo diario. ¿Te sientes preparado? En esta sesión lo comprobarás.

Observa el video; te recordará aspectos importantes del núcleo y te invitará a jugar para demostrar qué tanto sabes.

Trabaja individualmente, en tu cuaderno, los ejercicios que se presentan a continuación.

Sigue las instrucciones del programa y usa la sopa de letras que aparece en seguida para encontrar las respuestas.

Si el tiempo no te permite encontrar las respuestas, escríbelas y posteriormente localízalas.

R	O	S	M	T	W	I	D	B	C	H	J	L	Z	O
M	T	E	R	J	M	L	Q	A	L	T	X	B	I	P
P	R	O	Y	E	C	T	O	J	R	M	I	Y	Q	N
O	I	J	R	M	Y	L	G	U	S	O	T	E	S	Q
D	G	B	I	C	G	H	P	D	W	F	L	A	N	T
T	O	X	A	P	E	V	A	L	U	A	C	I	O	N
L	N	J	M	R	N	G	I	A	R	I	A	B	T	L
Q	O	S	L	O	C	T	Z	N	T	K	D	Z	M	A
B	M	P	X	B	R	O	N	A	L	Q	I	H	E	I
J	E	Y	C	L	A	L	M	L	B	X	P	E	A	D
L	T	P	W	E	M	E	L	I	O	T	R	G	P	F
A	R	T	V	M	T	D	R	S	L	K	A	H	X	J
M	I	H	R	A	I	B	O	I	B	R	S	N	Y	V
S	A	P	M	S	O	R	J	S	I	E	M	R	Z	D

Respuestas

1. ____________________
2. ____________________
3. ____________________
4. ____________________
5. ____________________

Continúa con tu evaluación sin la ayuda del programa y en forma individual contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las asignaturas de las matemáticas que permitieron clasificarlas para su estudio en este grado?

b) ¿Cuál de las asignaturas del área te fue más difícil estudiar en séptimo grado? ¿Por qué?

c) ¿Qué solución propones para eliminar la dificultad que algún tema haya presentado?

d) Señala algunas actividades que contribuyan a mejorar tu aprendizaje dentro del salón de clases.

e) ¿Consideras necesaria una evaluación diagnóstica antes de iniciar un nuevo curso? ¿Por qué?

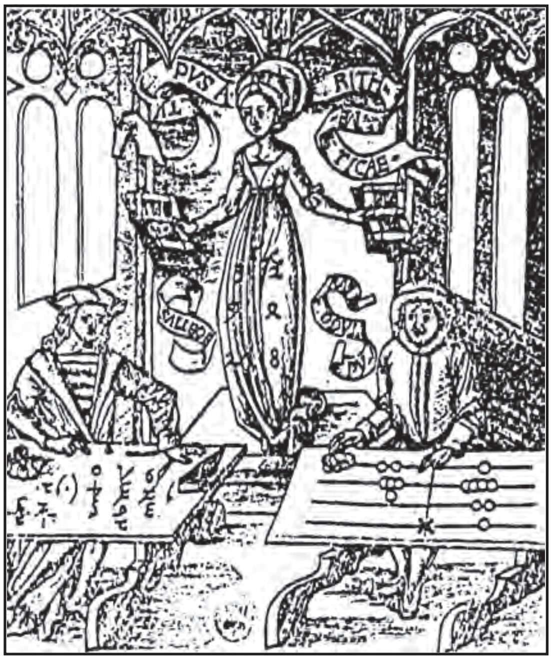
f) ¿Cuál es el principal objetivo que te has propuesto alcanzar en el área de matemáticas este año?

g) ¿Cuáles son tus propósitos de crecimiento personal diferentes de los académicos?

Espera indicaciones de tu profesor para revisar tus respuestas y ampliar ante el grupo algunas que consideres especialmente importantes.

Núcleo Básico 2

ARITMÉTICA



En el siglo XVI todavía se calculaba con fichas colocadas sobre líneas (ver personaje a la derecha). Pero el cálculo escrito utilizando cifras se impuso con el paso del tiempo (personaje de la izquierda).

Margarita Philosophica. 1504
París, Biblioteca Nacional.

La aritmética aparece en la vida del hombre debido a la necesidad de contar. Con la aparición de instrumentos sofisticados como las calculadoras y computadoras, la aritmética, puede delegar en ellos los cálculos y procedimientos mecánicos y de rutina, para ocuparse más bien de la comprensión matemática que los justifica y del desarrollo de habilidades de estimación y aproximación de resultados.

Las operaciones aritméticas son una herramienta indispensable en la resolución de problemas y en cualquier cálculo que se realice. Estas operaciones amplían su campo de aplicación cuando en los datos intervienen los **números racionales** (incluyen los naturales, los enteros y los fraccionarios). Es así como la **multiplicación y la división** en los **fraccionarios** serán objeto de especial atención tanto en la resolución de problemas como de la sistematización de los algoritmos correspondientes.

Respecto a la potenciación trabajarás las **potencias de diez** y las operaciones entre ellas para concluir con la **notación científica**.

También se enriquecerá tu visión acerca de los números cuando reinventes otros, diferentes de los racionales, que constituyen sin lugar a dudas un aporte valioso de la inteligencia humana al universo de las matemáticas. En ese aspecto avanzarás notablemente en grado noveno.

9

27-2

UNA RELACIÓN ESPECIAL

Números racionales, su equivalencia y orden
Concepto de número racional, su equivalencia y orden

Vamos a hacer un recuento de los sistemas numéricos que conoces para establecer relaciones entre ellos. Pero lo más importante es que logremos comprender desde dónde son válidas dichas relaciones.

Forma un grupo de tres participantes y discutan, para llegar a acuerdos, los conocimientos que están involucrados en las respuestas a las siguientes preguntas:

1. Los llamados **números naturales** se originan para solucionar necesidades experimentadas por el ser humano desde épocas muy remotas.

¿Cuáles fueron algunas de esas necesidades?

¿Es el número cero un natural?

¿Puedes hacer una lista de los números naturales?

¿Existe una única forma de representación para los números de contar?

2. ¿Cómo surgen los números enteros?

3. ¿Cómo es el comportamiento de los **números naturales mayores que cero** comparado con el de los **enteros positivos**? ¿Cómo son sus representaciones en la recta numérica? ¡Haz la representación!

4. ¿Te parece razonable pensar que los números naturales sean un subconjunto de los números enteros? ¿Por qué?

5. ¿Qué otro tipo de números conoces? El cociente $3 \div 4$ ¿de qué forma lo puedes expresar sin realizar la división?

6. Representa, de tres formas diferentes, el número fraccionario «tres cuartos». Formula un problema donde intervenga este número, y resuélvelo.

7. Utiliza fracciones para representar (disfrázalos de fracción) los siguientes números:

$$1; \quad 7; \quad -1; \quad -7; \quad +7; \quad 0.5; \quad -2.5; \quad 0$$

Localízalos en una recta.

8. a) Discute con tu grupo si es cierto que los números hasta aquí mencionados (naturales, enteros) son representables mediante fracciones.

b) Utiliza fracciones para representar: $4 \div 5$; $3 \div 7$; $5 \div 3$; $6 \div 11$.

9. ¿Cómo pasas de la representación fraccional de un número a su expresión decimal? Ilustra tomando como ejemplos los cocientes del literal anterior.

10. ¿El número π (pi) es de la misma clase de los números mencionados a lo largo de este cuestionario? En los problemas que has resuelto utilizando este número especial ¿qué has hecho?

Nota especial: El número π no es racional, pero en la práctica lo utilizamos como si lo fuera. A lo largo de los siglos, los matemáticos han encontrado fracciones y expresiones decimales no periódicas muy cercanas al valor de π.

Por ejemplo: $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, pero ninguna de ellas es igual a π.

Encuentra en la expresión decimal de cada una de las fracciones anteriores, aproximaciones del número π. ¡Ordénalos!

Acerca del número π y de otros que pertenecen a su misma clase, hablaremos en grado 9º.

En sesión plenaria y bajo la asesoría del profesor o de la profesora comenten las respuestas a las preguntas anteriores.

Observen el video y tomen nota de aquellos aspectos que requieren discusión o aclaraciones.

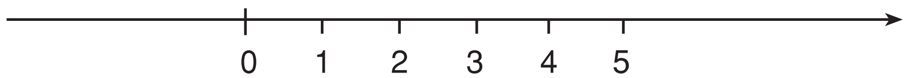
Con un compañero(a), lean el siguiente texto.

NÚMEROS RACIONALES, SU EQUIVALENCIA Y ORDEN

Los números naturales satisfacen la necesidad de contar y de ordenar (numerar). Así por ejemplo, se dice que la semana tiene 7 días, que la Tierra es el 3er planeta según su distancia al Sol, o que la sesión de matemáticas es la 1a. de la mañana.

Los números naturales se pueden sumar y multiplicar y el resultado siempre es un número natural.

Estos números tienen un orden natural y los podemos representar sobre una recta:



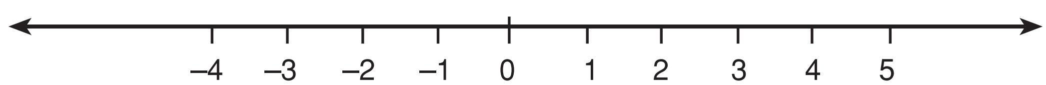
Los números naturales no siempre pueden restarse. Cuando se tienen \$2 450 380 en la cuenta de ahorros de un banco, no se puede cancelar una deuda de \$3 500 000 que se tenga en el mismo banco, salvo que éste nos preste el resto del dinero para quedar, entonces con una nueva **deuda** de \$1 049 620.

A veces, para contar, se requieren cantidades negativas como en el caso anterior, donde el saldo en el banco sería de –\$1 049 620.

Igualmente, el año –450 es el año 450 antes de Cristo.

Se trata, como ya sabes, de los **enteros negativos.**

Los números naturales y sus correspondientes opuestos constituyen el conjunto de los **números enteros**. El número cero no es ni positivo ni negativo, es el origen y también es un entero.



En los números enteros además de poderse sumar y multiplicar, se puede restar con la seguridad de que el resultado será un número entero.

Los números fraccionarios, surgen de la necesidad de expresar porciones de unidad o de un todo (conjunto de objetos). Ya viste los diferentes significados que puede tener una fracción (expresión simbólica de un número fraccionario) según el contexto desde el cual ella surja.

Conoces números fraccionarios menores que la unidad, como:

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{6}{7},\ \frac{8}{10},\ \text{etc.}$$

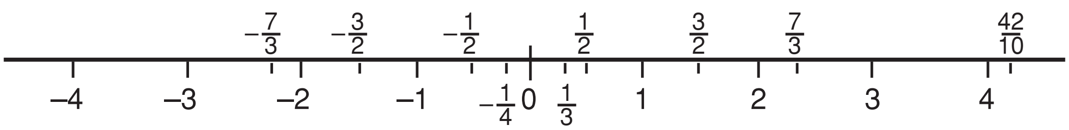
También los hay, mayores que uno. Equivalen a varias unidades completas más una fracción de unidad:

$$\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{7}{3}=2+\frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{42}{10}=4+\frac{1}{5}$$

Por último, tenemos los fraccionarios negativos que podemos representar con fracciones precedidas del signo –.

$$-\frac{1}{2} \;,\; -\frac{1}{4} \;,\; -\frac{3}{2} \;,\; -\frac{7}{3}$$

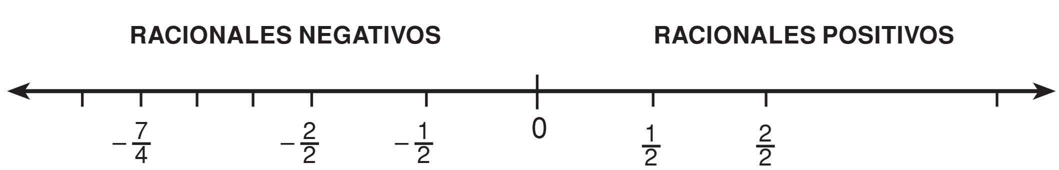
La representación de números positivos y negativos en la recta numérica te resulta conocida:



El conjunto formado por todos los números enteros y todos los fraccionarios, es el conjunto de los números racionales.

Número racional es aquel que puede expresarse por medio de una pareja ordenada de números (a/b) donde a, b son enteros y b es diferente de cero.

Los números racionales se localizan en la recta numérica a ambos lados del cero: a la derecha los racionales positivos y a la izquierda los negativos.



Como ves, un número racional se puede representar por medio de **una fracción común** y por los llamados **números decimales**, que son expresiones con cifras después del punto; éstas se obtienen al dividir los números de una fracción común.

Ejemplos:

$$-\frac{1}{4} = -\ .25 \qquad \frac{9}{10} = .9 \qquad -\frac{8}{1000} = -\ .008$$

Entre dos números racionales se puede establecer una relación especial: **la relación de orden.**

Esa relación, también llamada **Ley de tricotomía**, establece que entre dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se da una y sólo una de las siguientes relaciones:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}, \qquad \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Para establecer entre una pareja de racionales cuál es mayor, menor o igual, debe observarse lo siguiente:

a) De dos números racionales, uno positivo y otro negativo, el mayor será siempre el positivo.

Ejemplos:

Si se tienen: $\frac{3}{5}$ y $-\frac{1}{4}$ entonces $\frac{3}{5} > -\frac{1}{4}$

Si se tienen: $-\frac{4}{8}$ y $\frac{4}{8}$ entonces $-\frac{4}{8} < \frac{4}{8}$

b) Entre un racional positivo y el cero, es mayor el racional positivo.

Ejemplos:

Si se tienen: $\frac{3}{5}$ y 0 entonces $-\frac{3}{5} > 0$

Si se tienen: $\frac{0}{9}$ y $\frac{2}{3}$ entonces $\frac{0}{9} < \frac{2}{3}$

c) Entre un racional negativo y el cero, es mayor el cero.

Ejemplos:

Si se tienen: $-\frac{4}{8}$ y 0 entonces $-\frac{4}{8} < 0$

Si se tienen: $\frac{0}{10}$ y $-\frac{3}{5}$ entonces $\frac{0}{10} > -\frac{3}{5}$

d) Entre dos números positivos, será mayor el de mayor valor absoluto. Esto puede determinarse fácilmente reduciéndolos a un común denominador o por medio de productos cruzados.

Ejemplos:

$\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$, un común denominador es 15

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15} \qquad ; \qquad \frac{2}{3} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5} = \frac{10}{15}.$$

de donde $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$

Relaciona el procedimiento anterior con el de productos cruzados.

$$12 \nwarrow \frac{4}{5} \qquad \frac{2}{3} \nearrow 10$$ entonces $\frac{4}{5} > \frac{2}{3}$

Compara las fracciones por común denominador.

Veamos cómo hacerlo por productos cruzados.

$$30 \nwarrow \frac{3}{5} \times \frac{6}{10} \nearrow 30 \qquad \text{entonces} \qquad \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

e) Entre dos números racionales negativos, será mayor el de menor valor absoluto. Para identificarlo rápidamente se realizan de nuevo los productos cruzados.

$$36 \nwarrow -\frac{6}{8} \times -\frac{3}{6} \nearrow 24 \qquad \text{entonces} \qquad -\frac{6}{8} < -\frac{3}{6}$$

$$5 \nwarrow -\frac{1}{2} \times -\frac{3}{5} \nearrow 6 \qquad \text{entonces} \qquad -\frac{1}{2} > -\frac{3}{5}$$

Para encontrar una fracción equivalente a una dada, se multiplica el numerador y denominador por un mismo número; la fracción resultante será equivalente a la original.

Ejemplos:

Encontrar dos fracciones equivalentes a $\frac{4}{7}$

$$\frac{4}{7} \times \frac{2}{2} = \frac{8}{14} \qquad\qquad \frac{4}{7} = \frac{8}{14}$$

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{3} = \frac{12}{21} \qquad\qquad \frac{4}{7} = \frac{12}{21}$$

Existen varios caminos que llevan a establecer una relación de orden entre fracciones; una de ellas es reduciéndolas a común denominador; sin embargo, por productos cruzados resulta más rápido y sencillo.

Con tu compañero(a), contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas:

1. ¿Cómo compruebas que dos fracciones son equivalentes?

2. ¿Qué criterio se sigue para establecer la relación de orden entre dos racionales, uno positivo y el otro negativo?

3. ¿Cómo se establece la relación de orden entre un número positivo y el cero?

4. ¿Cuál es mayor entre un número negativo y el cero?

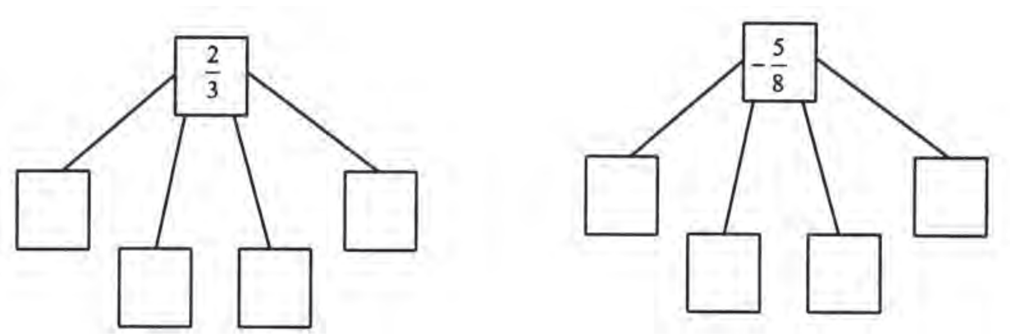
5. ¿Cómo se establece la relación de orden entre dos números negativos?

6. ¿Cómo se establece entre dos números positivos?

Lee tus respuestas en voz alta, y discute con tus compañeros(as) las dudas que tengas. Corrige tus errores.

Resuelve con tus compañeros(as) los siguientes ejercicios. Trabaja en tu cuaderno.

1. Encuentra fracciones equivalentes a las fracciones dadas.



2. ¿Cómo encontraste las fracciones equivalentes a $\frac{2}{3}$ y $-\frac{5}{8}$?

3. Encierra en un círculo las fracciones comunes:

$$\frac{2}{4} \;;\; -0.9 \;;\; -\frac{1}{6} \;;\; \frac{2}{5} \;;\; -0.86 \;;\; \frac{6}{9} \;;\; \frac{4}{5}$$

4. Señala en una recta: el cero, el espacio de los racionales negativos y el de los positivos.

5. Encuentra la relación de orden entre las siguientes parejas de fraccionarios; utiliza para ello el criterio que corresponda. (Si es necesario, realiza operaciones mentalmente).

$$\frac{4}{6} \square -\frac{2}{5} \quad ; \quad -\frac{1}{2} \square \frac{0}{2} \quad ; \quad -\frac{3}{4} \square \frac{2}{5}$$

Compara los resultados obtenidos con los de otros compañeros. Si existen diferencias, revisa tus procedimientos y corrígelos.

Resuelve individualmente, en tu cuaderno, los siguientes ejercicios:

1. Encuentra entre las fracciones de la derecha las que sean equivalentes a las de la izquierda.

$$\frac{1}{3} \qquad \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{6}, \quad \frac{4}{10}, \quad -\frac{3}{9}, \quad \frac{4}{12}$$

$$-\frac{3}{5} \qquad -\frac{6}{10}, \quad -\frac{2}{3}, \quad -\frac{9}{15}, \quad -\frac{15}{25}, \quad -\frac{12}{20}$$

$$\frac{2}{4} \qquad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{4}{8}$$

¿Cómo encontraste las fracciones equivalentes?

2. Anota los signos >, < o =, entre cada pareja de fracciones.

$$\frac{4}{5} \square -\frac{2}{3} \quad ; \quad -\frac{1}{2} \square \frac{1}{3} \quad ; \quad \frac{3}{8} \square \frac{0}{6}$$

$$\frac{5}{8} \square \frac{4}{6} \quad ; \quad \frac{0}{6} \square \frac{4}{5} \quad ; \quad -\frac{3}{5} \square -\frac{7}{8}$$

Comenta con tu profesor(a) las respuestas. Detecta los errores que hayas tenido y corrígelos.

CLAVE

2. $\frac{4}{5} > -\frac{2}{3}$; $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$; $\frac{3}{8} > \frac{0}{6}$; $\frac{5}{8} > \frac{4}{6}$; $\frac{0}{6} < \frac{4}{5}$; $-\frac{3}{5} < \frac{7}{8}$

1. $\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{4}{12}, -\frac{3}{5}, -\frac{9}{15}, -\frac{12}{20}, -\frac{6}{10}$; $\frac{2}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$;

10 TODO EN PARTES IGUALES

28-2

Adición y sustracción de fracciones
Aplicación del mcm en el trabajo con fracciones

RECUERDA: ya sabes cómo se obtienen fracciones equivalentes a una fracción dada.

Con un(a) compañero(a) utiliza ese conocimiento para expresar con un mismo denominador las siguientes fracciones:

1. a) $\frac{4}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{12}, \frac{7}{12}, \frac{3}{5}, \frac{7}{4}$

b) $\frac{3}{8}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}$ d) $-\frac{1}{7}, \frac{2}{5}, \frac{4}{35}$

2. Observa si el denominador común es, en cada caso, el mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores.

El mcm puede ser uno de tales denominadores como lo es en b) y en d). Esto es lo primero que debes verificar.

8 es el mcm de 8, 4 y 2 ; 35 es el mcm de 7, 5 y 35

3. Ahora encuentra la suma de cada uno de los cuatro grupos de fracciones.

Compara sus resultados con los de tus compañeros(as) más cercanos; en caso de que existan diferencias, consulta con tu profesor.

Observa el video. Después comenta con tus compañeros(as) el procedimiento que debe seguirse para la solución de las adiciones y sustracciones con distinto denominador, empleando el mcm.

Lee el siguientes texto.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE FRACCIONES

Al presentarse el problema de sumar o restar fracciones con diferente denominador, es conveniente emplear el mínimo común múltiplo para que la resolución sea menos laboriosa.

Tómese como ejemplo la siguiente adición:

$$\frac{17}{9} + \frac{5}{6} =$$

Se halla el mcm de los denominadores:

$$\left.\begin{array}{cc|c} 9 & 6 & 2 \\ 9 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & & \end{array}\right\} \quad 2 \times 3 \times 3 = 18$$

mcm (9, 6) = 18

El número 18 será el común denominador de las fracciones por sumar, el cual se divide entre cada uno de los denominadores:

$$\frac{17}{9} + \frac{5}{6} = \frac{\quad}{18} + \frac{\quad}{18}$$

$\div$ $\div$

Enseguida, los cocientes obtenidos se multiplican por los numeradores de cada fracción:

$$\times\frac{17}{9} + \times\frac{5}{6} = \frac{}{18} + \frac{}{18}$$

$$\div \qquad \div$$

También pudiste pensar en el número que multiplicó a 9 para convertirlo en 18 y en el que multiplicó a 6 para transformarlo en 18. Los numeradores respectivos se multiplican por ese mismo número.

Los resultados son los numeradores de las nuevas fracciones equivalentes:

$$\frac{17}{9} + \frac{5}{6} = \frac{34}{18} + \frac{15}{18}$$

Finalmente, se resuelve la operación con las nuevas fracciones, sumándolas en forma directa.

En las sustracciones con diferentes denominadores se sigue un proceso semejante al utilizado en la adición de fracciones con distinto denominador.

Tómese para ejemplificar la siguiente sustracción:

$$\frac{23}{10} - \frac{7}{6}$$

Se halla el mcm de los denominadores:

$$\left.\begin{array}{ll|l} 10 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \\ 1 & & \end{array}\right\} \quad 2 \times 3 \times 5 = 30$$

mcm (10, 6) = 30

Se convierten en fracciones equivalentes con igual denominador y se efectúa la operación entre los numeradores, simplificando el resultado, en caso de que se pueda:

$$\frac{23}{10} - \frac{7}{6} = \frac{69}{30} - \frac{35}{30} = \frac{34}{30} = \frac{17}{15}$$

Habrá situaciones, tanto en la adición como en la sustracción, en las que aparezcan números enteros; esto obliga a colocarles la unidad como denominador para que quede expresado como fracción común o bien convertirlos en fracciones con el denominador que se requiera.

Ejemplo: $3 + \frac{4}{7}$ y $3 - \frac{4}{7}$

Se convierten los números enteros en fracciones comunes colocándoles la unidad como denominador:

$$\frac{3}{1} + \frac{4}{7} \qquad\qquad \frac{3}{1} - \frac{4}{7}$$

El mcm de los denominadores es 7.

Se convierten en fracciones equivalentes con denominador 7 y se efectúa la operación.

$$\frac{3}{1} + \frac{4}{7} = \frac{21}{7} + \frac{4}{7} \qquad\qquad \frac{3}{1} - \frac{4}{7} = \frac{21}{7} - \frac{4}{7}$$

o bien   o bien

$$= \frac{21+4}{7} = \frac{25}{7} \qquad\qquad = \frac{21-4}{7} = \frac{17}{7}$$

Para efectuar operaciones de adición y sustracción en donde las fracciones tengan signos diferentes, se sigue un procedimiento semejante.

Ejemplo:

Sumar $\left[\frac{3}{4}\right]$ y $\left[-\frac{5}{3}\right]$

Se convierten en fracciones con igual denominador:

$$\left[\frac{3}{4}\right] + \left[-\frac{5}{3}\right] = \left[\frac{9}{12}\right] + \left[-\frac{20}{12}\right]$$

Se efectúa la operación:

$$\left[\frac{9}{12}\right] + \left[-\frac{20}{12}\right] = -\frac{11}{12}$$

Siguiendo los mismos lineamientos para la adición de números enteros, el resultado tendrá el mismo signo que el sumando de mayor valor absoluto.

Restar $\left[-\frac{1}{2}\right]$ de $\left[\frac{4}{5}\right]$

Se plantea la operación:

$$\left[\frac{4}{5}\right] - \left[-\frac{1}{2}\right]$$

Se convierte en fracciones con igual denominador:

$$\left[\frac{8}{10}\right] - \left[-\frac{5}{10}\right]$$

Se le suma al minuendo el simétrico del sustraendo:

$$\left[\frac{8}{10}\right] + \left[-\frac{5}{10}\right] = \frac{13}{10}$$

Obsérvese que, en este caso, la sustracción se transforma en adición.

Forma una pareja y resuelve los siguientes problemas en el cuaderno.

a) Pedro ha estudiado $\frac{3}{4}$ de hora. Enrique $\frac{2}{3}$ de hora y Juan 2 horas. Si se suman los tres tiempos, ¿cuánto tiempo han estudiado los tres?

b) Doña María vendió $\frac{2}{3}$ de una docena de zapatos el lunes, $\frac{3}{12}$ de una docena el martes y $\frac{4}{6}$ el miércoles. Si tenía dos docenas de pares de zapatos, ¿cuántos pares le quedan?

Con base en los problemas resueltos contesta:

¿Te resultó difícil solucionar los problemas? ¿Tienes alguna duda?

Compara tus resultados con los de otra pareja; si existen diferencias, consulta con tu profesor(a).

En forma individual, contesta o complementa en tu cuaderno los siguientes ejercicios:

a) $\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{2}{7} = \frac{\square + 63 + \square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

b) $\frac{2}{9} - \frac{1}{12} = \frac{\square \quad \square}{\square} = \frac{5}{\square}$

c) ¿Cuál es mayor $\frac{11}{12}$ o $\frac{12}{13}$?

d) Se compraron 4 kg de mango, $\frac{3}{4}$ kg de naranja, $\frac{1}{2}$ kg de manzana y 2 kg de uva.

¿Cuánto peso se cargará?

Reto:

e) Se repartió una herencia de \$ 165 000 000 entre la viuda, su hijo y su hija, de modo que el hijo recibió la mitad de lo que recibió su hermana y, ésta, el triple de lo que recibió su madre. ¿Cuánto recibió cada uno?

Pistas para la solución $\left\{\begin{array}{ll} x & \text{dinero hermana} \\ \frac{x}{2} & \text{dinero hijo} \\ \frac{x}{3} & \text{dinero madre} \end{array}\right.$

$$\frac{x}{1} + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 165\ 000\ 000$$

Compara tus resultados con los del compañero(a) más cercano; en caso de que existan diferencias consulta con tu profesor(a) y con la clave.

CLAVE

c) $\frac{12}{13} > \frac{11}{12}$. A $\frac{12}{13}$ sólo le falta $\frac{1}{13}$ para ser igual a la unidad, mientras que a $\frac{11}{12}$ le falta $\frac{1}{12}$ y $\frac{1}{13}$ es menor que $\frac{1}{12}$

d) $7\frac{1}{4}$ kg

e) Hermana $90 000 000; hijo $45 000 000; viuda $30 000 000.

11 LAS CAMPECHANAS

29-2

Adición y sustracción
Resolución de operaciones combinadas

En sesiones anteriores practicaste la adición y la sustracción de fracciones; ahora podrás avanzar aplicándolas en forma combinada, tanto en la resolución de operaciones como en la solución de problemas.

Observa el video, en él encontraras cómo resolver problemas con varias operaciones.

Después reúnete con un compañero(a) para que comentes los aspectos de mayor interés.

Intégrate a un equipo de trabajo y realiza una lectura del siguiente texto, para que se te facilite la resolución de los problemas y ejercicios que se plantean posteriormente.

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Una vez que se ha comenzado el aprendizaje de las fracciones comunes y se han ejercitado operaciones tanto de adición como de sustracción, se está en condiciones de realizar operaciones combinadas, que surgen de diversas situaciones problemáticas. Véanse los siguientes ejemplos:

1. Una persona acude a la tienda para comprar azúcar, que recibe en tres paquetes con las siguientes cantidades: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, y $\frac{1}{4}$ de kilogramo. Sin embargo, al pagar, nota que no cuenta con el dinero suficiente y debe regresar $\frac{1}{4}$ kg de azúcar. ¿Qué cantidad de azúcar compró?

Para poder determinar la cantidad de azúcar que compró, basta con realizar la siguiente operación combinada.

$$\frac{2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2 + 3 + 4 - 1}{4} = \frac{8}{4}$$

$$\frac{8}{4} = 2$$

Como se puede apreciar, esta operación presenta tanto adición como sustracción de fracciones, situación que se manifiesta por el uso de los signos de operación (+) y menos (–). Otro aspecto por considerar es el hecho de que sus denominadores son iguales, por lo cual el procedimiento utilizado en la adición y sustracción se aplica en la resolución de operaciones de esta forma.

Una vez hechas las consideraciones anteriores y realizadas las operaciones correspondientes, se tiene que la cantidad de azúcar que compró es 2 kg.

Enseguida se tiene un problema que amplía el uso del mcm, ya que se trata de fracciones con diferente denominador en operaciones combinadas.

2. Una cisterna tiene una profundidad de 5 m y contiene agua hasta la marca de $3\frac{1}{2}$ m de profundidad, y durante la noche se llena hasta la marca de $1\frac{1}{4}$.

¿Qué tanto ascendió el nivel de agua en la cisterna?

Los $3\frac{1}{2}$ y el $1\frac{1}{4}$ m de profundidad se puede representar como $-3\frac{1}{2}$ y $-1\frac{1}{4}$, respectivamente, debido a que se encuentran debajo del nivel del piso.

Para resolver este problema numéricamente, se procede a representar la situación de la siguiente manera:

$$-3\frac{1}{2} + \boxed{} = -1\frac{1}{4}$$

Donde $\boxed{}$ es un sumando desconocido por lo cual su valor se puede obtener al restar de la suma $(-1\frac{1}{4})$ el sumando conocido $(-3\frac{1}{2})$. Es decir:

$$-1\frac{1}{4} - (-3\frac{1}{2}) = \boxed{}$$

En una sustracción de **números con signo**, el resultado se obtiene sumándole al minuendo $(-1\frac{1}{4})$ el simétrico del sustraendo que es $3\frac{1}{2}$. Por lo tanto, la operación es:

$$-1\frac{1}{4} + 3\frac{1}{2} =$$

Se transforman los dos números en fracciones comunes.

$$-1\frac{1}{4} = -\frac{4}{4} + (-\frac{1}{4}) = -\frac{5}{4}$$

$$3\frac{1}{2} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

Así, la operación es:

$$-\frac{5}{4} + \frac{7}{2} = \frac{-5 + 14}{14} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$$

Lo que significa que el nivel del agua de la cisterna aumentó $2\frac{1}{4}$ m.

Se puede comprobar efectuando la adición inicial y sustituyendo el sumando desconocido ($\boxed{}$) por la solución obtenida ($2\frac{1}{4}$). Es decir:

$$-3\frac{1}{2} + \boxed{} = -1\frac{1}{4}$$

Sustituyendo:

$$-3\frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} = -\frac{7}{2} + \frac{9}{4}$$

Entonces:

$$-\frac{7}{2} + \frac{9}{4} = \frac{-14 + 9}{4} = -\frac{5}{4} = -1\frac{1}{4}$$

Esto comprueba que el nivel de agua de la cisterna aumentó su volumen en $2\frac{1}{4}$ m.

De lo anterior se puede concluir que:

Para resolver operaciones combinadas de adición y sustracción, con igual o diferente denominador, se aplican los mismos procedimientos utilizados en la adición y sustracción de fracciones.

Con tu equipo de trabajo, completa las siguientes expresiones, anotando en el espacio, el número que falta. (Realiza las operaciones necesarias en tu cuaderno):

a) $\frac{5}{5} + \frac{\square}{5} - \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

b) $\frac{10}{9} + \frac{20}{3} - \frac{2}{7} = \frac{472}{\square}$

c) $\frac{1}{2} + \frac{7}{9} - \frac{2}{5} = \frac{\square}{90}$

Compara tus resultados con los de otro equipo; si tienes dudas, coméntalas y en caso necesario corrígelas.

Resuelve de manera individual los siguientes ejercicios, aplicando el cálculo mental:

a) $\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{2}{2} = \square$

b) $\frac{1}{5} + \frac{8}{5} - \frac{2}{5} = \square$

c) $\frac{9}{9} + \frac{3}{9} - \frac{7}{9} = \square$

Compara tus resultados con los de un compañero(a); si se te dificultó el ejercicio, continúa practicando para que se desarrolle tu habilidad mental.

De manera individual, resuelve los siguientes problemas.

1. Juanita tenía $\frac{15}{20}$ kg de arroz y compró $\frac{1}{4}$ kg más para preparar arroz con leche; del total de arroz que tenía, utilizó $\frac{11}{20}$ kg. ¿Qué cantidad de arroz no utilizó?

2. Un alumno de Telesecundaria emplea $\frac{5}{10}$ de hora en el bus y $\frac{1}{4}$ de hora más caminando para llegar a su casa; pero si a la salida de la escuela lo encuentra su papá, que conduce un carro, se ahorra $\frac{1}{4}$ de hora.

¿Cuánto tiempo emplea el alumno para llegar a su casa si encuentra a su papá? (Resuelve el problema aplicando el cálculo mental.)

Al terminar, tu profesor(a) te dará las respuestas; compáralas con las tuyas y corrige en caso necesario.

12 CONVERTIR PARA OPERAR

30-2

Relaciones aditivas de fraccionarios comunes y decimales
Realización de adición y sustracción con fracciones comunes y decimales

Has realizado muchas adiciones y sustracciones con fracciones comunes o decimales. Ahora comprenderás que es necesario aplicar la conversión de fracciones comunes a decimales y viceversa para realizar las operaciones de adición y sustracción que se requieren para solucionar situaciones cotidianas.

¡Para calentar motores! Con un(a) compañero(a) haz en tu cuaderno los siguientes ejercicios. Si tienen calculadora utilícenla cuando sea necesario pero anticipen un posible resultado.

1. Escribe en forma de fracción los siguientes números:

3.1 ; 0.3 ; 10.5 ; 2.14 ; 0.04

2. Escribe la expresión decimal de las siguientes fracciones:

$$\frac{3}{4} \quad ; \quad \frac{5}{8} \quad ; \quad \frac{8}{5} \quad ; \quad \frac{18}{25} \quad ; \quad \frac{35}{4}$$

3. De los siguientes cocientes indicados, escribe en forma decimal aquellos donde la división termina (residuo cero) y en forma de fracción aquellos donde la división no termina (residuo diferente de cero)

$$a = 6 \div 25 \quad ; \quad b = 27 \div 75 \quad ; \quad c = 8 \div 3$$

4. Escribe dos fracciones para cada uno de los números siguientes:

4.2 ; 3.64 ; 1.40 ; 0.033

Si tienen alguna duda, ténganla presente para aclararla después del video o de la lectura.

Para que comprendas lo anterior, observa con atención el video. Al terminar, comenta con tus compañeros(as) lo que consideres importante.

Lee el siguiente texto, para que al terminar te reúnas con un compañero(a) a intercambiar ideas respecto a lo que hayas entendido.

RELACIONES ADITIVAS DE FRACCIONES COMUNES Y DECIMALES

La necesidad de sumar cantidades se hace presente con frecuencia en la vida cotidiana. Muchas de esas cantidades no se pueden expresar con números enteros, ya que al medir se obtienen números fraccionarios o tienen una parte entera y una parte fraccionaria. Además, la parte fraccionaria puede estar representada como fracción común o como fracción decimal.

Para concretar estas ideas, considere la siguiente situación.

- María adquirió $\frac{3}{4}$ m de listón rojo, 1.35 m de listón azul y $\frac{2}{5}$ m de listón amarillo.

  ¿Qué cantidad de listón adquirió en total?

En matemáticas, para resolver este problema, se indica la siguiente operación:

$$\frac{3}{4} + 1.35 + \frac{2}{5} =$$

Es necesario considerar que las fracciones comunes con diferente denominador no se pueden sumar directamente, ya que para realizar la operación primero se obtienen fracciones equivalentes con el mismo denominador. Tampoco se podrá sumar directamente si en la misma operación se tienen fracciones comunes y decimales como sumandos.

En este caso, se requiere una sola forma de representación numérica para poder sumar.

Si se decide que todos los sumandos tengan la forma de fracción, se requiere convertir 1.35, o sea:

$$1.35 = \frac{135}{100} = \frac{27}{20} \quad \text{y la operación queda}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{27}{20} + \frac{2}{5}$$

Se observa que 20 contiene exactamente a 4 y 5, por lo que puede ser el común denominador. Así:

$$\frac{3}{4} + \frac{27}{20} + \frac{2}{5} = \frac{15}{20} + \frac{27}{20} + \frac{8}{20} = \frac{50}{20}$$

$$\text{y} \quad \frac{50}{20} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \text{ m}$$

Es decir, María adquirió $2\frac{1}{2}$ m de listón.

Sin embargo, puede optarse por la expresión decimal de todos los sumandos; y para poder efectuar la operación, será necesario transformar $\frac{3}{4}$ y $\frac{2}{5}$ en decimales. Así que:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \hline 30 & 0.75 \\ 20 & \end{array} \qquad \text{y} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 5 \\ \hline 20 & 0.4 \\ 0 & \end{array}$$

Como $0.4 = 0.40$, la adición queda:

$$
\begin{array}{r}
0.75 \\
+\ 1.35 \\
0.40 \\
\hline
2.50
\end{array}
$$

Es decir, María compró 2.50 m de listón.

Además, se sabe que:

$$2.50 = \frac{250}{100} = \frac{25}{10} = 2\frac{5}{10} = 2\frac{1}{2}$$

Por lo tanto, se concluye que las dos formas de proceder dan la misma solución, ya que:

$$2\frac{1}{2}\text{ m} = 2.50\text{ m}$$

- En un laboratorio se realiza un experimento para el cual se somete una sustancia a una temperatura de –7.2 °C. Enseguida, se la coloca al fuego donde asciende $4\frac{1}{4}$ °C en pocos segundos.

Se desea conocer la temperatura de dicha sustancia en ese momento.

Temperatura inicial de la sustancia	Aumento de temperatura	Temperatura final de la sustancia
–7.2 °C	$4\frac{1}{4}$ °C	$\boxed{}$

El problema se puede resolver sumando la temperatura inicial con el aumento, para obtener la temperatura final; es decir:

$$-7.2 + 4\frac{1}{4} =$$

La adición se puede realizar solamente si ambos números tienen el mismo tipo de representación, ya sea fracción común o expresión decimal.

Al transformar $-7.2 \; + \; 4\frac{1}{4} \; =$ en fracción común, se tiene:

$$-7.2 \; = \; -\frac{72}{10} \; = \; -\frac{36}{5} \qquad \text{y} \qquad 4\frac{1}{2} \; = \; \frac{9}{2}$$

Por lo tanto, la operación es:

$$-\frac{36}{5} \; + \; \frac{9}{2} \; = \; \frac{-72 \; + \; 45}{10} \; = \; -\frac{27}{10} \; = \; -2\frac{7}{10}$$

Otra opción es transformar $4\frac{1}{2}$ en decimal, es decir:

$$4\frac{1}{2} \; = \; \frac{(4 \; \times \; 2) \; + \; 1}{2} \; = \; \frac{8 \; + \; 1}{2} \; = \; \frac{9}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ \cline{2-2} 10 & 4.5 \end{array}$$

Así, la operación es:

$$-7.2 \; + \; 4.5 \; = \; \boxed{}$$

Se toma como minuendo el número con mayor valor absoluto y como sustraendo el de menor valor absoluto y se resta, asignándole al resultado el signo del minuendo.

$$\begin{array}{r} 7.2 \\ -\,4.5 \\ \hline -\,2.7 \end{array}$$

Es notorio que con los dos procedimientos se obtuvo el mismo resultado y que éste es negativo. Lo que significa que la temperatura de dicha sustancia ascendió a -2.7 °C.

Todo lo expresado muestra las relaciones aditivas que existen entre las fracciones comunes y las expresiones decimales.

Conocer estas relaciones permite resolver muchas situaciones que pueden presentarse en la vida diaria.

Con un(a) compañero(a) realiza en tu cuaderno las conversiones que se te piden.

1. Convierte 0.245 en fracción común y simplifica.

2. Convierte $\frac{5}{8}$ en decimal

3. Convierte $2\frac{3}{4}$ en fracción común impropia.

Compara tus resultados con los de otra pareja. Donde sea posible, utiliza tu calculadora de bolsillo para verificar las respuestas. Si te equivocas, corrige.

Individualmente, resuelve los siguientes problemas:

1. La comisión de recreación de un grupo adquirió 2.5 kg de alimento para pasabocas, pero esta cantidad fue insuficiente, por lo que requirió $\frac{3}{4}$ kg más. ¿Cuántos kg de alimento adquirió en total la comisión?

2. Juanita adquirió $3\frac{1}{5}$ de tela para realizar un trabajo de corte y confección.

Solamente utilizó $\frac{7}{8}$ m. ¿Qué cantidad de tela le quedó?

Muestra los resultados a dos compañeros(as) de grupo. Si hay necesidad de comprobar, usa tu calculadora de bolsillo cuando sea posible. Si hay errores en tu trabajo, corrígelos.

CLAVE

1. $3\frac{1}{4}$ kg ; 2. $\frac{13}{40}$ m

13 PARTE DE UNA PARTE O DE UN ENTERO

31-2 Productos de fracciones comunes
Aplicación del algoritmo de la multiplicación

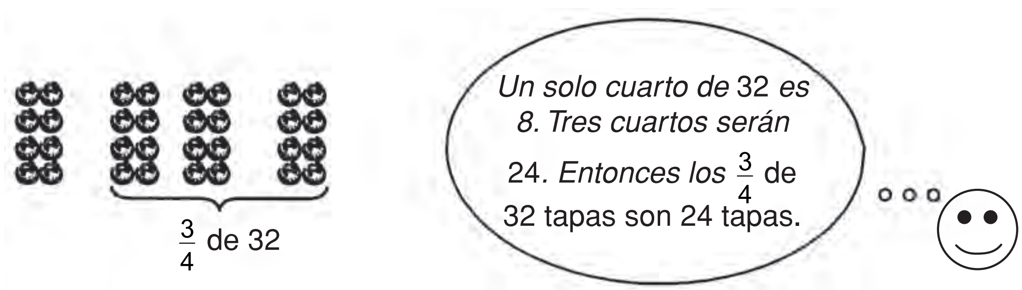
Existen ocasiones en que únicamente no se fracciona en partes iguales un todo, sino que tenemos la necesidad de calcular o de tomar una o varias partes ya fraccionadas o tomar una fracción de un número entero; ¿se te ocurre un procedimiento para resolver esta situación? En esta sesión aprenderás un método sencillo.

Forma un grupo con otros dos participantes para realizar la siguiente actividad:

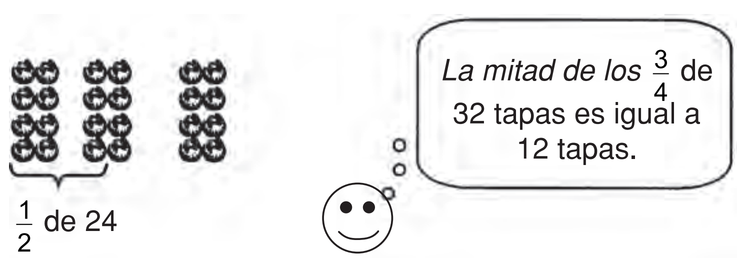
Taller: ***Una situación en la que se toman sucesivamente dos fracciones de una cantidad.***

1. Cuenten 32 tapas de gaseosa, fichas o piedritas y colóquenlas encima de la mesa o del pupitre.

2. Echen en una bolsa (o separen) los tres cuartos del número de tapas. ¿Cuántas tapas son?



3. Del número de tapas o de fichas que echaron en la bolsa (o que separaron) tomen la mitad. ¿Cuántas tapas quedan?



4. ¿Qué parte de 32 tapas son las 12 tapas?

5. Discutan y verifiquen si es cierto que tomar **la mitad de los tres cuartos** de 32 tapas da lo mismo que tomar **los tres octavos** de esas 32 tapas.

6. ¿Qué operación harían para obtener $\frac{3}{8}$ a partir de $\frac{1}{2}$ y de $\frac{3}{4}$?

La mitad de los tres cuartos de 32 tapas son 12 tapas.

$$\mathbf{\frac{1}{2}\ de\ \frac{3}{4}\ de\ 32\ tapas = 12\ tapas.}$$

Analicen atentamente estos cálculos:

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{1 \times 3}{2 \times 4} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{8} \text{ de } 32 = \frac{3}{8} \times 32 = \frac{3 \times 32}{8}$$

$$\frac{96}{8} = 12$$

$$\frac{96}{8} = 12$$

$$3 \times 4 = 12$$

7. ¿Cómo se multiplican dos fracciones?

8. ¿Cómo se multiplica una fracción por un entero?

9. Verifiquen si es lo mismo tomar **la mitad de los tres cuartos** de algo, que tomar los **tres cuartos de la mitad** de ese mismo algo.

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{3}{4} \quad \text{y} \quad \frac{3}{4} \text{ de } \frac{1}{2} \quad \text{¿cómo son?}$$

10. Efectúen:

$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} =$ $\qquad\qquad$ $\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} =$

Si quedan algunas inquietudes, vamos a superarlas en esta sesión.

Observa con mucha atención el video y al término de éste comenta su contenido con tu profesor(a) y compañeros(as).

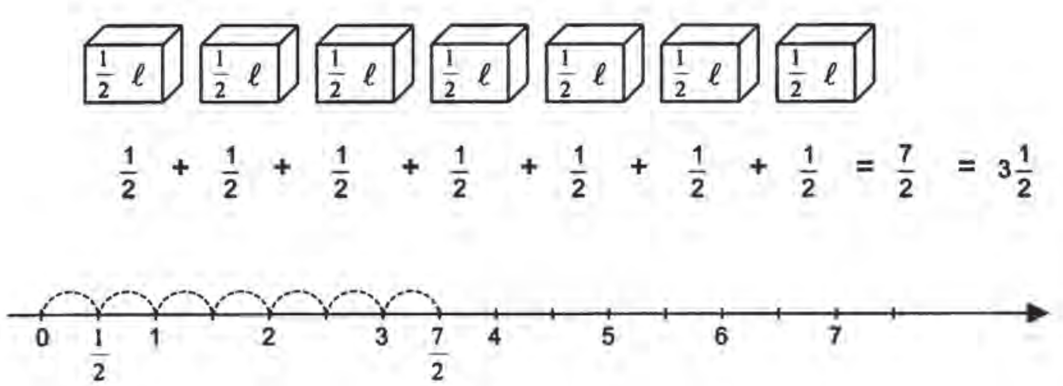
Lee con tus compañeros(as) de grupo el siguiente texto:

PRODUCTO DE FRACCIONES COMUNES

Existen situaciones cotidianas en las que se relacionan las partes de un entero; estas relaciones se expresan a través de las operaciones que con ellas se realizan. Véanse algunos ejemplos concretos de multiplicación en las siguientes situaciones.

a) Siete alumnos del grupo del grado segundo van a vender jugos de frutas con leche en la escuela. Cada uno aporta $\frac{1}{2}$ litro de leche. ¿Cuántos litros de leche se reunieron?

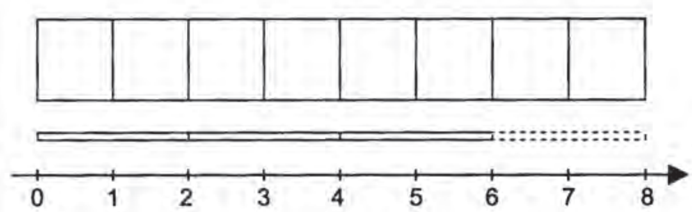
7 cajas de $\frac{1}{2}$ litro son $\frac{7}{2}$ litros, o sea, $3\frac{1}{2}$ litros



7 veces $\frac{1}{2}$ son $\frac{7}{2}$ $\qquad$ $7 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

b) Para confeccionar un vestido, una modista dispone de 8 metros de tela; como solo necesita $\frac{3}{4}$ de la tela, ¿cuántos metros utiliza?

Tomamos $\frac{3}{4}$ de los 8 metros:



$\frac{3}{4}$ de 8 metros son 6 metros:

$$\frac{3}{4} \times 8 = \frac{24}{4} = 6$$

c) Un campesino va a sembrar legumbres en la mitad de la tercera parte de su parcela. ¿Qué parte del total de la parcela tendrá legumbres?

¿Qué parte representa la mitad de la tercera parte de un entero?

Se puede representar gráficamente la situación:

Se divide el entero en tres partes iguales (tercios) y se marca una de ellas.

Los tercios se dividen a la mitad y se marca $\frac{1}{2}$ del tercio marcado inicialmente.

$$\frac{1}{2} \text{ de } \frac{1}{3} \text{ es } \frac{1}{6}$$

La figura queda dividida en seis partes iguales, así que un medio de un tercio es un sexto.

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Como se puede observar, la multiplicación de fracciones puede aplicarse en diferentes situaciones:

Cuando se repite un número entero de veces una fracción: $6 \times \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$

Cuando se toma una parte de un entero: $\frac{2}{3} \times 12 = \frac{24}{3}$

Cuando se toma una parte de una fracción: $\frac{5}{6} \times \frac{7}{8} = \frac{35}{48}$

Para representar la multiplicación de dos fracciones se puede hacer de varias formas:

a) Utilizando un punto: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$

b) Utilizando el signo $\times$: $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$

c) Utilizando paréntesis: $\left[\frac{1}{2}\right]\left[\frac{1}{3}\right]$

Las formas b) y c) son las más usuales.

Los términos de multiplicación de fracciones son:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Factores Producto

Nótese la relación que hay entre los numeradores y denominadores de los factores $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ y el numerador y denominador del producto $\frac{1}{6}$.

Factores	Producto	
$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1 es producto de 1×1 6 es producto de 2×3

El procedimiento para multiplicar dos fracciones es el siguiente:

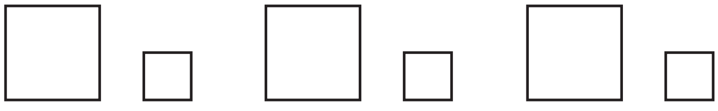
El producto de dos fracciones es otra fracción cuyo numerador es el producto de los numeradores de los factores y el denominador producto de los denominadores.

En general $\frac{b}{e} \times \frac{c}{d} = \frac{b \times c}{e \times d} = \frac{b\ c}{e\ d}$, donde e, d son distintas de cero.

Ejemplos:

a) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2 \times 3}{3 \times 5} = \frac{16}{5}$ $\qquad \boxed{\frac{2}{5}}$

Es conveniente expresar los resultados en su forma más simple, siempre que se pueda.

b) 

$1\frac{1}{4}$ $\quad 1\frac{1}{4}$ $\quad 1\frac{1}{4}$ $\quad 3 \times 1\frac{1}{4} = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

Para multiplicar números mixtos se convierten a fracciones impropias y luego se multiplican.

Obsérvense los siguientes ejemplos:

a) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{6} = \frac{15}{24}$; $\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{24}$ El orden de los factores no altera el producto.

b) $\left[\frac{1}{3} \times \frac{2}{5}\right] \times \frac{2}{4} = \frac{2}{15} \times \frac{2}{4} = \frac{4}{60}$

$\frac{1}{3} \times \left[\frac{2}{5} \times \frac{2}{4}\right] = \frac{1}{3} \times \frac{4}{20} = \frac{4}{60}$ Agrupando los factores

c) $\frac{6}{7} \times 1 = \frac{6}{7}$ Todo número multiplicado por uno da como producto el mismo número.

d) $\frac{3}{5} \times 0 = 0$ Cualquier número multiplicado por cero da cero.

e) $\frac{3}{5} \times \frac{5}{3} = 1$ $\frac{4}{1} \times \frac{1}{4} = 1$ $\frac{1}{3} \times \frac{3}{1} = 1$ $\frac{2}{7} \times \frac{7}{2} = 1$

Observa esto:

$\frac{\blacklozenge}{\spadesuit} \times \frac{\heartsuit}{\clubsuit} = \frac{\blacklozenge \times \heartsuit}{\spadesuit \times \clubsuit}$ ¿qué opinas?

Dos números fraccionarios que al multiplicarse dan como resultado la unidad, se llaman inversos multiplicativos o recíprocos.

LOS SIGNOS EN LA MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

¿Las leyes de los signos en la multiplicación de fracciones serán las mismas que se ha convenido utilizar en la multiplicación de enteros?

$(+)(+) = +$ $(-)(-) = +$ $(+)(-) = -$ $(-)(+) = -$

Veamos un ejemplo

$$\left[\frac{3}{4}\right]\left[-\frac{2}{5}\right] = -\frac{6}{20}$$ ¿Por que? Tratemos de demostrarlo:

$\frac{3}{4} \times 0 = 0$ Cualquier número multiplicado por cero da cero.

$\frac{3}{4} \times \left[-\frac{2}{5} + \frac{2}{5}\right] = 0;$ Por ser inversos aditivos. $-\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 0$

$\left[\frac{3}{4} \times -\frac{2}{5}\right] + \left[\frac{3}{4} \times \frac{2}{5}\right] = 0$ Aplicando la distributiva del producto con respecto a la suma.

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$\left[-\frac{6}{20}\right] + \left[\frac{6}{20}\right] = 0$ Realizamos las operaciones.

Se puede concluir que:

$$\frac{3}{4} \times -\frac{2}{5} = -\frac{6}{20}$$

Forma equipo con dos compañeros(as), analiza la información que leíste e intercambia ideas respecto a las siguientes situaciones:

1. ¿Cuáles son los casos que se presentan al multiplicar fracciones?

2. ¿Cuál es el procedimiento que se sigue para multiplicar fracciones?

3. ¿Cómo debe quedar el resultado?

4. ¿Puedes encontrar el producto cuando las fracciones tienen diferentes signos?

Continúa trabajando con tu equipo. Resuelve lo que se indica.

1. Representa gráficamente, como desees, las multiplicaciones de fracciones:

$5 \times \frac{3}{4} =$ $\qquad$ $\frac{2}{3} \times 9 =$ $\qquad$ $\frac{3}{5} \times \frac{2}{3} =$

2. Plantea un problema, el cual resuelvas mediante una multiplicación de fracciones. Resuélvelo y represéntalo gráficamente.

Intercambia tu Guía con otro equipo y revisa tus respuestas; si tienes dudas, consulta con tu profesor(a).

3. Una botella de vinagre contiene $\frac{3}{4}$ de litro. ¿Cuántos litros contienen 80 botellas?

4. ¿Qué dura más $\frac{3}{5}$ de hora o $\frac{7}{12}$ de hora?

5. ¿Cuántos decímetros hay en los $\frac{6}{7}$ de 91 m?

6. ¿Cuántos gramos se tienen en los $\frac{3}{4}$ de 7 kg?

7. ¿Cuántos grados miden los $\frac{3}{10}$ de un ángulo recto?

8. Calcula el área de un rectángulo cuyos lados miden $\frac{3}{7}$ m y $\frac{14}{25}$ m.

9. Calcula mentalmente:

$\frac{2}{3} + \frac{1}{3}$; $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$; $1 + \frac{1}{2}$; $\frac{3}{2} - 1$; $1 - \frac{3}{4}$

$2 \times \frac{3}{4}$; $3 \times \frac{5}{6}$; $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$; $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$; $\frac{4}{7} \times \frac{7}{4}$

10. Escribe los inversos multiplicativos de las siguientes fracciones:

$$\frac{2}{3} \; ; \; \frac{3}{5} \; ; \; \frac{1}{7} \; ; \; \frac{8}{1}$$

Resuelve en forma individual los siguientes ejercicios:

1. Encuentra el producto de las siguientes multiplicaciones y no olvides simplificar tus resultados.

a) $\frac{1}{3} \times \frac{3}{5} =$

b) $\frac{4}{6} \times -\frac{2}{3} =$

c) $\frac{4}{7} \times \frac{7}{4} =$

d) $2\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} =$

e) $-\frac{1}{5} \times \frac{5}{6} =$

f) $\frac{3}{4} \times -8 =$

g) $-\frac{5}{12} \times \frac{2}{9} =$

h) $3\frac{2}{5} \times 6 =$

¿De las multiplicaciones anteriores, en cuáles fueron recíprocos los factores de la operación?

2. Analiza y resuelve el siguiente problema:

En un grupo de 60 alumnos, la quinta parte reprobó español, de los cuales la mitad reprobaron también matemáticas. ¿Qué fracción representa el número de alumnos que reprobaron ambas materias? Utiliza la multiplicación de fracciones.

Compara tus resultados con los de tus compañeros(as) de grupo; si te equivocaste, corrige tus errores.

CLAVE:

1. a) $\frac{1}{5}$; b) $-\frac{4}{9}$; c) 1 ; d) $1\frac{1}{6}$; e) $-\frac{1}{6}$; f) -6 ; g) $\frac{5}{24}$; h) $20\frac{2}{5}$; 2. $\frac{1}{10}$

14

32-2

TRANSFORMA Y MULTIPLICA

Producto de fracciones decimales
Resolución de multiplicaciones con fracciones comunes y decimales combinadas

RECUERDA: Contesta en forma breve.

¿Cómo conviertes una fracción común en fracción decimal y viceversa?

$$\frac{5}{6} \times \frac{2}{4} = \qquad\qquad 1.3 \times 0.6 =$$

Los números se representan de diferente manera. El número cinco se puede escribir como 5.0 o también, $\frac{5}{1}$ o simplemente 5. ¿Será posible multiplicar números con diferente representación?

En los números naturales el producto es mayor que los factores, con excepción del cero y del uno; ¿pasa lo mismo cuando se multiplican fraccionarios? Explica.

Atiende al video e intenta dar respuesta a las interrogantes planteadas.

Lee individualmente el texto:

PRODUCTO DE FRACCIONES DECIMALES

Otra forma de representar una parte de un todo, además de las fracciones comunes, son las fracciones decimales.

Las fracciones decimales son aquellas cuyo denominador es 10 o una potencia de 10, como $\frac{3}{10}$, $\frac{8}{100}$, $\frac{5}{1000}$, etc.

Las fracciones decimales pueden ser escritas utilizando una notación específica:

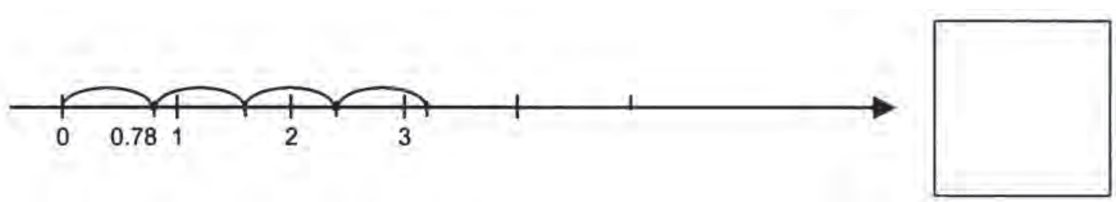
$\frac{3}{10} \times 0.3$; $\quad \frac{8}{100} = 0.08$; $\quad \frac{5}{1000} = 0.005$, etc.

La multiplicación de fracciones decimales se aplica con frecuencia en diferentes situaciones problemáticas:

¿Cuál es el perímetro de un corral cuadrangular que mide de lado 0.78 m?

El perímetro del corral es de 3.12 m

$0.78 + 0.78 + 0.78 + 0.78 = 3.12 \qquad 4 \times 0.78 = 3.12$ 0.78 m



Observa los ejemplos:

> **Para multiplicar números decimales se sigue un procedimiento similar al de multiplicar enteros y, al obtener el producto, se coloca el punto decimal contando las cifras de derecha a izquierda, de acuerdo con el número de cifras decimales que tengan en total los factores.**

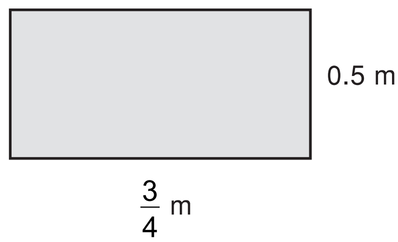
$0.3 \times 0.5 = 0.15 \qquad 1.4 \times 0.12 = 0.168$

$\frac{3}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{15}{100} \qquad \frac{14}{10} \times \frac{12}{100} = \frac{168}{1000}$

OPERACIONES CON FRACCIONES COMBINADAS

Las dos formas de representar una fracción, como fracción común o como fracción decimal, pueden ser combinadas para realizar con ellas operaciones.

Por ejemplo, calcular el área de la figura siguiente:



Ante esta situación es necesario plantear la multiplicación de una fracción común con una fracción decimal.

$$\frac{3}{4} \times 0.5$$

Para resolver este tipo de multiplicaciones puede procederse de dos maneras:

a) Hallar la expresión decimal de la fracción común y multiplicar las dos expresiones decimales: $\frac{3}{4} \times 0.5 = 0.75 \times 0.5$

b) Convertir la expresión decimal en fracción común y multiplicar ambas fracciones comunes: $\frac{3}{4} \times 0.5 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$

La multiplicación de fracciones comunes con decimales presentan dos casos.

1. Fracción común por expresión decimal sin parte entera.

Ejemplo: $\frac{3}{4} \times 0.5$

PROCEDIMIENTOS

Convirtiendo en fracciones comunes:

$\frac{3}{4} \times 0.5 =$

como $0.5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, entonces:

$\frac{3}{4} \times 0.5 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$

$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{3}{8}}$

Convirtiendo en expresiones decimales:

$\frac{3}{4} \times 0.5 =$

como $\frac{3}{4} = 0.75$, entonces:

$\frac{3}{4} \times 0.5 = 0.75 \times 0.5$

$0.75 \times 0.5 = \boxed{0.375}$

Cualquiera que sea el procedimiento utilizado, los resultados son equivalentes, esto es $\frac{3}{8} = 0.375$.

2. Fracción común por decimal con parte entera.

Ejemplo: $\frac{2}{4} \times -1.2$

PROCEDIMIENTOS

Convirtiendo en fracciones comunes:

$\frac{2}{4} \times -1.2 =$

como $-1.2 = -\frac{12}{10} = -\frac{6}{5}$ entonces:

$\frac{2}{4} \times -1.2 = \frac{2}{4} \times -\frac{6}{5}$

$\frac{2}{4} \times -\frac{6}{5} = -\frac{12}{20} = \boxed{-\frac{3}{5}}$

Convirtiendo en expresiones decimales:

$\frac{2}{4} \times -1.2 =$

como $\frac{2}{4} = 0.5$ entonces:

$\frac{2}{4} \times -1.2 = 0.5 \times -1.2$

$0.5 \times -1.2 = \boxed{-0.6}$

Los resultados son equivalentes

$$-\frac{3}{5} = -0.6$$

De los anteriores ejemplos puede concluirse:

Para multiplicar una fracción común y una expresión decimal, es necesario convertir los factores a una misma representación (fracción común o decimal) y utilizar los procedimientos correspondientes para encontrar el producto buscado.

Comenta con un compañero(a) las ideas principales; si tienes dudas, pregunta a tu profesor(a).

Reúnete con un grupo de trabajo de tres compañeros(as) y elaboren dos problemas que se resuelvan con multiplicación de fracciones combinadas.

Resuélvelos individualmente en tu cuaderno.

Posteriormente, revisa en equipo tus resultados; si no coinciden, rectifica tus procedimientos y, si es necesario, consulta con tu profesor(a).

Resuelve, en forma individual, los siguientes ejercicios:

1. Realiza las siguientes operaciones utilizando los dos procedimientos:

a) $\frac{3}{5} \times 0.3 =$ b) $2.6 \times \frac{1}{4} =$

2. En los espacios de la siguiente cuadrícula, escribe los productos de los números que aparecen en la columna de la izquierda multiplicados con los del renglón superior.

x	0.1	$\frac{4}{5}$	0.16	2.4	$\frac{6}{8}$
$\frac{1}{2}$					
1.3					
$\frac{2}{8}$					
$\frac{3}{6}$					
0.46					

Revisa tus resultados con los que dé el profesor(a). Utiliza tu calculadora para verificar cuando sean equivalentes.

15 EL QUE PARTE Y COMPARTE

33-2 División de fracciones comunes I
Establecimiento del concepto de división

Cuando repartimos un número entero de objetos entre un número de personas, la división resulta tan sencilla como cuando debes partir y repartir las tajadas de un pastel entre tus amigos.

Pero cuando se trata de repartir una fracción de algo entre un entero, o un entero entre una fracción o una fracción entre otra fracción, el cociente no es tan inmediato y quizá convenga sistematizar los procedimientos para aligerar los cálculos.

Con un compañero(a) pon a trabajar tu ingenio y comprensión matemática para resolver los siguientes ejercicios de calentamiento.

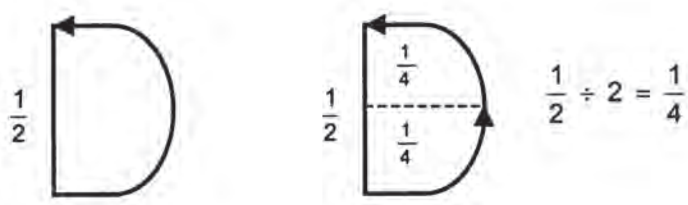
1. La mitad de un giro de media vuelta es...

Este cálculo se puede hacer de dos maneras:

a) $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ vuelta = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ vuelta = $\frac{1}{4}$ vuelta

¡La mitad de $\frac{1}{2}$ vuelta es $\frac{1}{4}$ de vuelta!

b) $\frac{1}{2}$ vuelta $\div$ 2; ¿cómo resolver $\frac{1}{2} \div 2$?

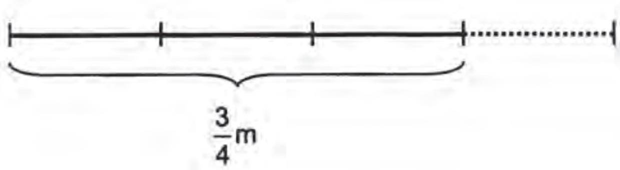


Observa que dividir entre 2 da lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{2}$ que es el inverso multiplicativo del divisor 2.

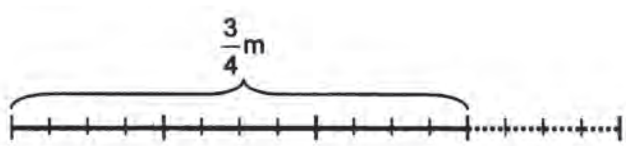
2. De un listón de longitud $\frac{3}{4}$ m se desean sacar 12 pedacitos; ¿cuál será la longitud de estos?

Resolvamos el problema en varios pasos:

a) Representemos el listón.

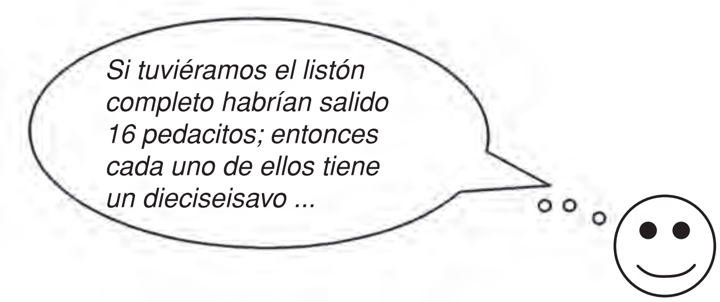


b) ¿Cuántos pedacitos de igual longitud se van a obtener?



12 pedacitos de igual longitud

¿Qué parte de la longitud del listón es la de un pedacito?



Según el gráfico cada pedacito tiene:

$$\frac{1}{16} \text{ m}$$

c) Si vuelves a leer el texto del problema, ¿cuál es la operación para resolverlo? Haz el planteamiento.

d) ¿Qué debes hacer para obtener $\frac{1}{16}$ a partir de $\frac{3}{4}$ y 12?

$$\frac{3}{4} \div 12 = \frac{1}{16} \text{ ¿Por qué?}$$

A continuación ampliarás tu comprensión al respecto.

Atiende el video y comenta con tu compañero(a), de al lado los aspectos más interesantes o los más difíciles.

Efectúa la lectura e intenta dar respuesta a las preguntas planteadas y, las dudas que tengas, consúltalas con tu profesor(a).

DIVISIONES DE FRACCIONES COMUNES I

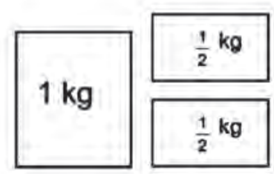
En ocasiones, hay necesidad de dividir una fracción común en varias partes para repartirlas, o ver cuántas veces cabe una parte en otra del entero. Situaciones como las anteriores requieren de una división de fracciones como las que se ejemplifican a continuación.

a) Con $\frac{5}{8}$ de litro de loción se llenan 10 frascos pequeños. ¿Cuál es la capacidad de cada frasco?

En este caso se reparten los $\frac{5}{8}$ l entre 10 frascos. $\frac{5}{8} \div 10 = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$

A cada frasco le cabe un $\frac{1}{16}$ l

b) ¿Cuántas bolsas de $\frac{1}{2}$ kg se pueden obtener de 5 bolsas de 1 kg?



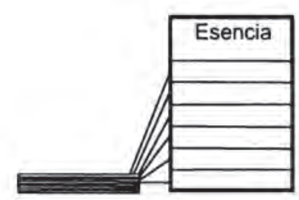
En esta situación deben partirse las 5 bolsas en medias partes.

$$5 \div \frac{1}{2} = 10$$

Pueden obtenerse 10 bolsas de $\frac{1}{2}$ kg. ¿Cómo se obtuvo el 10?

c) ¿Cuántas cajas de $\frac{1}{8}$ l de capacidad se necesitan para envasar $\frac{3}{4}$ l de esencia de frutas?

¿Cuántas veces cabe $\frac{1}{8}$ en $\frac{3}{4}$?



$\frac{1}{8}$ cabe 6 veces en $\frac{3}{4}$. ¿Cómo se obtuvo el 6?

Estos problemas también se pueden analizar al considerar que se resuelven mediante una multiplicación en la que no se conoce uno de los factores: este es uno de los significados de la división.

Si se tienen 6 cajas para envasar $\frac{3}{4}$ l de esencia de frutas, ¿cuál será la capacidad de cada caja?

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = 6 \quad \longrightarrow \quad 6 \times \boxed{} = \frac{3}{4} \quad \longrightarrow \quad 6 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{8} \div 10 = \frac{1}{16} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{16} \times \boxed{} = \frac{3}{5} \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{16} \times 10 = \frac{5}{8}$$

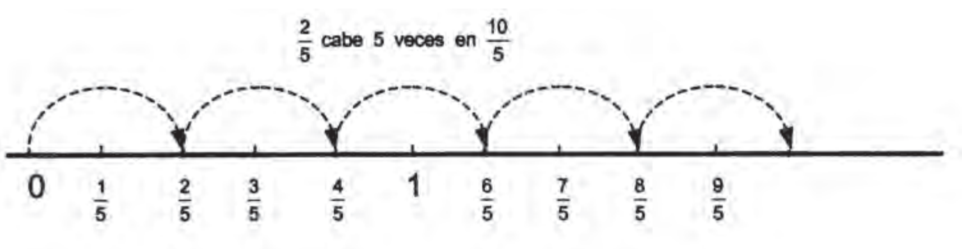
Dividir dos fracciones es buscar el número que multiplicado por el divisor sea igual al dividendo.

DIVISIÓN DE FRACCIONES CON IGUAL DENOMINADOR

a) ¿Cuántas cintas de $\frac{2}{5}$ m de listón se pueden obtener de $\frac{10}{5}$ m?

$$\frac{10}{5} \div \frac{2}{5} = 5$$

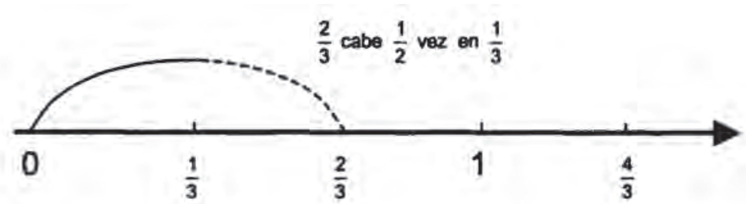
$$\frac{10}{5} = \frac{2}{5} \times 5$$



b) ¿Cuántas veces cabe $\frac{2}{3}$ en $\frac{1}{3}$?

$$\frac{1}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$$



Para dividir fracciones que tengan igual denominador se dividen los numeradores:

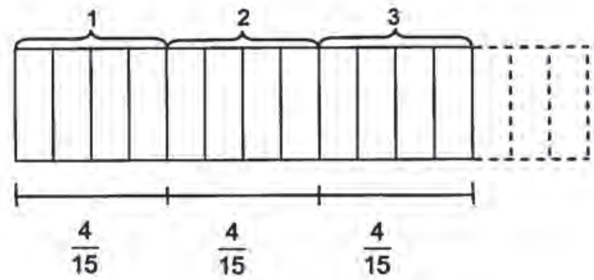
$\frac{15}{8} \div \frac{3}{8} = \frac{15}{3} = 5$ $\qquad$ $\frac{3}{8}$ cabe 5 veces en $\frac{15}{8}$

$\frac{2}{7} \div \frac{6}{7} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $\frac{6}{7}$ cabe $\frac{1}{3}$ de vez en $\frac{2}{7}$

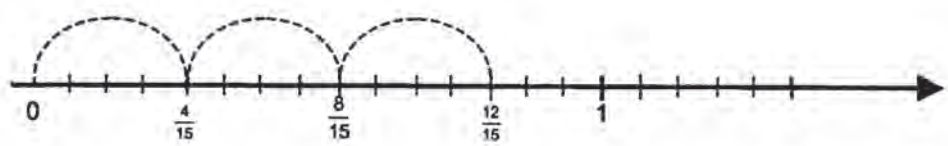
DIVISIÓN DE FRACCIONES ENTRE ENTEROS

Observa los ejemplos resueltos gráficamente.

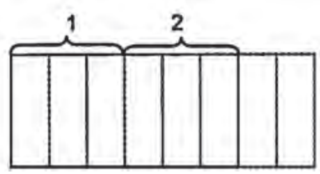
a) $\frac{12}{15} \div 3 = \frac{4}{15}$



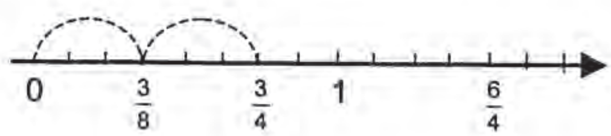
¿Cómo se divide $\frac{12}{15}$ entre 3? Obsérvese ahora en la recta numérica.



b) $\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8}$



¿Cómo se dividió $\frac{3}{4}$ entre 2? Obsérvese en la recta numérica.



DIVISIÓN DE FRACCIONES CON DIFERENTE DENOMINADOR

a) ¿Cuántas tinas cuya capacidad es de $\frac{3}{4}$ m^3 de agua, se pueden llenar con un tanque con una capacidad de $\frac{15}{8}$ m^3?

Piensa en la fracción que hace cierta la siguiente igualdad: $\frac{3}{4} \times \square = \frac{15}{8}$

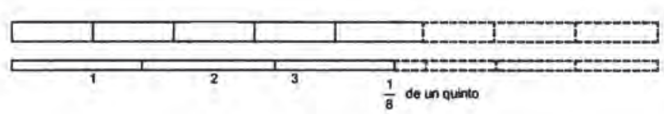
$$\frac{15}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{2} = 2.5 \qquad \text{porque} \qquad \frac{5}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{8}$$

Como 15 es divisible entre 3, y 8 es divisible entre 4, se pueden dividir directamente los numeradores y los denominadores. Por lo tanto se pueden llenar dos tinajas y media.

b) $\frac{18}{12} \div \frac{3}{4} = \frac{6}{3}$ porque $\frac{6}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{18}{12}$

¿Cuándo se pueden dividir, de manera directa, fracciones con diferente denominador? Sólo cuando el numerador y el denominador del dividendo sean divisibles entre el numerador y el denominador del divisor respectivamente.

c) ¿Cuántos pedazos de $\frac{1}{5}$ m de alambre se pueden cortar de un alambre de $\frac{5}{8}$ m?



En otras palabras: ¿Cuántos quintos me salen de $\frac{5}{8}$?

$\frac{1}{5} \times \boxed{} = \frac{5}{8}$ pista $\frac{5}{8} = \frac{25}{40}$

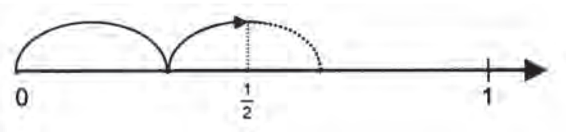
$$\frac{5}{8} \div \frac{1}{5} = \frac{25}{8}$$

$\frac{5}{8} \times 5 = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$ $\frac{1}{5}$ cabe $3\frac{1}{8}$ veces en $\frac{5}{8}$

$\frac{1}{5}$ y 5 son **inversos multiplicativos** o **recíprocos.**

d) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{3}$ cabe $1\frac{1}{2}$ veces en $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$



$\frac{1}{3}$ y 3 son **inversos multiplicativos** o **recíprocos.**

¿Puedes elaborar una conclusión general? ¡Discútelo!

Forma un equipo de trabajo, con dos compañeros(as) y resuelve en tu cuaderno los ejercicios dados a continuación:

Representa gráficamente, con dibujos o en la recta, las siguientes divisiones:

a) $\frac{15}{12} \div 3 =$ $\qquad$ b) $5 \div \frac{1}{4} =$

Muestra tus gráficas al maestro(a); si están mal, corrígelas.

Escribe individualmente el factor que falta en cada multiplicación y resuelve la división respectiva.

a) $\frac{20}{8} \div 4 =$ $\qquad$ $\frac{20}{8} = 4x \quad x =$

b) $9 \div \frac{1}{3} =$ $\qquad$ $9 = \frac{1}{3}x \quad x =$

Resuelve las divisiones de fracciones con igual denominador.

a) $\frac{16}{3} \div \frac{4}{3} =$ $\qquad$ b) $\frac{4}{12} \div \frac{3}{12} =$

Compara tus resultados con los de tu compañero(a) más cercano; corrige si es necesario.

Resuelve individualmente, en tu cuaderno, las divisiones y representa en la recta numérica la que desees.

a) $\frac{12}{15} \div 3$

b) $\frac{5}{6} \div 2$

c) $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$

d) $\frac{3}{4} \div \frac{1}{3}$

Intercambia tu cuaderno con un compañero(a) y revisa las respuestas de acuerdo con las soluciones que indique tu profesor(a).

16 NI FALTA NI SOBRA

34-2

División de fracciones comunes I
Aplicaciones del algoritmo de la división

RECUERDA: Representa gráficamente la siguiente división: $\frac{3}{5} \div 4$

Efectúa las divisiones y multiplicaciones:

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{2} = \qquad \frac{3}{4} \times 2 = \qquad \frac{2}{3} \div \frac{1}{4} = \qquad \frac{2}{3} \times 4 =$$

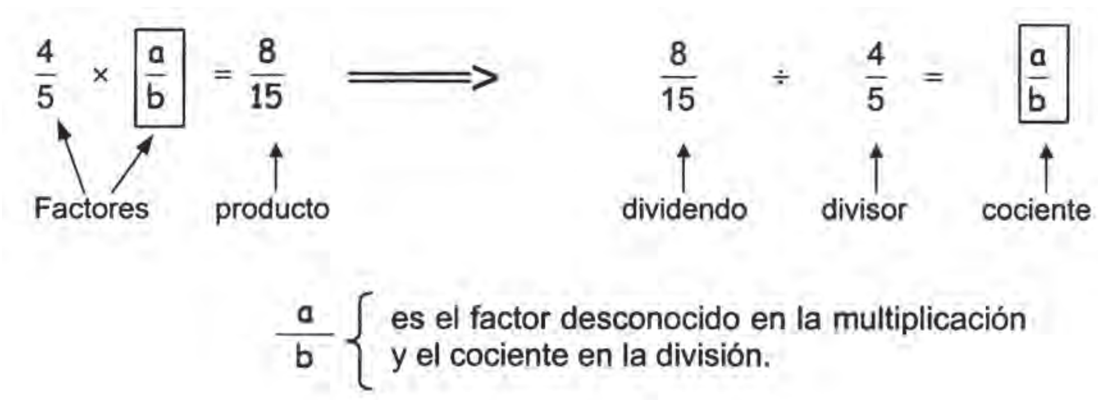
Cuando dividimos números naturales, hay ocasiones en que tenemos un residuo o sobrante. ¿Pasará lo mismo en la división de fracciones comunes? Realiza las siguientes actividades:

Atiende con interés el video. Reúnete con un compañero(a) y comenta los aspectos que consideres más relevantes.

Reunido con un compañero(a) lee el siguiente texto:

DIVISIÓN DE FRACCIONES COMUNES II

La división es la operación inversa a la multiplicación. Si se conoce uno de dos factores y su producto, es posible encontrar el factor desconocido (cociente) dividiendo el producto (dividendo) entre el factor conocido (divisor).



Para dividir dos fracciones es importante tener presente la definición de recíproco o inverso multiplicativo de una fracción.

Dos fracciones son recíprocas si su producto es uno.

$\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$ son recíprocas porque $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$

$\frac{5}{8}$ y $\frac{8}{5}$ son recíprocas porque $\frac{5}{8} \times \frac{8}{5} = \frac{40}{40} = 1$

Tomando en cuenta la idea de recíproco, se puede expresar una regla para efectuar la división de dos fracciones:

El cociente de una división de fracciones es el producto del dividendo por el recíproco del divisor.

Ejemplo:

$$\frac{8}{15} \div \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \times \frac{5}{4} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

Recíproco

En general: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ con $b,\ c,\ d \neq 0$

Con el ejemplo anterior se puede verificar la propiedad fundamental de una división exacta: **el producto del cociente por el divisor es igual al dividendo.**

$$\underset{D}{\frac{8}{15}} \div \underset{d}{\frac{4}{5}} = \underset{c}{\frac{2}{3}}$$

D = dividendo
d = divisor
c = cociente

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

$$\boxed{c \times d = D}$$

Una forma más simple y directa de resolver una división de fracciones es utilizando los **productos cruzados.**

El cociente de dos fracciones es otra fracción que tiene como numerador el producto del numerador del dividendo por el denominador del divisor, y cuyo denominador es el producto del denominador del dividendo por el numerador del divisor.

Ejemplo:

$$\frac{2}{5} \div \frac{7}{3} = \frac{6}{35}$$

NOTA: Puede observarse que utilizando los "productos cruzados" o la idea del recíproco, en esencia se resuelven las mismas mecanizaciones.

Ejemplo: Dividir $\frac{2}{7}$ entre 3

Aplicando el recíproco:

$$\frac{2}{7} \div \frac{3}{1} = \frac{2}{7} \times \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{21}}$$

Obsérvese que 3 se representa como fracción colocándole el número 1 como denominador. Utilizando productos cruzados:

$$\frac{2}{7} \div \frac{3}{1} = \boxed{\frac{2}{21}}$$

Casos importantes de la división de fracciones:

a) Cuando el dividendo es cero, el cociente es cero.

$$0 \div \frac{2}{5} = 0$$

b) Cuando el divisor es uno, el cociente es el mismo dividendo.

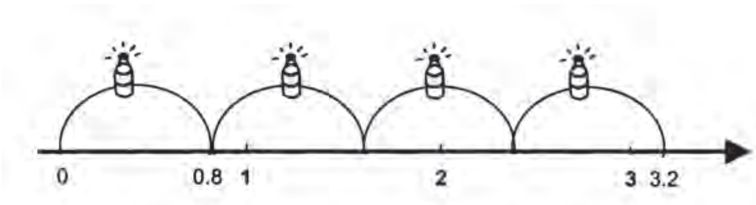
$$\frac{4}{6} \div 1 = \frac{4}{6}$$

c) La división entre cero **no es posible.**

Para dividir fracciones decimales el procedimiento es similar al que se utiliza para dividir enteros, pero el punto decimal se maneja de acuerdo con el orden de magnitud de los números decimales.

a) Se tiene un garrafón de 3.2 l de aceite. ¿Cuántas botellas de 0.8 l se pueden llenar?

$3.2 \div 0.8 = 4$



Se pueden llenar 4 botellas

$$\frac{32}{10} \div \frac{8}{10} = \frac{32}{8} = 4$$

b) $0.36 \div 0.18 = 2$

$$\frac{36}{100} \div \frac{18}{100} = \frac{36}{18} = 2$$

c) $0.125 \div 0.025 = 5$

$$\frac{125}{1000} \div \frac{25}{1000} = \frac{125}{25} = 5$$

Cuando las fracciones son del mismo orden, se puede borrar el punto y dividir los números como enteros.

d) $3.6 \div 0.12$ Como las fracciones son de diferente orden, se igualan cifras, utilizando la equivalencia de fracciones:

$3.6 \,\underline{\big|\, 0.12}$ es lo mismo que

$$\frac{36}{10} + \frac{12}{100} = \frac{360}{100} \div \frac{12}{100} = \frac{360}{12}$$

$360 \,\underline{\big|\, 12}$

LOS SIGNOS EN LA DIVISIÓN

En la división de fracciones con signo se aplican las mismas leyes de los signos que se utilizan con los números enteros:

$(+) \div (+) = +$ porque $(+) \cdot (+) = +$

$(-) \div (-) = +$ porque $(+) \cdot (-) = -$

$(+) \div (-) = -$ porque $(-) \cdot (-) = +$

$(-) \div (+) = -$ porque $(-) \cdot (+) = -$

Ejemplos:

$\frac{1}{3} \div 2 = \frac{1}{6}$ porque $\frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{3}$

$-0.25 \div -0.5 = 0.5$ porque $0.5 \times -0.5 = -0.25$

$3 \div -\frac{2}{5} = -\frac{15}{2}$ porque $-\frac{15}{2} \times -\frac{2}{5} = \frac{30}{10} = 3$

$-7.5 \div 1.5 = -5$ porque $-5 \times 1.5 = -7.5$

Forma un equipo de trabajo con dos compañeros(as) y contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Siempre es posible dividir dos fracciones comunes?

2. ¿Es exacta la división de fracciones comunes? ¿Por qué?

3. ¿Cuándo se dice que dos fracciones son recíprocas?

4. Escribe y ejemplifica los casos importantes de la división de fracciones.

5. ¿Es posible dividir entre cero? ¿Por qué?

Organicen una plenaria para discutir sus respuestas; el profesor(a) indicará los posibles errores y se llegará a conclusiones razonables.

En forma individual, justifica cada paso en la forma como se resolvieron las siguientes divisiones:

a) $\frac{8}{3} \div 6 = \frac{8}{3} \div \frac{6}{1} = \frac{8}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{8}{18} = \boxed{\frac{4}{9}}$

b) $\frac{3}{6} \div \frac{5}{4} = \frac{12}{30} = \boxed{\frac{2}{5}}$

Intercambia tu cuaderno con un compañer(a) y revisa las respuestas de acuerdo con las indicaciones que de tu profesor(a). Corrige lo necesario.

En forma individual, completa en tu cuaderno el cuadro siguiente, escribiendo en los espacios los cocientes de los números de la columna de la izquierda entre los números del renglón superior.

Divisores

+	1.5	−1.25	−9	0.125
4.5				
−12.15				

DIVIDENDOS

DIVISORES

+	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{4}{5}$	−5
$\frac{4}{6}$					
$\frac{8}{12}$					
−6					
$\frac{9}{6}$					
$\frac{15}{6}$					

Verifica tus resultados con los que indique tu profesor. En caso de error, modifícalos.

17 RESUÉLVELOS TÚ MISMO

35-2

Problemas con operaciones donde intervienen fracciones y decimales
Aplicación de los algoritmos respectivos en la solución de problemas

La capacidad de usar la información es más importante que el simple hecho de poseerla. En esta sesión tendrás oportunidad de demostrar la capacidad que tienes para aplicar los conocimientos adquiridos en la resolución de problemas. ¡Vas a mostrar tus competencias¡

Observa el video; en él encontrarás algunas sugerencias para resolver problemas con fracciones.

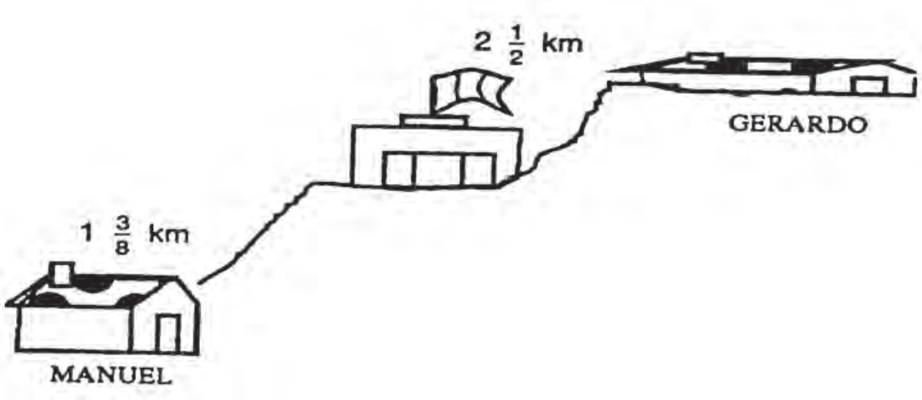
Comenta en forma breve lo más importante de la sesión.

Reúnete con dos compañeros(as) para formar una terna y resuelvan lo que se les indica.

1. Relaciona ambas columnas escribiendo dentro del paréntesis la letra que corresponda.

a) Se utiliza para encontrar el mínimo común denominador	( ) producto de fracciones comunes
b) Se obtiene al multiplicar numeradores con numeradores y denominadores con denominadores	( ) común denominador
c) Es necesario encontrarlo para resolver una adición o sustracción de fracciones comunes con diferente denominador	( ) mcm
d) Deben hacerse conversiones cuando se trabaja con fracciones comunes y decimales para obtener	( ) fracciones del mismo tipo

2. Para el siguiente dibujo escribe un problema y resuélvelo.



Compara tus respuestas con las de otra terna; si hay diferencias, coméntalas y en caso de errores, corrígelos.

Resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas.

a) Calcula los kilómetros que recorrió un ciclista en tres etapas: en la primera recorrió $15\frac{3}{4}$km; en la segunda, $12\frac{2}{8}$km y en la tercera $18\frac{2}{8}$km.

b) Un alumno del grupo pesaba $52\frac{3}{7}$ kg al principio del curso, y ha perdido $5\frac{2}{3}$ kg. ¿Cuánto pesa actualmente?

c) Ángel comió $\frac{3}{8}$ de $\frac{1}{2}$ pastel de fresa. ¿Qué parte del pastel comió?

d) Un kilómetro es aproximadamente $\frac{5}{8}$ de una milla. ¿Cuántos kilómetros hay en $\frac{6}{4}$ de milla?

¿Terminaste? ¡Muy bien! Espera las indicaciones de tu profesor(a) para evaluar lo que realizaste. Recuerda que esto te servirá para detectar tus fallas.

CLAVE

a) $46\frac{1}{4}$ km; b) $46\frac{16}{21}$ kg; c) $\frac{3}{16}$; d) $2\frac{2}{5}$ km

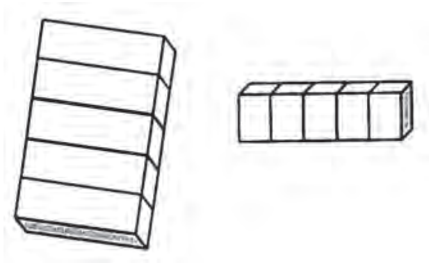
18 LLEGA A LA RAÍZ

13-3

Potenciación y radicación de fraccionarios
Obtención de la potencia y raíz cuadrada de fraccionarios

Con tu compañero(a) de al lado vas a recordar algunos aspectos importantes de la potenciación y de las operaciones entre potencias. Trabaja en tu cuaderno o resuelve las preguntas planteadas, en forma oral.

1. En una caja hay 5 estuches que tienen, cada uno 5 bolsas y éstas a su vez contienen 5 jabones. ¿Cuántos jabones en total hay en la caja?



Datos		Como potencia
5 estuches	__________	5^1
(5×5) bolsas	__________	
$(5 \times 5 \times 5)$ jabones	__________	
En total hay	__________	jabones

2. En la expresiones $5^3 = 125$, ¿qué nombre recibe cada uno de los términos?

5 es __________; 3 es __________; 125 es __________

3. Determina la potencia indicada, considerando los factores dados.

a) $\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) =$

b) $(0.2)\ (0.2)\ (0.2)\ (0.2) =$

4. Escribe la potencia de:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 =$ b) $(0.2)^4$

5. Verifica si:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \stackrel{?}{=} \frac{2^3}{3^3}$ b) $\left(\frac{5}{4}\right)^2 \stackrel{?}{=} \frac{5^2}{4^2}$

¿Puedes elaborar alguna conclusión?

6. Da en forma de potencia el resultado de:

$5^3\ \ 5^4$ $3^7 \div 3^4$ $3^4 \div 3^7$ $7^{-3}\ \ 7^5$

$x^m\ \ x^m$ $x^m \div x^m$ $a^m \div a^m$ $(p^2)^3$

7. ¿Por qué cualquier número, diferente de cero, elevado a la potencia cero, es igual a 1? ¡Explícalo desde la división de potencias de igual base!

8. a) Escribe 3 números que sean potencias de 10 y cuyo valor sea mayor que 1.

b) Escribe 3 números que sean potencias de 10 y cuyo valor sea menor que 1.

c) ¿Cuál es el valor de 101?

d) ¿Cuál es el valor de 100?

9. Encuentra las siguientes raíces:

a) $\sqrt{81}$; b) $\sqrt{100}$; c) $\sqrt{25}$; d) $\sqrt{64}$

e) $\sqrt{144}$; f) $\sqrt{49}$; g) $\sqrt{9}$; h) $\sqrt{1600}$

10. Utiliza las respuestas del numeral anterior para verificar si:

a) $\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{9}} \stackrel{?}{=} \sqrt{\dfrac{81}{9}}$

c) $\dfrac{\sqrt{144}}{\sqrt{16}} \stackrel{?}{=} \sqrt{\dfrac{144}{16}}$

b) $\dfrac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} \stackrel{?}{=} \sqrt{\dfrac{100}{25}}$

d) $\dfrac{\sqrt{1600}}{\sqrt{64}} \stackrel{?}{=} \sqrt{\dfrac{1600}{64}}$

¿Alguna dificultad? Analiza esta pista:

$$\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} \stackrel{?}{=} \sqrt{\frac{36}{9}}$$

Apliquemos lo que ya sabemos.

$$\sqrt{36} = 6 \text{ y } \sqrt{9} = 3 \Rightarrow \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{36}{9} = 36 \div 9 = 4 \Rightarrow \sqrt{\frac{36}{9}} = \sqrt{4} = 2$$

¿Puedes sacar alguna conclusión?

Las dificultades que hayas encontrado anótalas y vuélvelas a mirar después del video y de la lectura.

Observa el video, pues brinda información sobre la potencia y raíz cuadrada de fracciones. Comenta con tus compañeros(as) la idea principal.

Reúnete con un compañero(a) y lee el texto que viene a continuación. Después comenta con tus compañeros(as) en qué consiste la potenciación y la radicación de fracciones y revisa los ejercicios anteriores.

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN DE FRACCIONES

Al elevar un número al cuadrado y extraerle la raíz cuadrada, el resultado es el mismo número. Esto sucede porque la potenciación y la radicación son operaciones inversas.

Potenciación

Un problema que se puede resolver con ayuda de la potenciación es el siguiente:

¿Cuál es el total de dulces en una caja que contiene 50 bolsas con 50 dulces cada una?

Este problema puede solucionarse por medio de una multiplicación:

$$50 \times 50 = 2\,500$$

La cual se puede expresar como una potencia, esto es:

$$50^2 = 2\,500$$

La caja tiene 2 500 dulces

Recuerda que la potenciación es una operación en la cual interviene la multiplicación.

Obsérvense los siguientes ejemplos:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^4 = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{625}$

b) $(0.3)^3 = (0.3)(0.3)(0.3) = 0.027$

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \left(+\frac{16}{9}\right)$

d) $(-0.25)^3 = (-0.25)(-0.25)(-0.25) = -0.015625$

La potenciación consiste en tomar la base como factor tantas veces como lo indique el exponente.

A continuación se da una serie de cuadrados de algunos números.

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$30^2 = 9\,00$	$(0.1)^2 = 0.01$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	$40^2 = 1\,600$	$(0.2)^2 = 0.04$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$50^2 = 2\,500$	$(0.3)^2 = 0.09$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	$60^2 = 3\,600$	$(0.4)^2 = 0.16$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	$70^2 = 4\,900$	$(0.5)^2 = 0.25$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$80^2 = 6\,400$	$(0.6)^2 = 0.36$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$90^2 = 8\,100$	$(0.7)^2 = 0.49$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	$100^2 = 10\,000$	$(0.8)^2 = 0.64$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$		$(0.9)^2 = 0.81$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$		

Radicación

Una operación inversa de la potencia al cuadrado es la raíz cuadrada.

Obsérvese el siguiente problema:

- Un albañil tiene 169 mosaicos para cubrir una superficie de forma cuadrada. ¿Cuántos mosaicos tendrá el cuadrado de lado?

Este problema se resuelve extrayendo raíz cuadrada a 169. Buscando en la tabla de cuadrados se observa que:

$$13^2 = 169$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{169} = 13$$

Así, el lado del cuadrado tendrá de 13 mosaicos.

La raíz cuadrada es una operación inversa a la de elevar al cuadrado, y consiste en buscar un número que multiplicado por sí mismo dé el número dado.

El cálculo de la raíz cuadrada puede realizarse por varios métodos; en este caso se hará con ayuda de la tabla de cuadrados.

Ejemplo:

$$\sqrt{6\,400}$$

Se localiza en la tabla el número que elevado al cuadrado dé como resultado ese número. Dicho número es la raíz cuadrada:

$\sqrt{6\,400}\;\underline{|\,80}$ Como $80^2 = 6\,400$. Pero también $-80^2 = 6\,400$

Se puede concluir que:

$$\sqrt{6\,400}\;\underline{|\,80} \quad y \quad \sqrt{6\,400}\;\underline{|\,-80}$$

En algunas ocasiones es necesario buscar la raíz cuadrada de fracciones comunes.

Para calcular la raíz cuadrada de una fracción común, se calcula la raíz cuadrada del numerador y después la del denominador. Si éstas no son exactas se dejan indicadas.

Ejemplos:

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}}$$

Se busca en la tabla de cuadrados qué números elevados al cuadrado dan como resultado 9 y 25:

$$3^2 = 9 \quad y \quad 5^2 = 25$$

Por lo tanto:

$$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}\text{. Asimismo, } \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Ejemplo 2:

$$\sqrt{\frac{35}{64}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{64}}$$

Se localizan en la tabla de cuadrados los números que elevados al cuadrado den como resultado 35 y 64. Como en la tabla sólo se localiza:

$$8^2 = 64$$

La solución será:

$$\sqrt{\frac{35}{64}} = \frac{\sqrt{35}}{\sqrt{64}} = \frac{\sqrt{35}}{8} \quad \text{y} \quad \frac{\sqrt{35}}{8}$$

Dejando indicada $\sqrt{35}$ ya que es una raíz inexacta.

El cálculo de la raíz cuadrada tiene otros métodos de resolución que se estudiarán en sesiones posteriores.

Realiza con un compañero(a) los siguientes ejercicios.

1. Determina la potencia indicada, considerando los factores dados.

a) $\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{7}{4}\right)\left(\frac{7}{4}\right)\left(\frac{7}{5}\right)\left(\frac{7}{5}\right) =$

b) $(3.15)\ (3.15)\ (3.15) =$

2. Escribe la potencia de:

a) $(0.5)^3 =$ b) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^4 =$ c) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 =$

Con ayuda de la tabla de cuadrados encuentra las siguientes raíces.

a) $\sqrt{1600} =$ b) $\sqrt{\dfrac{81}{121}} =$ c) $\sqrt{\dfrac{36}{49}} =$

Individualmente realiza las siguientes operaciones.

1. $0.3^2 =$

2. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$

3. $\sqrt{\dfrac{16}{36}} =$

4. $\sqrt{\dfrac{18}{100}} =$

Compara con la clave de tus respuestas. Si son incorrectas, corrígelas.

CLAVE

1. 0.09 ; 2. $\dfrac{8}{27}$; 3. $\dfrac{4}{6}$; 4. $\dfrac{\sqrt{18}}{10}$

19 COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

14-3 Repaso parcial de los conocimientos adquiridos Integración de los conocimientos adquiridos

Al avanzar en el estudio de los temas que integran un núcleo, a veces parece ser muy poco lo que se ha estudiado. Pero al hacer una revisión de lo que ha quedado atrás, se ve que no es así.

Observa el video. Al hacerlo vendrán a tu mente conocimientos que has adquirido durante el desarrollo de este núcleo. Después comenta con dos compañeros los temas tratados.

Intégrate a un equipo de trabajo para que resuelvas los siguientes ejercicios. Puedes usar tu calculadora cuando sea conveniente, o para verificar tus resultados.

a) $-1.3 + 2\frac{1}{4} =$

b) $\frac{2}{3} - \left(-\frac{6}{8}\right) =$

c) $(0.81)^2$

d) $\left(\frac{3}{7}\right)^3 =$

e) $\left(-1\frac{2}{5}\right)^2 =$

f) $\sqrt{\frac{81}{121}} =$

g) $\frac{169}{289} =$

h) $\sqrt{\frac{17}{16}} =$

De manera individual, resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno. Puedes usar tu calculadora para realizar las operaciones necesarias y comprobar.

i) Un boticario tiene dos recipientes que contienen, cada uno, $19\frac{3}{8}\,l$ de aceite de almendras y debe distribuirlo en envases de 0.4 l. ¿Cuántos envases puede llenar exactamente y qué cantidad de aceite le sobra?

j) Un marchista recorre $6\frac{1}{2}$ km el lunes, $8\frac{5}{7}$ km el martes, 10 km el miércoles y $\frac{3}{7}$ de km el jueves; ¿cuánto ha recorrido en los cuatro días?

k) Tenía $350 000 de los cuales perdí $\frac{2}{5}$ partes y presté $\frac{2}{7}$; ¿qué cantidad me queda?

l) Una escuela tiene una población estudiantil de 175 alumnos, de los cuales $\frac{7}{25}$ son mujeres; ¿cuántos hombres hay?

m) ¿Cuál es el número cuyo cuadrado equivale a los $\frac{3}{4}$ de 12?

Compara tus resultados con los de la clave que se da enseguida. Si no coinciden, revisa el procedimiento y en caso de encontrar errores, corrígelos.

CLAVE

a) $\frac{19}{20}$ ó 0.95

b) $\frac{34}{24} = 1\frac{10}{24}$

c) 0.6561

d) $\frac{27}{343}$ ó 0.08

e) $\frac{49}{25} = 1\frac{24}{25}$

f) $\sqrt{\frac{81}{121}} = \frac{9}{11}$; $\sqrt{\frac{81}{121}} = -\frac{9}{11}$

g) $\sqrt{\frac{169}{289}} = \frac{13}{17}$; $\sqrt{\frac{169}{289}} = -\frac{13}{17}$

h) $\sqrt{\frac{17}{16}} = +\frac{\sqrt{17}}{4}$; $\sqrt{\frac{17}{16}} = -\frac{\sqrt{17}}{4}$

i) Se pueden llenar 96 envases y sobra 0.875 l

j) $25\frac{9}{14}$ km

k) $ 110 000

l) 126 hombres

m) 3

20 ENSAYO Y ERROR

15-3

Raíz cuadrada por tanteo
Obtención de la raíz cuadrada de números racionales por tanteo sistemático

¿Has calculado operaciones mentalmente? El cálculo mental te agiliza la mente y puedes actuar con rapidez en una situación determinada. Observa el video, pues mostrará qué es la raíz cuadrada de un número. Al finalizar, comenta con tus compañeros(as) por qué se considera la raíz cuadrada como la operación inversa a elevar al cuadrado un número.

Lee en la forma que indique el profesor(a) el texto que sigue.

RAÍZ CUADRADA POR TANTEO

Algunas operaciones matemáticas se han conocido desde la antigüedad. Un ejemplo de ellas es la radicación misma que el pueblo hindú ya conocía, aunque los árabes la difundieron por el mundo.

La raíz cuadrada es la operación inversa de la potenciación al cuadrado. En esa operación se conoce la potencia y el exponente, pero se busca la base. Consta de los siguientes elementos:

Índice →

radical → $\sqrt[2]{a} = b$ ← raíz

↑

radicando

Cuando el índice se omite se está indicando que es una raíz cuadrada.

Al calcular las raíces cuadradas de un número, se buscan dos valores que al multiplicarse por sí mismos, den un producto que sea igual al número dado.

Obsérvese el siguiente ejercicio:

- Calcula las raíces cuadradas de 25.

Al buscar un número que multiplicado por sí mismo dé como resultado 25 se tiene que:

$1 \times 1 = 1$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$, $4 \times 4 = 16$, $5 \times 5 = 25$; por lo tanto la raíz de 25 es 5:

$$\sqrt{25} = 5 \text{ porque } 5 \times 5 = 25$$

Pero existe también otra pareja de números que al multiplicarse da como producto 25, éstos son:

$$(-5)\ (-5) = 25$$

Ya que al multiplicar dos números negativos el resultado es un número positivo.

Se puede observar que 25 tiene dos raíces: una positiva y una negativa.

$$\sqrt{25} = 5 \quad y \quad \sqrt{25} = -5$$

Esta situación se presenta para todo número racional positivo. Lo cual se representa a continuación:

$\sqrt{a} = b$ donde una de las raíces de **a** es **b** positiva y otra **b** negativa.

$$\sqrt{a} = b \quad y \quad \sqrt{a} = -b$$

Es posible calcular las raíces de un número observando en la tabla de cuadrados su raíz. Si no es exacta, se podrá estimar al obtener las dos raíces más próximas a él.

Ejemplo: calcula las raíces de 78.

Para hacer el cálculo de esas raíces se utiliza la siguiente tabla:

$1^2 = 1$	$20^2 = 121$
$2^2 = 4$	$30^2 = 144$
$3^2 = 9$	$40^2 = 169$
$4^2 = 16$	$50^2 = 196$
$5^2 = 25$	$60^2 = 225$
$6^2 = 36$	$70^2 = 256$
$7^2 = 49$	$80^2 = 289$
$8^2 = 64$	$90^2 = 324$
$9^2 = 81$	$100^2 = 361$
$10^2 = 100$	

Se puede observar que:

$$8^2 = 64 \quad y \quad 9^2 = 81$$

Por lo tanto, la raíz de 78 se encuentra entre 8 y 9. Para aproximar a décimos tómese el valor de 8.5

$$8.5 \times 8.5 = 72.25$$

Como al elevar 8.5 al cuadrado, el valor restante es menor que la cantidad original, se toman valores mayores a él que no sean ni iguales ni mayores que 9.

$$8.6^2 = 73.96$$
$$8.7^2 = 75.69$$
$$8.8^2 = 77.44$$

$$8.9^2 = 79.21$$

La raíz que se aproxima más es 8.8; por lo tanto, resulta que:

$$\sqrt{78} = \pm 8.8$$

Si se quiere aproximar a centésimos o milésimos, se continúa con el mismo procedimiento.

Obténganse ahora las raíces de 1 256. Consultando la tabla se pueden observar los valores mayor y menor.

$$30^2 = 900 \quad y \quad 40^2 = 1\,600$$

Ahora se toman valores intermedios.

$$35^2 = 1\,225 \quad y \quad 36^2 = 1\,296$$

Por lo que se puede concluir que las raíces cuadradas aproximadas de 1 256 son:

$$\sqrt{1256} = 35 \quad y \quad \sqrt{1256} = -35$$

Si se desea aproximar a decimales, se realiza el procedimiento anterior hasta obtener la aproximación deseada:

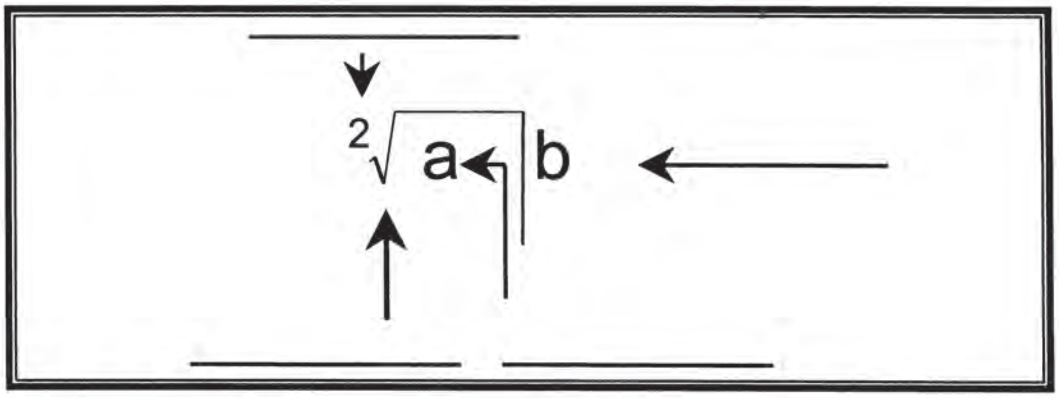
Para calcular la raíz de una fracción común se buscan las raíces de su numerador y denominador. Las fracciones resultantes serán las raíces.

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} \;; = \sqrt{9} = 3 \quad y \quad \sqrt{16} = 4$$

Por lo tanto

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} \quad y \quad \sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{3}{4}$$

Existen otros métodos con los cuales se pueden calcular las raíces cuadradas de un número, pero llevarlo a cabo por tanteo ayuda a desarrollar el cálculo mental, haciendo también más rápida la resolución de problemas.



Reúnete con un compañero(a) y contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son los elementos de la radicación? Anótalos aquí:

b) ¿Qué se busca al calcular la raíz cuadrada de un número?

c) ¿Por qué la radicación es la operación inversa de la potenciación?

d) ¿Cuáles raíces cuadradas tiene un número y cómo son?

e) ¿Por qué una de las raíces tiene un valor negativo?

f) ¿Cómo se calcula la raíz cuadrada de una fracción?

g) ¿Conoces algún método para calcular la raíz cuadrada de un número? ¿Cuál?

Lee en voz alta tus respuestas y compáralas con las de tus compañeros(as). Si hay errores, corrígelos.

Con tu compañero(a), resuelve los siguientes ejercicios.

1. Obtén la raíz cuadrada de 60. Antes consulta la tabla de cuadrados.

a) ¿Qué cuadrados están cerca del valor buscado?

b) Tomando el valor menor puedes saber la raíz de 60, pero todo número tiene dos raíces (una positiva y otra negativa) podemos afirmar que:

$$\sqrt{60} = \underline{\ ?\ } \quad \text{y} \quad \sqrt{60} = \underline{\ ?\ }$$

c) Para encontrar la parte decimal de la raíz, se toma la fracción decimal intermedia y se eleva al cuadrado para observar si se acerca al número buscado. Hazlo.

d) Si la potencia no es cercana al número original, se hacen nuevos intentos. Hazlos.

e) ¿Cuáles son las dos raíces de 60 aproximando hasta décimos?

2. Calcula la raíz cuadrada de 2 532 consultando la tabla.

a) ¿Cuáles son los cuadrados que se aproximan a este resultado?

b) Realiza ensayos que aproximen el resultado.

c) ¿Cuáles son las raíces de 2 532?

La ejercitación de estas operaciones te ayudará a aproximar el resultado con menos ensayos.

Compara tus resultados con los de tus compañeros(as). Si hay errores, corrige.

Resuelve de manera individual las siguientes raíces. Si es necesario consulta la tabla y sigue los pasos correspondientes señalados en los ejercicios 1 y 2 para aproximar hasta décimos.

1. $\sqrt{30}$ **2.** $\sqrt{872}$ **3.** $\sqrt{\dfrac{25}{100}}$

Compara tus resultados con los de otros compañeros(as) y corrige los errores.

CLAVE:

1. ± 5.4 **2.** ± 29.5 **3.** $\pm \dfrac{5}{10}$

21

16-3

CERCA DE LA SOLUCIÓN

Raíz cuadrada por interpolación
Cálculo de la raíz cuadrada de racionales por interpolación

La noción de raíz cuadrada es muy antigua y los métodos que se han aplicado para su resolución son muy diversos. Esta sesión te servirá para conocer uno de ellos. Observa el video; en él se mostrará el método de interpolación. Comenta qué métodos conoces para calcular la raíz cuadrada de un número.

Lee con un compañero(a).

RAÍZ CUADRADA POR INTERPOLACIÓN

Además del método de tanteo sistemático se pueden calcular las raíces cuadradas de un número por otros métodos; uno de ellos es el de interpolación.

Este método es muy sencillo y consiste en calcular las raíces de un número, tomando en cuenta dos valores cercanos, uno mayor y otro menor, y estableciendo de acuerdo con esos datos una proporción.

Obsérvese el siguiente ejemplo:

- Calcular las raíces cuadradas de 7 508.

Se buscan en la tabla de cuadrados los valores mayor y menor cercanos a ese número.

$$80^2 = 6\,400 \qquad 90^2 = 8\,100$$

Se observa que las raíces oscilan entre 80 y 90. Ahora sólo falta encontrar un valor más próximo. Para ello, se restan las bases encontradas y sus potencias.

$$\begin{array}{rcrcr} 90 & - & 80 & = & 10 \\ 8\,100 & - & 6\,400 & = & 1\,700 \end{array}$$

De donde se obtiene la razón:

$$\frac{10}{1700}$$

La segunda razón se encuentra restándole la menor potencia encontrada al número del cual se busca la raíz.

$$7\,508 - 6\,400 = 1\,108$$

Este número se anota como consecuente de la segunda razón; el antecedente es el número buscado y se señala con la letra **x** ya que es el valor que se desconoce:

$$\frac{x}{1108}$$

Con esto se puede establecer la proporción:

$$\frac{10}{1700} = \frac{x}{1108}$$

Ahora es posible encontrar el valor de **x** aplicando la ley fundamental de las proporciones.

$$x = \frac{1108 \times 10}{1700} = 6.51$$

Por lo tanto **x** = 6.51; este valor se suma a la base menor.

$$80 + 6.51 = 86.51$$

Por lo tanto la raíz cuadrada aproximada de 7 508 es 86.51

$$\sqrt{7508} \approx \underline{86.51} \quad \text{y} \quad \sqrt{7508} \approx -\underline{86.51}$$

El símbolo $\approx$ se lee “aproximadamente”.

Reúnete en equipo y llena en tu cuaderno el siguiente diagrama con los pasos que se siguen en el cálculo de raíces por interpolación.

Revisa tus resultados y compáralos con los de otros equipos. Discute las diferencias y corrige los errores.

Obtener las raíces de 876. Se buscan en la tabla las dos raíces cercanas a 876 (la mayor y la menor)

Se restan por separado las bases encontradas y sus potencias

Con lo cual se obtiene la razón:

Se resta a 876 la menor potencia encontrada

De donde resulta la razón:

X

Igualando las dos razones se obtiene la proporción:

=

Encontrando el valor x resulta:

x =

Y se suma la raíz menor. Por lo tanto:

$\sqrt{876} \approx$ ____ y $\sqrt{876} \approx$ ____

Realiza el siguiente ejercicio en tu cuaderno con un compañero(a). Para su resolución sigue los pasos señalados en el diagrama anterior.

1. $\sqrt{52}$ ____________ **2.** $\sqrt{3\,527}$ ____________

Comprueba con la calculadora tus resultados. Recuerda que este método sólo te da una aproximación del resultado. Consulta la clave para que compares tus respuestas. Si hay errores, revisa tus procedimientos y corrígelos.

CLAVE:

1. $\pm$ 7.2 **2.** $\pm$ 59.3

22 RAÍCES BABILÓNICAS

17-3

Raíz cuadrada por el método babilónico
Manejo del método babilónico para calcular la raíz cuadrada

Para calcular la raíz cuadrada de un número, existe un procedimiento sencillo que emplea las áreas del rectángulo y el cuadrado; este método geométrico se llama babilónico.

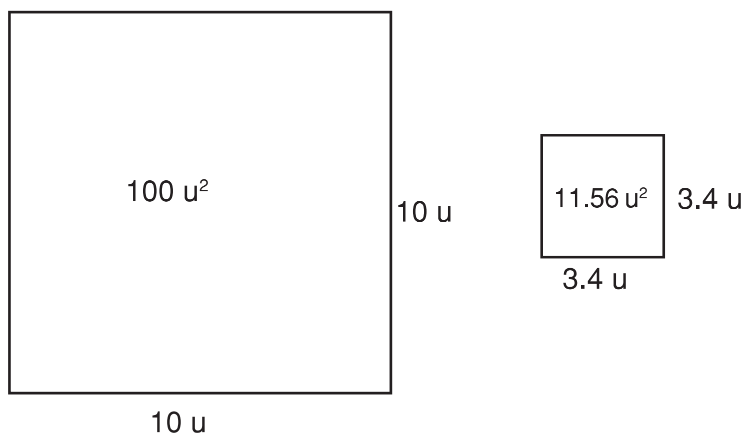
Observa atentamente el video e intercambia con tus compañeros(as) y el maestro opiniones acerca de la idea principal.

Lee individualmente.

RAÍZ CUADRADA POR EL MÉTODO BABILÓNICO

Es conveniente conocer los diversos métodos para resolver una operación. De esta manera aumentan las posibilidades de tener éxito en su resolución; en esta sesión se presenta un procedimiento más para calcular las raíces cuadradas de un número, el **método babilónico.**

Las expresiones $\sqrt{100}\,\big|\,\underline{10}$ y $\sqrt{11.56}\,\big|\,\underline{3.4}$ se puede representar geométricamente mediante cuadrados con áreas de 100 u^2 y 11.56 u^2 cuyos lados miden 10 u y 3.4 u, respectivamente.



$\sqrt{100}\,\big|\,\underline{10}$

$\sqrt{11.56}\,\big|\,\underline{3.4}$

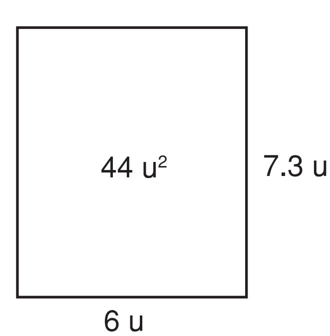
Para calcular la raíz de un número mediante el método babilónico se construye una sucesión de rectángulos cuyas áreas correspondan a la medida a la cual se le va a extraer la raíz cuadrada, siendo los lados cada vez más parecidos entre sí. Por lo tanto, los rectángulos serán cada vez más semejantes a un cuadrado, y la medida de sus lados se aproximará más a la raíz buscada.

Ejemplos:

a) Calcular la raíz cuadrada de 44.

Se elige un valor para la longitud de uno de los lados del primer rectángulo. Este valor debe ser cercano a la raíz de 44 (en este caso 6). Como el área del rectángulo es 44 y su base es 6, su altura será:

$$\frac{44}{6} = 7.3 \text{ u}$$



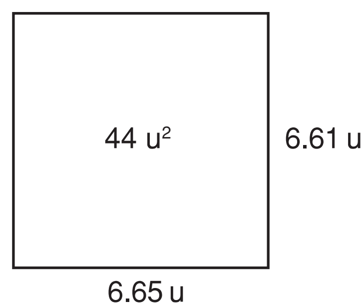
Para obtener un rectángulo de lados más parecidos entre sí se construye otro cuya base sea el promedio de las medidas de la base y la altura del rectángulo anterior.

El promedio de las medidas de la base y la altura del rectángulo anterior es:

$$\frac{6 + 7.3}{2} = \frac{13.3}{2} = 6.65$$

Este valor (6.65) será la base del nuevo recqáûgulo. Como el área del rectángulo sigue siendo la misma, entonces la altura es:

$$\frac{44}{6.65} = 6.61 \text{ u}$$



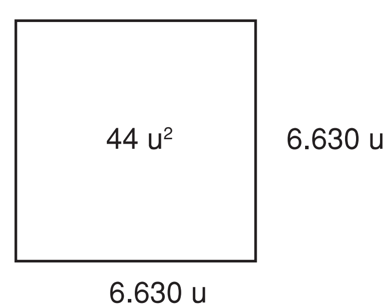
Para la base del siguiente rectángulo, nuevamente se calcula el promedio de la base y la altura del anterior.

$$\frac{6.65 + 6.61}{2} = 6.630 \text{ u}$$

La base del nuevo rectángulo es 6.63 u.

El área sigue siendo la misma, por lo tanto la altura es:

$$\frac{44}{6.630} = 6.636 \text{ u}$$



Así pues, la raíz cuadrada de 44 es 6.63 aproximadamente. Continuando de una manera semejante, se pueden obtener aproximaciones cada vez más exactas.

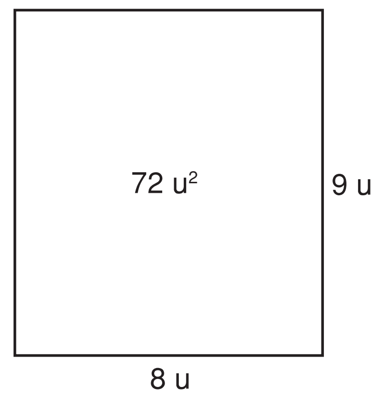
b) Calcular la raíz cuadrada de 72.

1. Se construye un rectángulo de área igual a 72 u^2 y uno de sus lados con valor cercano a la raíz.

En este caso 8 u.

La base será de 8 u.

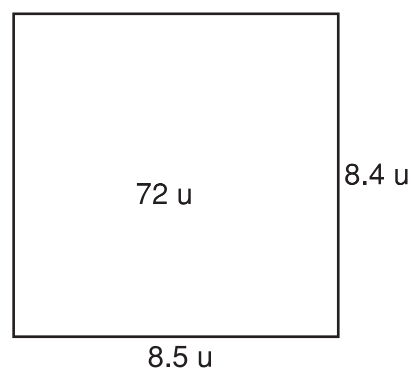
Su altura es $\frac{72}{8} = 9 \text{ u}$



2. La base del nuevo rectángulo será el promedio de la base y altura del rectángulo anterior.

$$\frac{8\text{u} + 9\text{u}}{2} = 8.5 \text{ u}$$

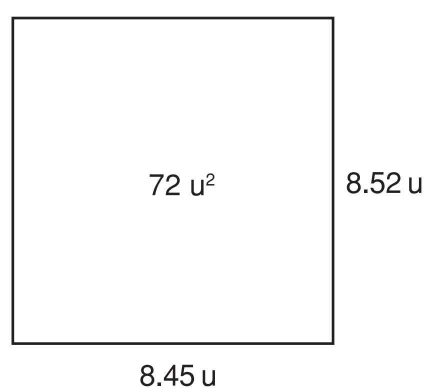
Su altura es $\frac{72}{8.5} = 8.4 \text{ u}$



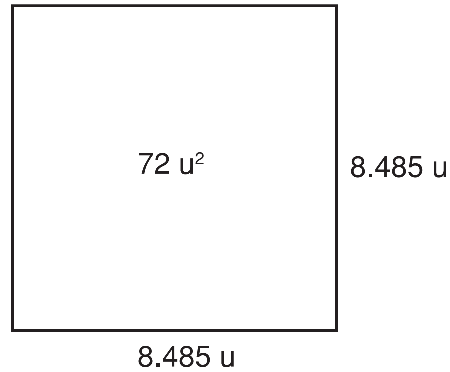
3. La base del nuevo rectángulo se obtiene con el promedio de 8.5 y 8.4.

$$\frac{8.5 + 8.4}{2} = 8.45 \text{ u}$$

Su altura es $\frac{72}{8.45} = 8.52 \text{ u}$



4. De forma semejante se construye el nuevo rectángulo.



Su base es $\dfrac{8.45 + 8.52}{2} = 8.485\ \text{u}$

Su altura es $\dfrac{72}{8.485} = 8.485\ \text{u}$

Por lo tanto, la raíz cuadrada de 72 es 8.485 aproximadamente. Si se desea obtener mayor exactitud, se procede en forma semejante. Este resultado puede verificarse utilizando la calculadora, la cual muestra que la raíz cuadrada de 72 es 8.4852813.

En estos ejemplos, por tratarse de longitudes, los resultados fueron positivos; pero no hay que olvidar que un número tiene dos raíces, una positiva y otra negativa.

Reúnete con otros(as) dos compañeros(as) para analizar el método babilónico y contesta en forma oral las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la idea principal en la construcción sucesiva de rectángulos?

b) ¿Cómo se logra que la medida de cada uno de los lados del rectángulo se aproxime cada vez más a la raíz buscada?

c) ¿Cómo puedes verificar los resultados de este procedimiento babilónico?

En sesión plenaria y bajo la asesoría del profesor(a) verifica tus respuestas.

Continúa trabajando con tu equipo para representar geométricamente las siguientes raíces cuadradas; cada unidad represéntala con 0.5 cm. Realiza el ejercicio en tu cuaderno.

a) $\sqrt{64}\ \underline{|\ 8}$ b) $\sqrt{25}\ \underline{|\ 5}$

Compara tus representaciones con las de otro equipo; si no son iguales consulta con tu profesor.

Trabaja individualmente en tu cuaderno para calcular —por el método babilónico— las siguientes raíces cuadradas. Aproxima hasta centésimos.

a) $\sqrt{20}$ b) $\sqrt{68}$ c) $\sqrt{94}$

Compara tus resultados con la clave, si no coinciden, revisa tus procedimientos.

CLAVE:

a) 4.47 b) 8.24 c) 9.69

23 CÓMO LLEGAR A LA RAÍZ

18-3

Cálculo de la raíz cuadrada mediante el algoritmo tradicional
Manejo del método tradicional para calcular la raíz cuadrada

Como se ha visto, la raíz cuadrada se aplica en diversos procedimientos matemáticos que te permiten solucionar problemas. Por ende, el conocimiento y el buen manejo del algoritmo se hacen indispensables.

En el siguiente video apreciarás el algoritmo tradicional para calcular la raíz cuadrada de números naturales. ¡Obsérvalo!

Con un compañero(a) lee cuidadosamente el siguiente texto. Realiza en tu cuaderno los ejercicios que se van presentando. Recuerda que *para aprender es indispensable hacer.*

CÁLCULO DE LA RAÍZ CUADRADA MEDIANTE EL ALGORITMO TRADICIONAL

La raíz cuadrada es una operación de múltiples aplicaciones en situaciones problema.

Por ejemplo: se quieren plantar 15 129 árboles a igual distancia, en un terreno cuadrado. ¿Cuántos deben plantarse en cada lado?

La solución a este problema se obtiene calculando la raíz cuadrada de 15 129; esto es, 123 árboles por lado.

Como se ha estudiado, el cálculo de la raíz cuadrada se puede hacer por diferentes métodos. El más usual es el que a continuación se muestra.

Hallar la raíz cuadrada de 15 876.

a) Se inicia la radicación y se separan con comas y por parejas las cifras del radicando de derecha a izquierda (a cada pareja se le llama período). Puede quedar una cifra a la izquierda.

$$\begin{array}{l|} \sqrt{1,58,76} \\ \\ \end{array}$$

b) Se busca un número que multiplicado por sí mismo dé como resultado, de manera aproximada o exacta, el primer período (1); se coloca en la parte correspondiente a la raíz y el cuadrado de dicho número se le resta al primer período.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{1,58,76} & \underline{1} \\ \underline{-1} & \\ \ \ 0 & \end{array}$$

c) Se coloca el siguiente período a la altura de la diferencia obtenida (0), se duplica la cifra de la raíz y se escribe debajo de la misma.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{1,58,76} & \underline{1} \\ \underline{-1} & \underline{2} \\ \ \ 05.8 & \end{array}$$

d) Para hallar la segunda cifra de la raíz, se separa con una coma la primera cifra de la derecha de 058 y lo que queda (05) se divide entre el duplo de la raíz hallada, que en este caso es 2; el cociente se coloca a la derecha del 1 y debajo de sí mismo, obteniéndose 22 (número formado por el doble de la primera cifra de la raíz y la segunda cifra hallada). Este número se multiplica por 2 y enseguida se resta el número 44 al 058.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{1,58,76} & 12 \\ \cline{2-2}
-1 & \\ \cline{1-1}
05,8 & 22 \times 2 = 44 \\ \cline{2-2}
-4\,4 & \\ \cline{1-1}
1\,4 &
\end{array}
$$

e) Se coloca el siguiente período (76) a la derecha de la diferencia obtenida (14). Se duplica la raíz (12) y se escribe en un tercer renglón.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{1,58,76} & 12 \\ \cline{2-2}
-1 & \\ \cline{1-1}
05,8 & 22 \\ \cline{2-2}
-4\,4 & \\ \cline{1-1}
1\,4\,7,\,6 & 24 \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

f) Para hallar la tercera cifra de la raíz se procede como en el inciso d). Se divide 147 entre 12 y el cociente se coloca a la derecha de 12 y de 24 en el primer y tercer renglón, respectivamente.

Después el producto de 6 por 246 se resta de 1 476.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{1,58,76} & 126 \\ \cline{2-2}
-1 & \\ \cline{1-1}
05,8 & 22 \qquad 147 \div 24 = 6 \\ \cline{2-2}
-4\,4 & \\ \cline{1-1}
1\,4\,7,\,6 & 246 \times 6 = 1476 \\ \cline{2-2}
-1\,4\,7,\,6 & \\ \cline{1-1}
0\,0\,0\,0 &
\end{array}
$$

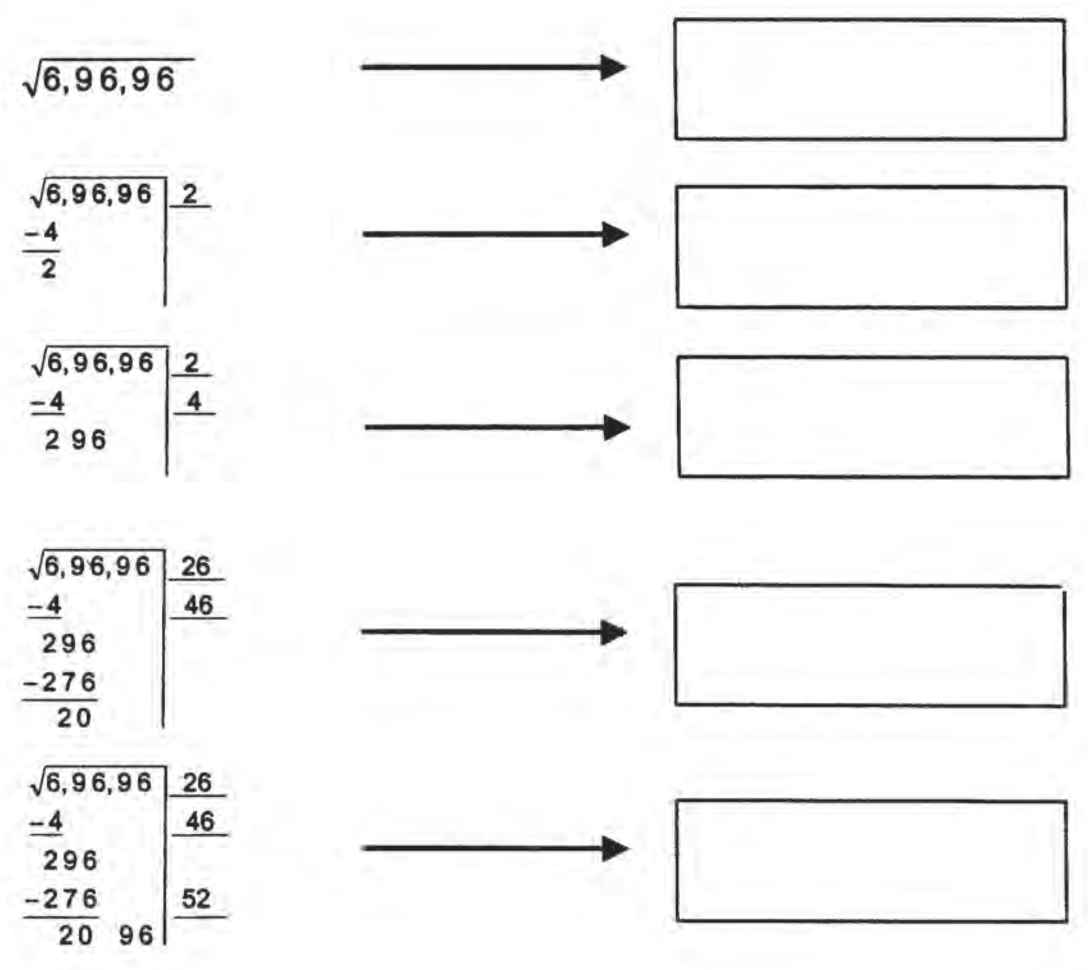
Por lo tanto, la raíz cuadrada de 15 876 es 126 y –126. Si el residuo es cero, el cuadrado de la raíz deberá ser igual al radicando.

$$
\begin{array}{r l}
126 & \text{raíz} \\
\times\ 126 & \\
\hline
756 & \\
252 & \\
126 & \\
\hline
15876 & \text{radicando}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r l}
-126 & \text{raíz} \\
\times -126 & \\
\hline
756 & \\
252 & \\
126 & \\
\hline
15876 & \text{radicando}
\end{array}
$$

Para comprobar el resultado de una raíz cuadrada, cuando el residuo es diferente de cero, el radicando deberá ser igual a la suma del cuadrado de la raíz y el residuo.

El cálculo de la raíz cuadrada es de gran utilidad en ramas de la matemática como la aritmética, la geometría y el álgebra, entre otros.

Continúa trabajando con tus compañeros(as) para escribir en los rectángulos del lado derecho los pasos que se representan en la resolución de la raíz cuadrada de la izquierda. Trabaja en tu cuaderno.



```
√6,96,96 | 264
 -4      | 46
  296    |
 -276    | 524
  20,96  |
 -20 96
    0 00
```

Compara tus respuestas con las de otra pareja; si existen discrepancias consulta con tu profesor.

Hallar individualmente las siguientes raíces cuadradas por el algoritmo tradicional.

a) $\sqrt{1225}$

b) $\sqrt{53361}$

c) $\sqrt{7245}$

d) $\sqrt{18421}$

Rectifica tus resultados con la calculadora, si es necesario, consulta la clave.

CLAVE:

a) 35 y –35; b) 231 y –231; c) 85 y –85; d) 135 y –135

24 ASTILLAS DE RAÍZ

19-3

Raíz cuadrada de decimales por el algoritmo tradicional Obtención de la raíz cuadrada de fracciones decimales

“Estudiando lo pasado se aprende lo nuevo”: dice un proverbio japonés. Ahora te darás cuenta de que si entendiste lo visto en la sesión anterior, ésta no te ocasionará ninguna dificultad.

Observa el video y analiza el proceso que se plantea.

Anota en tu cuaderno las diferencias y semejanzas entre el procedimiento estudiado en la lección anterior y el que aquí se plantea.

Comenta tus anotaciones con el grupo.

Reúnete en pareja y lee el texto. Trabaja simultáneamente en tu cuaderno para que hagas visible aquellos pasos u operaciones que están implícitas.

RAÍZ CUADRADA DE DECIMALES POR EL ALGORITMO TRADICIONAL

Como se vio anteriormente, cuando se obtiene la raíz cuadrada de un número, ésta quizá no sea exacta, como en el caso de $\sqrt{155}$;

$\sqrt{1,55}$	12
0 55	
1 1	22

Si esto sucede, es posible continuar extrayendo la raíz y aproximar a tantas cifras decimales como se desee con sólo agregar, en el radicando, un punto y tantas parejas de ceros (períodos) como cifras decimales se quieran. Obsérvese la raíz anterior aproximada solo a décimos.

$\sqrt{1,55}$	12
0 55	22
1 100	244
124	

En este caso, se aumentaron únicamente dos ceros juntos al residuo, se colocó un punto en la raíz y se continuó con el mismo procedimiento que se realiza cuando son enteros.

Entonces la $\sqrt{155}$; es $\pm$ 12.4 aproximadamente.

Ahora, analícese el siguiente ejemplo que se aproximará hasta centésimos.

$\sqrt{32,56,0000}$	57.06
7 5 6	107
0 0 7 0000	11 40
0 1564	11406

Aquí se aumentó una pareja de ceros en el radicando y se puso el punto en la raíz. Se continuó con el procedimiento normal como si no hubiera punto, y después se agregó otra pareja de ceros en el radicando (pues la aproximación sería hasta centésimos). Y por ultimo, se repitió el procedimiento anterior.

La comprobación se realiza de la misma forma que cuando no hay aproximación decimal. Obsérvese que se multiplica la raíz por sí misma, sumándose al producto el residuo, el cual se coloca en el lugar que le corresponde.

$$\begin{array}{r} 12.4 \\ \times\ \underline{12.4} \\ 496 \\ 248 \\ \underline{124} \\ 153{,}76 \\ \underline{1\ 24} \\ 155.00 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 57.06 \\ \times\ \underline{57.06} \\ 342.36 \\ 39942 \\ \underline{28530} \\ 3255.8436 \\ \underline{1564} \\ 3256.0000 \end{array}$$

También a los números decimales se les puede extraer la raíz cuadrada, siendo el procedimiento semejante al empleado con números naturales; aunque la separación en períodos de dos cifras se efectúa hacia la izquierda del punto decimal (cuando son enteros) y hacia la derecha del punto para los decimales. Si el último período decimal tiene una sola cifra, se completa con un cero.

Ejemplo:

Se desea extraer raíz cuadrada a 8.7694. La separación por períodos queda:

$$\sqrt{8.76{,}94}$$

Se resuelve la raíz como si se tratara de enteros:

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{8{,}76{,}94} & \underline{2.96} \\ \phantom{\sqrt{}}4\ 76 & \underline{4\ 9} \\ \phantom{\sqrt{}4\ }3594 & \underline{5\ 86} \\ \phantom{\sqrt{}4\ 7}078 & \end{array}$$

Para colocar el punto decimal en el resultado, se separan tantas cifras decimales como períodos haya en la parte decimal del radicando. Así, en 8.7694 se formaron **dos** períodos en la parte decimal, por lo tanto, habrá **dos** decimales en la raíz.

Por otra parte, la comprobación de la raíz para los números decimales es igual que para los naturales. Véase.

$$\begin{array}{r}
2.96 \\
\times \underline{\;\;2.96} \\
1776 \\
2664 \\
\underline{592} \\
8.7616 \\
\underline{78} \\
8.7694
\end{array}$$

Pero recuérdese que toda raíz tiene dos resultados: uno positivo y uno negativo. Así que también debe comprobarse con la raíz negativa.

$$\begin{array}{rr}
(-2.96)\ (-2.96) = & 8.7616 \\
 & \underline{+78} \\
 & 8.7694
\end{array}$$

Como puede observarse, el residuo correspondía a los diezmilésimos. Por tanto, al sumarse en el producto, se colocó en el lugar señalado.

La raíz cuadrada, al igual que las demás operaciones, se usa para resolver problemas. Véase la solución de este:

¿Cuál es la medida del radio de un círculo cuya área es de 19.635 cm^2?

Como el área de un círculo se obtiene multiplicando πr^2, se despeja la incógnita quedando:

$$A = \pi r^2 \quad \rightarrow \quad r = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}}$$

Se sustituye:

$r = \sqrt{\dfrac{19\,635}{3.14}}$ Aquí hemos tomado una aproximación racional del número π.

Se hacen operaciones:

$r = \sqrt{6.25}$ $\boxed{r = 2.5 \text{ cm}}$ $\leftarrow$ valor solicitado

Continúa trabajando en pareja y contesta las preguntas.

a) ¿Cuántos ceros deben aumentarse en el radicando para aproximar una raíz a décimos?

b) ¿Cuántos ceros se aumentan en el radicando si la aproximación es a centésimos?

c) En la raíz de un decimal, ¿cómo se determinan las cifras decimales que tendrá el resultado?

Compara tus respuestas con las de otra pareja y si hay dudas, consulta con tu profesor(a).

Forma un grupo de tres participantes y resuelve el siguiente ejercicio.

1. Da una estimación de las siguientes raíces (antes de resolverlas):

$\sqrt{1185}$ $\sqrt{204}$ $\sqrt{3063}$

a) Calcula las raíces, aproximando a centésimos.

¿Hay muchas diferencias entre tu estimación y el resultado obtenido?

2. Calcula la raíz cuadrada de las siguientes fracciones decimales.

$\sqrt{1.643}$ $\sqrt{2.8}$ $\sqrt{14.65}$

Compara tu estimación con el resultado de cada operación; ¿hubo mucha diferencia?

Ahora comprueba con la calculadora los resultados de las raíces de los puntos 1 y 2.

Individualmente, resuelve las raíces cuadradas. Antes de hacerlo, anota tu estimación del resultado para que te des cuenta si hay error al resolverlas.

a) $\sqrt{695}$ b) $\sqrt{3.512}$ c) $\sqrt{1.418}$

d) $\sqrt{5.39}$ e) $\sqrt{7091}$

Compara tus resultados con la clave y si hay dudas, compruébalos con la calculadora.

CLAVE

a) 26.36; b) 1.874; c) 1.19; d) 2.32; e) 84.208

25 RESUÉLVELOS TÚ MISMO

20-3

Problemas de raíz cuadrada
Resolución de problemas donde se aplique la extracción de raíz cuadrada

La aplicación de operaciones en la solución de problemas es una actividad común.

Observa el video donde se mostrará que la raíz cuadrada no es la excepción.

Comenta con tus compañeros(as) de qué forma puedes detectar que el problema requiere del cálculo de una raíz cuadrada.

Con dos compañeros(as) resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas.

1. Se tiene un terreno cuadrangular de 225 m^2 de área y se desea cercar con malla. ¿Cuántos metros de malla serán necesarios para cercarlo?

2. ¿Cuánto medirá el radio de una fuente circular cuya área es de 63.585 m^2?

3. Se desea colocar plantas en un terreno circular que mide de área 28.26 m^2. Las plantas estarán distribuidas en cuatro de los diámetros del círculo a una distancia de 50 cm cada una. ¿Cuántas plantas serán necesarias?

Compara tus resultados con los de otro grupo y si hay dudas, consulta con tu profesor.

En forma individual, resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas.

1. Calcula cuánto mide el lado de un cuadrado cuya área es de 289 cm^2.

Comprueba tu resultado con la calculadora.

2. ¿Cuánto mide el radio de un círculo, si su superficie mide 844.5344 dm^2? (Toma 3.14 como valor de π).

Comprueba tu resultado con la calculadora.

3. ¿Cuál será la longitud del diámetro de un círculo, si su área es de 379.94 m^2.

Comprueba tu resultado con la calculadora.

Al finalizar, coteja tus respuestas con las de la clave. Si tienes dudas, consulta con tu profesor.

CLAVE

1) 17 cm; 2) 16.4 dm; 3) 22 m.

26 ¿ERROR O EQUIVOCACIÓN?

21-3

Concepto de error en la medición
Conocimiento de cómo se introduce un error en la medición

Gramaticalmente, el significado de error y de equivocación es el mismo; sin embargo, en la medición se marca una diferencia muy importante entre ambos significados.

Observa atentamente el video y encuentra esa diferencia.

Forma una terna y lee el texto.

Al finalizar la lectura comenta lo que consideres más importante.

CONCEPTO DE ERROR EN LA MEDICIÓN

En toda medición hay errores. Pero es conveniente aclarar que no es lo mismo “error” que “equivocación “, pues ésta indica descuido por parte de quien realiza la medición, ya sea al anotar la lectura o al hacer el cálculo aritmético. En cambio, el “error” puede originarse por tres causas:

1. La imperfección de los aparatos con que se realizan las mediciones, debida a los defectos en su fabricación.

Ejemplo:

Si se realiza una medición de longitud con una cinta que no tiene sus graduaciones equidistantes, o simplemente si la medida del instrumento empleado no corresponde a la que se le supone, por ser de fabricación defectuosa.

2. El medio en el cual se realiza la medición.

Ejemplo:

Si se mide una longitud determinada con una regla metálica expuesta a una alta temperatura, la medida de la regla se alterará, pues los metales se dilatan con el calor. Así, la medición tendrá un error.

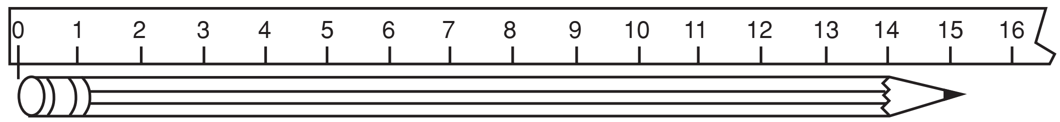
3. La imperfección en los sentidos de quien realiza la medición.

Ejemplo:

Si se mide una longitud con un instrumento que es menor, sería necesario colocarlo varias veces hasta cubrir dicha longitud. En este proceso es posible que se coloque mal el instrumento en una de esas ocasiones y así se produzca un error en la medición.

O bien, cuando el observador se encuentra en determinada posición respecto al instrumento y al objeto que se mide al hacer su apreciación de la medida de esa dimensión. No obstante, si la medición se realiza por varias personas, se puede comprobar que existe una variación –aunque mínima– en los datos.

Por otra parte, siempre que se realiza una medición se hace una estimación. Por ejemplo, se mide la longitud de un lápiz con una regla graduada hasta centímetros.



Si por ejemplo, el observador nota que la punta queda entre dos líneas que señalan centímetros, y realiza una división en diez partes iguales de ese centímetro, decidiendo a qué punto corresponde el extremo del lápiz, entonces el observador está haciendo una estimación de las décimas de centímetros.

Así, si se pidiera a dos personas que realizaran la medición con una aproximación de décimas de centímetro, es muy probable que dieran estas respuestas:

15.2 cm
15.3 cm

Como puede verse, no hay duda en los centímetros; pero al tratar de ser más precisos, lo que se hace es una estimación, pues las décimas de centímetro no están señaladas en esta regla.

De igual forma que en ejemplo anterior, al medir una dimensión cualquiera se realizará una estimación que dependerá del grado de precisión que se requiera y del instrumento utilizado para medir.

Sin embargo, existe un máximo error posible en la medición y éste consiste en la mitad de la unidad más pequeña perteneciente a la medida empleada.

Así en la medida del lápiz, el máximo error sería medio centímetro más o medio centímetro menos, lo que se representa como (15 ± 0.5) cm. A esto se le conoce como acotación del error.

Por otra parte, si se quiere definir matemáticamente el “error”, puede decirse que es la diferencia entre el valor real (x), que se considera aproximado y el valor real (X), que queda expresado simbólicamente así:

$\boxed{e_x = x - X}$ donde e_x será llamado “error absoluto”.

Obsérvese el siguiente ejemplo:

En un recipiente hay fríjoles secos, que no se pueden contar. Sin embargo, debe calcularse cuántos hay en el recipiente.

La forma de calcular esa cantidad puede ser muy variada, pero si después de calcularla es posible contar los fríjoles, entonces quizá se incurra en lo que se llama “error absoluto”. Es decir,

$$\boxed{e_x = x - X}$$

Si se considera que el cálculo fue de 3000 fríjoles y al contarlos se vio que sólo había 2 650, se determina el error absoluto basándose en la fórmula dada.

$e_x = 3\,000 - 2\,650$

$$\boxed{e_x = 350}$$

Con tu mismo grupo haz lo que se te indica a continuación.

1. Toma cada uno una regla diferente y anote cuánto mide el largo, el ancho y el grosor de este libro.

largo = ____?____ ancho = ____?____ grosor = ____?____

2. Ahora corta una tira de papel que mida 10 cm y señala sólo los centímetros. Enseguida, mide con la tira el largo de un lápiz (los tres integrantes del equipo deberán medir el mismo lápiz y anotarla en su cuaderno; da la medida hasta milímetros.

Largo del lápiz = ____?____

Compara las medidas que obtuviste con las de tus compañeros(as) de equipo. Confronta las medidas del primer punto con las de todo el grupo y contesta las preguntas.

1. ¿Fueron iguales todas las medidas obtenidas?

2. ¿En cuál de los dos puntos hubo mayores divergencias?

3. ¿A qué crees que se deba?

Expón ante el grupo tus respuestas y obtén una conclusión.

Continúa en tu grupo y realiza lo que se indica.

1. Contesta en forma breve la siguiente pregunta:

¿Cuáles son las tres principales causas que pueden originar un error en la medición?

2. Anota frente a cada enunciado si ejemplifica un "error" o una "equivocación".

Al medir una longitud con dos reglas diferentes, se obtiene una variación en la medida.

Al medir una longitud, no se coloca el cero de la regla al inicio de la longitud.

Al medir un objeto, el observador no está de frente al instrumento de medida.

Al anotar una medida de algo, el observador invierte las cifras.

Al medir un metal expuesto al calor, éste hace que el metal se dilate.

Lee ante el grupo tus respuestas y si hay desacuerdo, comenta tu punto de vista hasta obtener una conclusión.

Individualmente resuelve esta sección.

a) Anota qué diferencia encuentras entre "error" y "equivocación".

Escribe si en estas situaciones se cometió un error o una equivocación.

b) Al pesar algo en la misma balanza y colocarse de frente a la aguja, tres personas obtienen los siguientes resultados: 12.5 kg, 12.6 kg, 12.4 kg.

c) Una persona mide la longitud de una tabla mojada; después la vuelve a medir cuando ya está seca, pero nota que cambió la segunda medida que obtuvo con respecto a la primera.

d) Un niño mide una figura y no se da cuenta que su regla no tiene los centímetros equidistantes.

e) Una persona anota ciertas medidas y no se da cuenta que escribió mal el punto decimal.

Compara tus respuestas con la clave y si tienes dudas, coméntalas con tus compañeros hasta llegar a una conclusión.

CLAVE

a) Se califica como equivocación al descuido que tenga el operador; en cambio se considera error a la variante que se pueda dar debido a imperfección de los instrumentos, a los sentidos del operador o a las condiciones ambientales en que se realiza la medición. b) Error; c) Error ; d) Error; e) Equivocación.

27 ¿QUIÉN TUVO LA CULPA?

22-3

Fuentes de error en un cálculo
Conocimiento de las fuentes de error en un cálculo

RECUERDA: Anota si lo expuesto a continuación es error o equivocación.

En una balanza se obtienen 12.8 g como peso de un cuerpo y en otra balanza, el mismo cuerpo pesa 12.5 g.

La temperatura marcada por un termómetro es de 3.2 °C y una persona que lo observa señala que la temperatura es de 32 °C.

Discute con un compañero(a) las respuestas a las preguntas:

¿Cuándo es conveniente aproximar? ¿Siempre debemos redondear cantidades?
¿Qué sucede cuando lo hacemos?

Atiende el video y ve qué sucede cuando hacemos una aproximación o un redondeo.

Comenta con tus compañeros(as) de grupo las preguntas iniciales.

Forma una pareja y realiza una lectura comentada del siguiente texto:

FUENTES DE ERROR EN UN CÁLCULO

Como se recordará, existen diferencias entre “error” y “equivocación” al medir las dimensiones de cualquier cosa; además, esta diferencia se conserva cuando hay variación en un cálculo. Es decir, si la persona que hace el cálculo se distrae y cambia las cifras, o el orden o el punto decimal del lugar que le corresponda, está cometiendo una **equivocación.**

En cambio, el error en un cálculo puede introducirse, fundamentalmente, por tres medios o fuentes. A saber:

Error en los datos (llamado también error de entrada)

Este se produce al acotar las medidas de un objeto cualquiera, debido a los errores que se cometen en la medición. Por ejemplo, cuando se miden los lados de un rectángulo para calcular su área, puede cometerse un error si el instrumento de medida tiene algún defecto; si se da alguna circunstancia en el medio que cambie las dimensiones del instrumento o del objeto por medir.

Error por trabajar con datos redondeados o aproximados

Se presenta cuando se trabaja con números redondeados o truncados para simplificar los cálculos. Por ejemplo, cuando se quiere calcular el perímetro de un círculo y para ello es necesario usar el valor de p; sin embargo, no es posible tomar todas las cifras irracionales, por lo que se acostumbra usar sólo el valor de 3.14. Lo anterior introduce un error, pues se está usando un valor truncado.

Error de procedimiento

Este puede darse cuando el observador que realiza la medición no está en la posición adecuada, o bien, cuando no conoce el manejo adecuado del instrumento con el cual efectúa la medición.

Error de salida

Se da cuando el resultado consta de tantas cifras que no pueden anotarse todas por falta de espacio; así que se redondea el resultado, o bien se deja trunco. También es común que suceda cuando se trabaja con la calculadora, pues en ocasiones la pantalla no proporciona todas las cifras.

Como puede observarse, la así llamada “ciencia exacta” no lo es tanto cuando maneja aproximaciones; lo cual suele suceder.

Con tu mismo compañero(a) responde:

¿Qué nombre recibe también el error en los datos? ¿Cómo se incurre en él?

¿Por qué reintroduce error cuando se trabaja con números redondeados o truncados para simplificar los cálculos?

¿En qué consiste el error de salida?

Compara con otra pareja tu ejercicio y si tienes dudas, vuelve al texto.

Continúa trabajando en pareja y resuelve el siguiente ejercicio para decidir el tipo de error que se introduce.

a) Se calculó el área de un triángulo y se obtuvo 18.66 cm^2, pero la medida de sus lados se hizo con una regla mal graduada.

b) Se desea obtener el área de un cuadrado y al medir sus lados se obtuvo 16.35 m por lado. Para realizar el cálculo se usaron solo 16 m por lado.

c) Se hizo el cálculo de la superficie de un terreno con las siguientes medidas: 18.5 de frente y 25 m de fondo. Pero las medidas consideradas como reales eran 18.47 m de frente y 24.85 de fondo.

d) Se desea crear un terreno circular y se usa como valor de π, 3.1416.

e) Al hacer una operación en la calculadora, la pantalla sólo acepta **seis dígitos** y, por lo tanto, el resultado queda truncado.

Compara tus respuestas con las de tus compañeros(as) de grupo y si hay dudas, consulta con el profesor(a).

Individualmente, resuelve en tu cuaderno esta sección.

Anota **e, p, r,** o **s** si el error introducido es de entrada, de procedimiento de redondeo o de salida, respectivamente.

a) El resultado de un cálculo fue 18.911 y se redondeó a 18.9 .... ( )

b) Una persona pesa un producto en una báscula, pero no se encuentra en un ángulo recto con respecto a la aguja .... ( )

c) Dos personas midieron una longitud y señalaron estos resultados: 15.89 cm y 15.87 cm, por lo que decidieron tomar para su cálculo, 15.88 cm .... ( )

d) Se calculó el volumen de un cuerpo cuyas medidas son: área de la base, 27.18 m^2 y altura, 4.02 m; para ello, se consideraron las medidas redondeadas como A = 27 m^2 y h = 4 m .... ( )

e) Se realizó una operación en una calculadora y ésta siempre dio el resultado truncado .... ( )

f) Dos personas pesaron en la misma báscula un producto y obtuvieron 9.5 g y 9.3 g. Para hacer sus cálculos tomaron 9.4 g como medida obtenida .... ( )

Consulta tus respuestas con la clave.

CLAVE:

a) r; b) p; c) e; d) p; e) s; f) e.

28 COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

23-3 Repaso parcial de lo desarrollado en el núcleo Integración de los conocimientos adquiridos

Los conocimientos matemáticos van ligados unos con otros; lo que aprendiste ayer, resulta necesario para aprender lo de hoy. Y lo de hoy es indispensable para mañana. Repasar los conceptos te ayudará a reafirmar sus contenidos y disipar las posibles dudas.

Forma un equipo de trabajo con tres compañeros y observa el video. Posteriormente comenta los temas que ya no recuerdes; en caso necesario consulta con tu profesor.

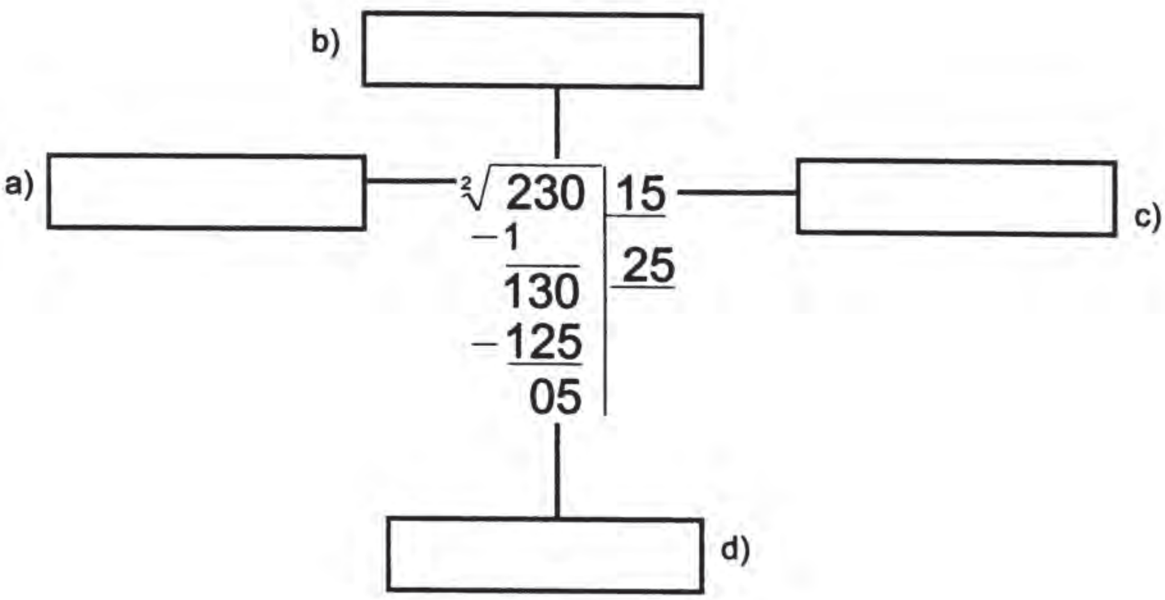
Reúnete con dos compañeros(as) para resolver en tu cuaderno, los ejercicios:

1. Completa las siguientes expresiones:

a) Si $4^2 = 16$ entonces $\sqrt{16} =$ ____________

b) Si $13^2 =$ ____________ entonces $\sqrt{169} =$ ____________

2. Escribe el nombre de los elementos de la siguiente radicación:



3. ¿Qué es la raíz cuadrada de un número?

4. ¿Cuáles son los diferentes métodos estudiados en el núcleo para resolver la raíz cuadrada?

¿Cuál de ellos te pareció menos mecánico y más explicativo?

¿Cuál te gustó más? ¿Por qué?

5. Contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Qué entiendes por error en una medición?

b) ¿Es lo mismo error que equivocación en un cálculo?

c) ¿Cuál es la diferencia?

Compara tus resultados con los de otro equipo; si es necesario corrige.

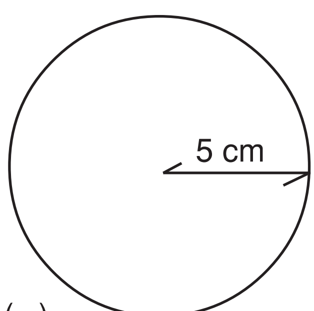
En forma individual resuelve los siguientes problemas:

6. ¿Cuántos mosaicos cuadrados tendrá cada lado de un piso cuadrangular que tiene 1 296 mosaicos en total?

7. Los 676 alumnos de una secundaria se alinearon en el mismo número de filas y de hileras. ¿Cuántos alumnos hay en cada fila?

8. ¿Cuáles son las dimensiones de un terreno rectangular de 288 m^2, si su largo es el doble del ancho?

9. Escribir en el paréntesis una **E** si se trata de una equivocación y una **e** si es un error.



$A = \pi \times r^2$

$A = 3 \times (5)^2$

a) $A = 3 \times 25 = 75$ cm^2 ...( )

$A = \pi \times r^2$

$A = 3.14 \times (5)^2$

b) $A = 3.14 \times 10 = 31.4$ cm^2 ...( )

Compara tus respuestas con la clave; si tienes duda, consulta con tu profesor(a).

CLAVE:

1. a) Si $4^2 = 16$ entonces $\sqrt{16} = 4$; b) Si $13^2 = 169$ entonces $\sqrt{169} = 13$; **2.** a) índice b) subradical o radicando c) raíz d) residuo o sobrante; **3.** Es la operación inversa de elevar al cuadrado un número; consiste en encontrar una cantidad que se ha de multiplicar por sí misma para obtener un número determinado. **4.** I. tanteo sistemático II. Interpolación III. Método babilónico IV. Algoritmo tradicional; **5.** a) Variante provocada por factores ajenos a quien realiza la medición, como la imperfección de los instrumentos o las condiciones ambientales; b) No; c) La equivocación es ocasionada por descuidos de quien realiza la medición y el error es por factores ajenos; **6.** 36; **7.** 26; **8.** 12 m de ancho y 24 de largo; **9.** a) e; b) E.

29

36-2

¿MAYOR O MENOR QUE LA UNIDAD?

Potencias de diez
Obtención de potencias de diez con exponentes positivos y negativos

Cuando se piensa multiplicar las potencias de algún número, parece lógico pensar en resultados que tengan muchas cifras. Sin embargo, ¿qué pasa si se multiplican las potencias indicadas? ¿Lo has realizado alguna vez? Y, ¿has obtenido el cociente de dos potencias?

En grado quinto y sexto estudiaste la potenciación y nos detuvimos en una de sus dos operaciones inversas, la radicación, para enfatizar en los números cuadrados y en raíces cuadradas.

En grado séptimo se avanzó ampliamente el trabajo con las operaciones entre potencias en los números racionales, aplicando estos conocimientos en el manejo de expresiones algebraicas.

Ahora volvemos sobre estos conceptos para estudiar las potencias de diez y operaciones entre ellas.

Observa el video: posiblemente encuentres respuestas a las cuestiones planteadas; al terminar, participa en una lluvia de ideas coordinado por tu profesor(a).

Lee el texto que viene a continuación y después revisa las respuestas o preguntas que aún están por aclarar o por responder. Para esto último intégrate a un equipo.

POTENCIAS DE DIEZ

En la actualidad, con el empleo generalizado del sistema de numeración decimal frecuentemente se manejan potencias de diez.

Sin embargo, como se emplean 10, 100, 1 000, etc. y también 0.1, 0.01, 0.001, etc. no se presta mucha atención a las potencias indicadas que corresponden a esos números.

Es conveniente desarrollar habilidades para manejar potencias indicadas de diez, porque en la notación científica dichas expresiones son empleadas constantemente.

Considérese una operación muy conocida para iniciar de manera sencilla la comprensión de este tema.

Se sabe que:

$10 \times 10 = 100$ y $10 \times 10 = 10^2$, por lo tanto: $100 = 10^2$

También:

$10 \times 10 \times 10 = 1\,000$ y $10 \times 10 \times 10 = 10^3$, o sea $1\,000 = 10^3$

Aquí cabe hacer notar que el número de unidades del exponente de diez coincide con el número de ceros que sigue a la unidad.

Si se multiplica $100 \times 1\,000$, se obtiene 100 000, pero como

$100 = 10^2$ y $1\,000 = 10^3$, sustituyendo se tiene:

$10^2 \times 10^3 = 100\,000$. Como 100 000 tiene cinco ceros después de la unidad, se tiene que $100\,000 = 10^5$.

Sustituyendo 100 000, queda $10^2 \times 10^3 = 105$. Como $5 = 2 + 3$, puede decirse que $10^2 \times 10^3 = 10^2 + 3 = 10^5$.

Otras operaciones similares, con potencias indicadas de diez, son:

$10^4 \times 10^3 = 10^{4+3} = 10^7$

$10^3 \times 10^3 = 10^{3+3} = 10^6$
$10^2 \times 10^8 = 10^{2+8} = 10^{10}$.

Por lo tanto, si a y b son números naturales, entonces:

$10^a \times 10^b = 10^{a+b}$, que en el lenguaje común significa:

El producto de dos potencias indicadas de diez, es el mismo diez, con exponente igual a la suma de los exponentes de los factores.

Ahora bien: ¿qué sucede si se efectúa una división de potencias de diez?

Considérese $\frac{1000}{100}$, que es equivalente a dividir $\frac{10^3}{10^2}$

Obsérvese: $\frac{1000}{100} = 10$, además $10 = 10^1$

Si la división es operación inversa a la multiplicación, y el producto de las potencias de 10 se obtiene sumando los exponentes, al dividir deben restarse, ya que restar es lo contrario de sumar.

Así: $= \frac{10^3}{10^2} = 10^{3-2} = 10^1$

Entonces, si se divide $\frac{10\,000}{10\,000} = 1$, esto es igual a $\frac{10^4}{10^4} = 10^{4-4} = 10^0$, por lo cual se puede afirmar que $1 = 10^0$ ó $10^0 = 1$.

Al continuar realizando divisiones, o sea, obteniendo el cociente de dos potencias indicadas de diez, se observa lo siguiente:

$\frac{100}{1000} = 0.1$, que es igual a $= \frac{10^2}{10^3} = 10^{2-3} = 10^{-1}$; es decir: $10^{-1} = 0.1$

Aquí se aprecia que:

Cuando el exponente del dividendo es menor que el exponente del divisor, resulta una potencia de diez con exponente negativo.

Otras operaciones semejantes.

$$\frac{10^3}{10^5} = 10^{3-5} = 10^{-2} = 0.01$$

$$\frac{10^2}{10^6} = 10^{2-6} = 10^{-4} = 0.0001$$

Se observa que el número de cifras de la parte fraccionaria decimal coincide con el número de unidades del exponente negativo.

Puede afirmarse que si a y b son números enteros, $\dfrac{10^a}{10^b} = 10^{a-b}$

En el lenguaje común significa que:

El cociente de dos potencias indicadas de diez es el mismo diez, teniendo como exponente la diferencia que existe entre el exponente del dividendo y el exponente del divisor.

En resumen:

Para obtener el producto de dos potencias indicadas de diez, se suman los exponentes de los factores.

$10^5 \times 10^2 = 10^7$	$10^7 =$ 10 000 000
$10^4 \times 10^2 = 10^6$	$10^6 =$ 1 000 000
$10^2 \times 10^3 = 10^5$	$10^5 =$ 100 000
$10^2 \times 10^2 = 10^4$	$10^4 =$ 10 000
$10^2 \times 10 = 10^3$	$10^3 =$ 1 000
$10 \times 10 = 10^2$	$10^2 =$ 100
$10^0 \times 10 = 10^1$	$10^1 =$ 10

Para obtener el cociente de dos potencias indicadas de diez, al exponente del dividendo se le resta el exponente del divisor.

$$\frac{10^5}{10^3} = 10^2 \qquad\qquad 10^2 = 100$$

$$\frac{10^3}{10^2} = 10^1 \qquad\qquad 10^1 = 10$$

$$\frac{10^3}{10^3} = 10^0 \qquad\qquad 10^0 = 1$$

$$\frac{10^4}{10^5} = 10^{-1} \qquad\qquad 10^{-1} = 0.1$$

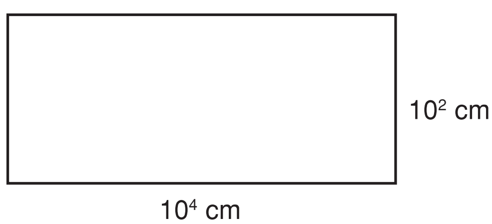
$$\frac{10^3}{10^5} = 10^{-2} \qquad\qquad 10^{-2} = 0.01$$

$$\frac{10^4}{10^7} = 10^{-3} \qquad\qquad 10^{-3} = 0.001$$

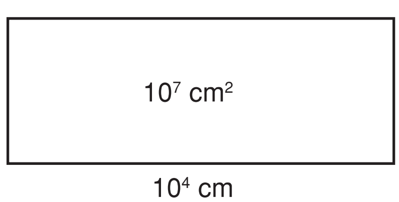
El manejo adecuado de las potencias indicadas de diez se requiere para realizar cálculos en los que se tendrían que escribir muchas cifras, si no se tuviera a disposición este recurso.

Ahora, con tus compañeros(as) de equipo, resuelve los siguientes problemas.

1. ¿Cuál es el área de un rectángulo que mide 10^4 cm de largo y 10^2 cm de ancho?



2. El área de un rectángulo es 10^7 cm^2 y el largo 10^4 cm. ¿Cuál es la medida del ancho?



Revisa tus respuestas con los integrantes de otro equipo. En caso de duda, consulta con tu profesor.

En forma individual, completa el siguiente cuadro. Fíjate en el primer renglón.

$\frac{10^3}{10^7}$	10^4	0.0001
$10^2 \times 10^3$		
	10^0	
		100 000
	10^1	
$\frac{10^2}{10^3}$		
	10^6	
		0.01
	10^{-6}	

Un alumno(a) hará en el tablero o papelógrafo el cuadro lleno y entre todos decidirán si las respuestas son correctas o si es necesario corregir.

30

¡SEA BREVE!

37-2

Notación científica
Comprensión de la notación

Diferentes ciencias como la física, la química, la biología, la astronomía, etc., emplean números con muchas cifras para efectuar algunos cálculos.

Para hacer menos dispendioso el cálculo, el hombre ideó una forma de representación más breve. ¿La conoces?

Observa el video y encontrarás ejemplos y explicaciones que te ayudarán a comprender el tema de esta sesión. Al finalizar, reúnete con dos compañeros y comenta lo que hayas entendido.

Continúa en grupo. Lee en silencio el texto y después intercambias ideas con tus compañeros(as) para comprender mejor las ideas expresadas.

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Ver el Sol y «sentir su calor» es algo tan habitual que ya no se le da especial importancia. Sin embargo, si se estudian algunas características de este astro, se encuentra, por ejemplo, que su volumen es de 1.414×10^{18} km^3. Pero, ¿qué significa eso y en qué clase de notación está expresado el dato?

A esta forma de representar los números se le llama notación científica.

Esta notación se emplea frecuentemente en la ciencia. Con ella se logra representar, en forma breve, los números que tienen muchas cifras porque indican el grado de exactitud de una medición.

La notación científica para un número positivo (entero, fracción decimal o con parte entera y parte decimal) se expresa por medio de las potencias indicadas de diez.

Conviene considerar tres casos.

1. Cuando **el número** que se va a convertir a la notación científica **es entero.**

a) Convertir 563 929 a la notación científica.

Como existe el convenio de que el número expresado en esta notación debe tener un solo dígito en su parte entera, se cuenta el número de cifras, menos uno, para escoger la potencia de diez. En este caso, $6 - 1 = 5$, por lo que se usará 10^5. Entonces, se cuentan cinco cifras de derecha a izquierda y se coloca un punto decimal, que quedaría entre las dos primeras cifras de la izquierda: 5.63929×10^5.

Es decir que 563 929 en notación científica es 5.63929×10^5.

$$563\,929 = 5.63929 \times 10^5$$

b) Convertir 4 880 324 126 a la notación científica.

El número tiene diez cifras; se le resta una y quedan nueve. Debe usarse 10^9. Al colocar el punto decimal para que quede un solo dígito, se tiene:

$$4\,880\,324\,126 = 4.880324126 \times 10^9$$

c) Convertir 34 000 000 a la notación científica.

Tiene ocho cifras, menos una, siete. Se usará 10^7. Al colocar el punto decimal queda:

3.4×10^7, ya que 3.4 = 3.4000000 y la representación debe ser breve.

Así que $34\,000\,000 = 3.4 \times 10^7$.

2. Cuando se trata de un **número con parte entera y parte decimal.**

a) Convertir 376.253 a la notación científica.

Como debe quedar un solo dígito en la parte entera, se cuenta el número de lugares que se “recorre” el punto decimal hacia la izquierda, y que en este caso es dos; o sea, 10^2. Al colocar el punto resulta 3.76253×10^2, o sea:

$$376.253 = 3.76253 \times 10^2$$

b) Convertir 88245.764 a la notación científica.

Se cuentan los lugares que debe correrse el punto decimal hacia la izquierda, y son cuatro, es decir, 10^4. Al colocar el punto decimal, queda:

$$88245.764 = 8.8245764 \times 10^4$$

c) Convertir 3489267.425 a la notación científica.

El punto decimal debe correrse seis lugares a la izquierda. Se anota entonces, 10^6. Al colocar el punto, queda: 3.489267425×10^6. Por lo tanto:

$$3489267.425 = 3.489267.425 \times 10^6$$

3. Cuando se trata de la expresión decimal de una **fracción decimal.**

a) Convertir 0.0029657 a la notación científica.

Como el número debe tener un solo dígito en su parte entera, el punto debe correrse a la derecha tres lugares, hasta llegar al primer dígito. Cuando el punto se corría hacia la izquierda, el exponente era positivo. Si ahora se corre a la derecha, el exponente será negativo. Se usará, entonces, 10^{-3}. Al colocar el punto queda: 2.9657×10^{-3}.

Entonces: $0.0029657 = 2.9657 \times 10^{-3}$

b) Convertir 0.3845623 a la notación científica.

Es notorio que el punto debe correrse un lugar a la derecha, por lo que se empleará 10^{-1}. Al colocar el punto en el lugar convenido, se tiene:

$$3.845623 \times 10^{-1}$$

c) Convertir 0.0000658 a la notación científica.

El punto se correrá cinco lugares a la derecha para que quede un solo dígito en la parte entera. Por esta razón se multiplicará por 10^{-5} y, al colocar el punto, se tiene:

$$6.58 \times 10^{-5}$$

Es decir que: $0.0000658 = 6.58 \times 10^{-5}$

En conclusión:

Al convertir un número positivo a la notación científica, se obtiene un producto equivalente, en el cual uno de los factores es un número con un solo dígito en la parte entera y el otro factor es una potencia indicada de diez con exponente positivo o negativo.

Con el mismo grupo, discute y resuelve, en tu cuaderno, las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué razón se usa frecuentemente en diversas ciencias la notación científica?

2. Para una mejor comprensión, ¿cuántos casos diferentes se consideran al convertir un número positivo a la notación científica?

3. Cuando se expresa un número en notación científica, ¿cuántos dígitos debe tener en su parte entera?

4. Si escribes un número en notación científica y el punto se corre hacia la izquierda, ¿cómo es el exponente de la potencia de diez que se escoge para multiplicar?

5. Si se escribe un número en notación científica corriendo el punto hacia la derecha, ¿cómo debe ser el exponente de la potencia de diez que se usa como factor?

Compara tus respuestas con las de otro grupo y si tienes errores, corrígelos.

Con tus compañeros(as) de grupo, considera los siguientes datos y conviértelos a la notación científica. Trabaja en tu cuaderno.

1. Extensión de Australia: 7 682 300 km^2
   En notación científica:

2. La superficie del océano Atlántico tiene una extensión de 166 241 000 km^2.
   En notación científica.

3. Una onza es igual a 28.3495 g.
   En notación científica:

4. La constante para convertir centímetros en pulgadas es 0.3937008.
   En notación científica:

Muestra tus resultados a tus compañeros(as) de grupo. Si hay alguno que sea incorrecto, corrígelo.

A continuación encuentras una lista de números, y a la derecha de cada uno su representación en notación científica. Tú debes decidir, en forma individual, si la conversión se realizó correctamente y por qué.

a) 58 000 000 = 5.8×10^{7}. ¿Es correcta la conversión? ¿Por qué?

b) 0.000000854 = 8.54×10^{-7}. ¿Es correcta la conversión? ¿Por qué?

c) 0.000145 = 14.5×10^{-3}. ¿Es correcta la conversión? ¿Por qué?

d) 78 000 000 000 000 = 7.8×10^{13}. ¿Es correcta la conversión? ¿Por qué?

e) 0.00000000067 = 67×10^{-9}. ¿Es correcta la conversión? ¿Por qué?

Cinco alumnos(as) designados por el profesor darán a conocer la respuesta respectivamente de cada cuestión. Si no hay acuerdo en el grupo, el profesor dirá cuáles son las respuestas correctas. Si tienes errores, corrígelos.

31 COMPRENDER ANTES QUE RECORDAR ES DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

38-2 Repaso parcial de los conocimientos adquiridos Integración de los conocimientos adquiridos

Hoy harás un alto en tus actividades para analizar si has comprendido las lecciones anteriores, lo cual te servirá para revisar los conocimientos adquiridos y retomar los que aún no entiendes.

Observa el video. Comenta con el profesor(a) sobre los temas que no hayas comprendido.

Comenta y contesta con otro compañero(a) los siguientes enunciados. Si hay preguntas que ya no recuerdes, consulta las lecturas de los conceptos básicos correspondientes.

1. ¿Cómo se define un número racional?

2. ¿Entre dos números racionales, uno positivo y otro negativo, ¿cuál es el mayor?

3. ¿Cómo se procede para sumar dos números racionales negativos? ¿Cuál es el signo del resultado?

4. ¿Qué es lo característico de la notación científica?

Comparte tus respuestas con otros compañeros(as). Si las respuestas no fueron las mismas, discútelas y corrige, si es necesario.

Realiza individualmente los ejercicios. Después, forma una pareja e intercambia los cuadernos para verificar entre ambos su trabajo antes de comparar con la clave.

1. Relaciona ambas columnas; anota en el paréntesis de la derecha la letra que corresponde al resultado de la operación propuesta.

a) $\frac{2}{3} + \left[-\frac{1}{5}\right] - \left[-\frac{3}{8}\right] =$ $\qquad$ -0.180 ó $-\frac{9}{50}$ ( )

b) $\frac{2}{4} - \left[-\frac{6}{8}\right] + \left[-\frac{3}{9}\right] =$ $\qquad$ $-\frac{12}{5}$ ( )

c) $\left[-\frac{8}{10}\right] \times \frac{2}{3} =$ $\qquad$ 100 000 ( )

d) $\left[-\frac{4}{5}\right] \div \left[\frac{1}{3}\right] =$ $\qquad$ $\frac{101}{120}$ ( )

e) $5.83 \times 10^2 =$ $\qquad$ $\frac{43}{60}$ ó 0.71 ( )

f) $\frac{2}{3} + 0.25 \times \frac{1}{5} =$ $\qquad$ 583 ( )

g) $\frac{3}{5} \times (-3) =$ $\qquad$ $-\frac{16}{30}$ ( )

h) $10^2 \times 10 =$ $\qquad$ 10 000 ( )

i) $\frac{10^5}{10} =$

2. Anota a continuación lo que se te pide:

a) ¿Cómo se determina la equivalencia entre dos fracciones de igual signo?

b) Enuncia, brevemente, cómo se multiplica un número racional positivo por uno negativo.

c) Enuncia, con palabras, la ley de los signos en la división de los racionales.

CLAVE:

1. g, d, h, a, f, e, c, i; 2. a) Se busca la mayor en valor absoluto por productos cruzados; b) Se multiplica las dos fracciones y el signo será negativo, c) Al dividir dos fracciones de igual signo el cociente será positivo. Si las fracciones tienen signos diferentes el cociente será negativo.

32 ¡DEMUESTRA QUÉ SABES! II

39-2 Demostración del aprendizaje logrado
Evaluación personal de los avances logrados

Has concluido el núcleo y, por lo tanto, en esta sesión podrás evaluar el avance de tu aprendizaje al aplicar los conocimientos que adquiriste.

Observa el video; en él descubrirás algunas sugerencias que te servirán para demostrar lo que aprendiste.

Trabajarás en forma simultánea con el video, el libro y el cuaderno.

De manera individual, sigue las indicaciones que se dan para iniciar el juego de lotería.

1. Escribe el número de la pregunta formulada en el recuadro del cartón de lotería, donde se encuentra la respuesta correcta.

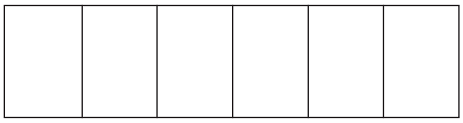
NÚMERO PRIMO ( )	10^2 ( )	$\frac{6}{9}$ ( )	*FRACCIONES EQUIVALENTES* ( )
ALGORITMO ( )	100 000 ( )	*MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO*	*NOTACIÓN CIENTÍFICA* ( )
$\frac{4}{20}$ ( )	*NÚMERO COMPUESTO* ( )	*FACTORIZACIÓN* ( )	$\frac{4}{15}$ ( )

2. Busca el elemento que falta en cada una de las siguientes operaciones y escríbelo en los espacios correspondientes.

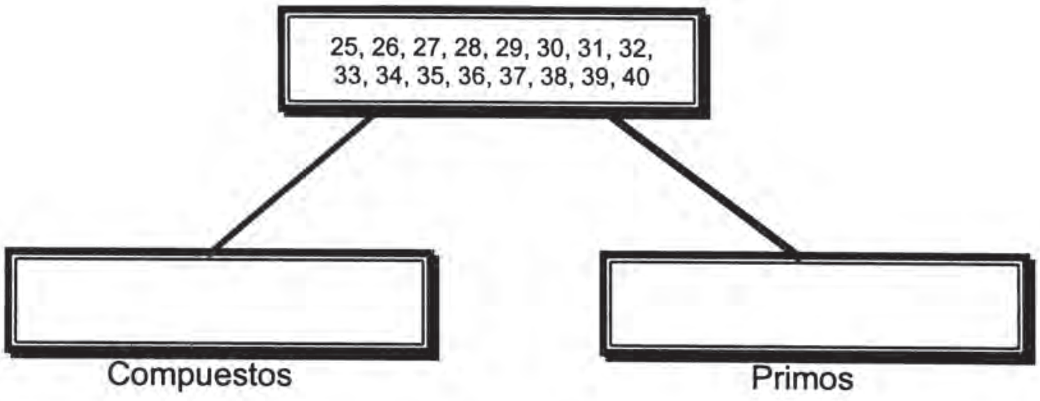
a) $\frac{2}{4} \times \frac{\square}{\square} = \frac{14}{20}$ c) $\frac{3}{5} - \frac{2}{5} = \frac{\square}{\square}$

b) $\frac{\square}{\square} \div \frac{8}{3} = \frac{15}{16}$ d) $\frac{9}{\square} + \frac{6}{\square} = \frac{15}{7}$

3. Sombrea con lápiz las partes de la figura que representa $\frac{2}{4}$ de $\frac{4}{6}$.



4. Busca los números primos y los compuestos que están comprendidos entre 25 y 40 y colócalos en el rectángulo que les corresponda.



5. Para pintar una tina se utilizó $\frac{1}{2}$ litro de pintura en la primera aplicación y $\frac{2}{3}$ de litro en una segunda.

¿Cuántos litros de pintura se aplicaron a la tina?

Una vez concluida tu evaluación, espera las siguientes respuestas que te proporcionará tu maestro(a); en caso de existir error, corrige.

33 ¡DEMUESTRA QUÉ SABES! I

24-3

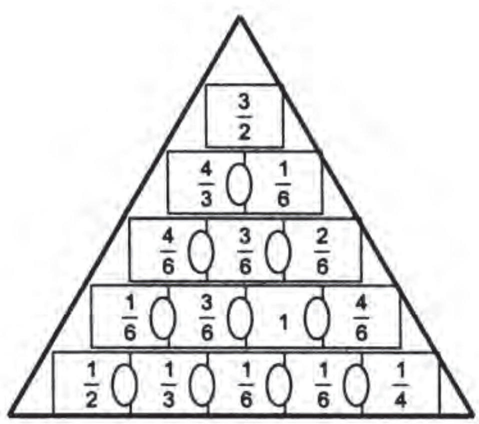
Demostración del aprendizaje logrado
Evaluación personal de los avances logrados

Has terminado el núcleo; es el momento de reflexionar sobre el esfuerzo realizado. En esta sesión valorarás tu trabajo para mejorarlo cada vez más.

Observa el video; en él encontrarás algunas sugerencias que te servirán para desarrollar el trabajo pedido. Ten a mano tu cuaderno y el libro de matemáticas.

Trabaja individualmente los ejercicios que están enseguida.

1. Relaciona los números vecinos del siguiente triángulo; para ello, sigue las instrucciones que se dan en el video.



Continúa con tu evaluación sin la ayuda del video y en forma individual, realiza lo que se indica.

2. Relaciona las columnas escribiendo en el paréntesis de la izquierda la letra que tenga la respuesta correcta de las operaciones señaladas. Copia en tu cuaderno la columna de los paréntesis.

1. ( )	$\left(\frac{-3}{4}\right)(-0.2) =$	a)	$8\frac{1}{3}$
2. ( )	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 =$	b)	0.65
3. ( )	$\frac{-8}{12} + 2 + \left(-\frac{1}{3}\right) =$	c)	$\frac{1}{8}$
4. ( )	$\left(\frac{4}{9}\right)^2 =$	d)	$\pm\frac{4}{5}$
5. ( )	$5 \div \frac{3}{5} =$	e)	1
6. ( )	$\sqrt{\frac{16}{25}} =$	f)	$\frac{16}{81}$
7. ( )	$\left(\frac{25}{35}\right)^1 =$	g)	$\frac{3}{20}$
8. ( )	$(0.25) - (-0.4) =$	h)	$\frac{25}{35}$

3. Resuelve los siguientes problemas:

a) ¿Cuántos mosaicos cuadrados de $\frac{2}{5}$ m por lado, se necesitan para cubrir una superficie de $1\frac{1}{5}$ m de ancho y $8\frac{2}{5}$ m de largo?

b) La base cuadrada de una pirámide mide 2 704 m^2. ¿Cuánto mide cada lado de la base?

Al concluir la evaluación, intercambia tu cuaderno con un compañero(a), y espera las respuestas que dará el profesor(a); si tienes errores, corrígelos.

Núcleo Básico 3

ÁLGEBRA

¡Caminante! Aquí yacen los restos de Diofanto. Los números pueden mostrar, ¡oh maravilla! la duración de su vida, cuya sexta parte constituyó la hermosa infancia.

Había transcurrido además una duodécima parte de su vida cuando se cubrió de vello su barba.

A partir de ahí la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.

Pasó, además, un quinquenio y entonces lo hizo dichoso el nacimiento de su primogénito.

Este entregó su cuerpo y su hermosa existencia a la tierra, habiendo vivido la mitad de lo que su padre llegó a vivir.

Por su parte Diofanto descendió a la sepultura con profunda pena, habiendo sobrevivido cuatro años a su hijo.

Dime, caminante, cuántos años vivió Diofanto hasta que le llegó la muerte.

$$x$$

$$\frac{x}{6}$$

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12}$$

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7}$$

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5$$

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2}$$

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

Fuente: Matemáticas.
Miguel de Guzmán y otros.
Ed. Anaya, 1988.

De los números a las letras

La palabra **álgebra** se ha reducido equivocadamente a la manipulación de un código de letras y números, exponentes y radicales, igualdades y desigualdades que se aprenden a partir de 8o. grado.

La utilización de letras en matemáticas se remonta hasta la época de los griegos que escribían los números mediante letras. Lo mismo puede decirse de la cultura romana. Sin embargo, el álgebra comienza cuando los matemáticos empiezan a interesarse por las operaciones que se pueden hacer con *cualquier número*, más que los números mismos. Ese *cualquier número* se representa con una letra y se da así, el paso de la aritmética, que se interesa por los números concretos, al álgebra.

Cada rama de la matemática tiene su **álgebra**: sus sistemas simbólicos que permiten encontrar resultados con la manipulación apropiada de códigos, aumentando la rapidez y disminuyendo la posibilidad de equivocarse, o al menos facilitando la corrección de errores.

En este grado utilizaremos sistemas simbólicos para representar las transformaciones, que llamaremos **funciones**, sobre los números enteros y los fraccionarios. En 7º grado ya estuviste trabajando con expresiones que incluían el uso de literales; monomios, polinomios, ecuaciones,... y aprendiste a realizar operaciones entre algunas de tales expresiones. Eso es parte del paisaje algebraico por el cual vas a continuar transitando, pero como en todo viaje conviene conocer un poco de historia acerca de algunos lugares, donde acamparemos por largos ratos.

“En un principio, las operaciones con números cualesquiera se describían con un montón de palabras:

¿Cuánto vale la cosa que si se *triplica y se añade diez*, *vale el cuadrado de la cosa*?

Por el uso del lenguaje natural, o sea de la palabra se le llamó **álgebra retórica.**

Luego, los matemáticos se inventaron una especie de taquigrafía para decir lo mismo, pero en menos espacio. Así:

Tres veces cosa más diez, es cosa por cosa. ¿Cuánto es la cosa?

Se inició, así el período del **álgebra sincopada**, es decir abreviada. La cosa, era el término técnico para la incógnita.

Hacia el siglo XVI los matemáticos ya se habían dado cuenta de que sería mejor tener símbolos para *la cosa* buscada, es decir, para la *incógnita* (x) y para los números que intervenían en las ecuaciones cuando no importaba qué números concretos debían ser.

En esta época del **álgebra simbólica** el problema anterior ya se expresaba así:

¿Cuánto es x si $3x + 10 = x^2$?

Al darse cuenta de que el método para resolver una ecuación como ésta sirve igual si, en lugar de 3 y 10, hay otros números cualesquiera, el problema tomó la forma más abstracta:

Hallar x tal que $ax + b = x^2$

El comienzo del álgebra: los árabes

El álgebra es, sobre todo, una invención de los árabes, y su expansión hacia Europa en el siglo XII, tuvo lugar gracias al trasvase de la cultura que se desarrolló en la península Ibérica en este período.

Harun al –Rashid, el sultán de Bagdad que aparece en las **Mil y una Noches** fue un gran protector de las ciencias y de las letras, como también su hijo Al- Mamun. Durante el reinado de éste en el siglo IX, vivió en Bagdad el mejor matemático de la época, Al-Khowrizmi, que escribió, hacia el año 825, una obra titulada **Aljabrw' al Muqabalah** (Ciencia de la restauración u oposición) y que constituía el primer tratado de álgebra...

La palabra **jabr** significa reunir, juntar o restaurar y así, si se tiene

$$bx + 2q = x^2 + bx - q$$

Mediante al –**jabr** (sumar o restaurar lo que está restando) resulta

$$bx + 3q = x^2 + bx$$

y de aquí, mediante **al- Muqabalah** (restar u oponer lo que se está sumando), resulta

$3q = x^2$ (Tomado de De Guzmán Miguel y otros. Matemáticas)

Iniciaremos el núcleo recordando y avanzando en el uso y comprensión de una herramienta muy importante para la representación de conceptos matemáticos: **el plano cartesiano.**

En años anteriores trabajaste en dicho plano cuando hiciste representaciones de parejas de números naturales, y enteros de frecuencias mediante líneas y barras, cuando encontraste la figura simétrica de otra, respecto a un eje, etc. Ahora necesitaremos ampliar ese plano para trabajar con los números racionales y para representar funciones y otras expresiones algebraicas.

34

29-3

EJES QUE NO SON DE CARRETA

Plano cartesiano
Conocimiento del sistema de ejes coordenados

Ya has utilizado la recta numérica como un valioso auxiliar para representar gráficamente números naturales, fraccionarios y enteros.

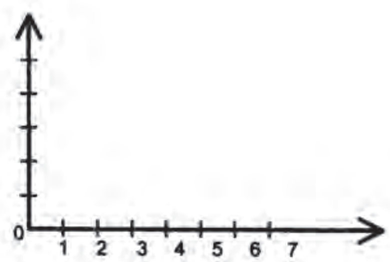
Sin embargo, para describir la posición de un punto en el plano, no basta la recta numérica, debido a que cada punto del plano se representa por un par de números ordenado. De ahí que el manejo acertado de esta valiosa herramienta matemática sea importante para la geografía, la marina y la aviación

La comprensión de expresiones algebraicas se amplía cuando estas se representan en el plano; por ello te invitamos a un breve paseo por este espacio bidimensional donde ya has estado.

Con un compañero(a) haz en tu cuaderno, ojalá cuadriculado, los siguientes ejercicios:

a) Traza dos semirrectas que parten del mismo origen, formando un ángulo recto.

b) Elige una unidad de longitud y marca puntos sucesivos en ambas semirrectas. Señala el origen con el número cero.



c) Señala los puntos cuyas **coordenadas** son:

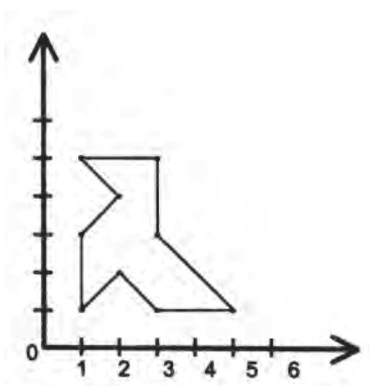
(1,1); (3,1); (5,1); (1,3); (1,5); (3,5); (3,3); (2,2); (2,4)

¿Cuál es el orden que sigues para representar cada punto?

RECUERDA: En la pareja ordenada (5,1), la primera componente se toma sobre la línea horizontal y la segunda sobre la vertical.

¿Cómo se determina, entonces el punto del plano cuyas coordenadas son (5,1)?

d) Una vez tengas los 9 puntos, trata de unirlos con segmentos que no se corten.



¡Dibújale un ojo y cualquier otro complemento que lo aproxime más al animal que te imagines!

e) ¿Qué pasará si prolongas cada una de las semirrectas hacia la izquierda y por debajo del origen?

¿Cuáles números utilizarías para designar puntos en dichas prolongaciones? ¡Hazlo!

f) Ahora toma como ejes de simetría cada una de esas rectas y encuentra la figura simétrica a la dada.

Observa el video. Si observas con interés, te darás cuenta del procedimiento que se utiliza para representar en el plano una pareja ordenada por medio de un punto. Al terminar, comenta con un compañero(a) lo que hayas aprendido.

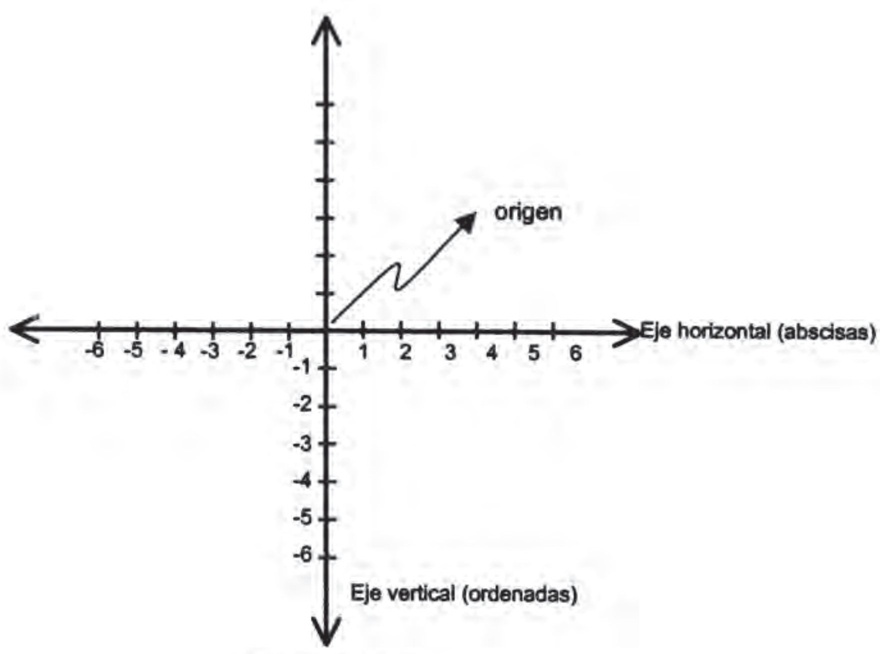
Intégrate a un equipo y lee el texto:

PLANO CARTESIANO

Un navegante o cualquier persona que utiliza instrumentos que sirvan para orientarse o para llegar a un lugar determinado, usa herramientas que son comunes. La brújula y la rosa de los vientos.

La idea de representar puntos en el plano mediante parejas de números se debe al filósofo y matemático francés René Descartes (1596 – 1660). Por tal motivo se le llama **plano cartesiano.**

Para hacer visible la idea del plano cartesiano, se acostumbra trazar dos rectas numéricas, una en posición horizontal y otra en posición vertical, para que sean perpendiculares. El punto de intersección de la dos rectas es el que corresponde a cero y recibe el nombre de origen (0, 0). A estas dos rectas se les llama **ejes coordenados.**



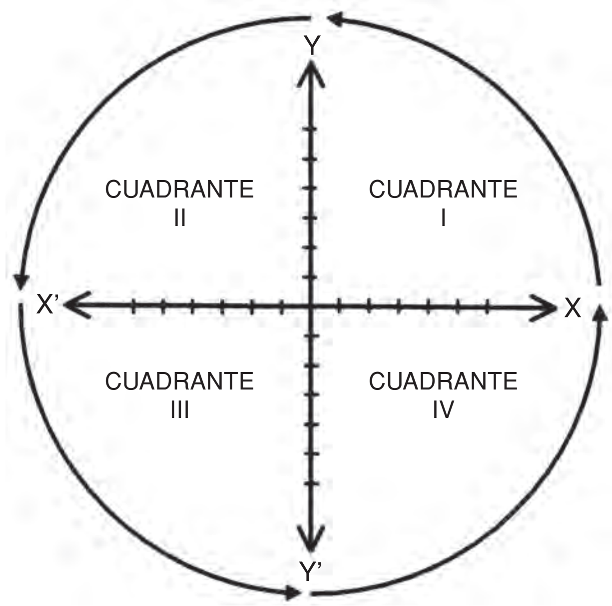
Plano cartesiano

La graduación en los ejes es arbitraria y se determina según se necesite en cada caso.

Al **eje horizontal** se llama eje de **abscisas** o de las x.

Al **eje vertical** se le denomina eje de las **ordenadas** o eje de las y.

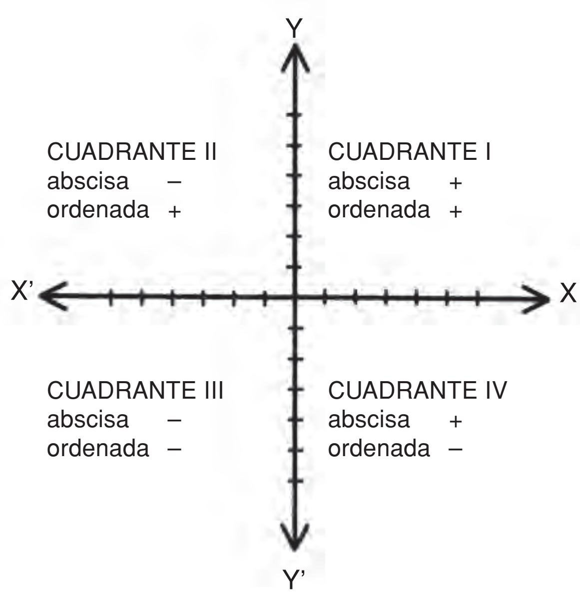
Los ejes dividen al plano en cuatro partes llamadas **cuadrantes**. Los cuadrantes se simbolizan con números romanos. El orden de los cuadrantes se establece en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj y se inicia en el cuadrante superior derecho.



Una vez se haya determinado el plano cartesiano, se está en posibilidad de representar **pares ordenados de números** en dicho plano.

Si se tiene la pareja ordenada (**a, b**) hay que considerar que **a** es la **primera componente** y se localiza en el eje de las abscisas, por lo tanto se le llama **abscisa del punto**. En tanto que **b** es la **segunda componente** y se localiza en el eje de las ordenadas; así pues, se le llama **ordenada del punto.** Al par ordenado también se le conoce como las **coordenadas de un punto.**

Una vez hechas estas consideraciones es importante señalar que los valores en cada cuadrante del plano cartesiano se representan así:



A los puntos se les designa con letras mayúscula del alfabeto (A, B, C, D, etc. ...)

Ejemplos:

1. C = (2, 4) .... primer cuadrante

2. D = (–2, 4) .... segundo cuadrante

3. B = (–2, –4) .... tercer cuadrante

4. A = (2, –4) .... cuarto cuadrante

Con estos elementos se pueden localizar puntos en el plano. Graficar un par ordenado de números significa localizar un punto en el plano cartesiano.

¿Cómo se logra esto?

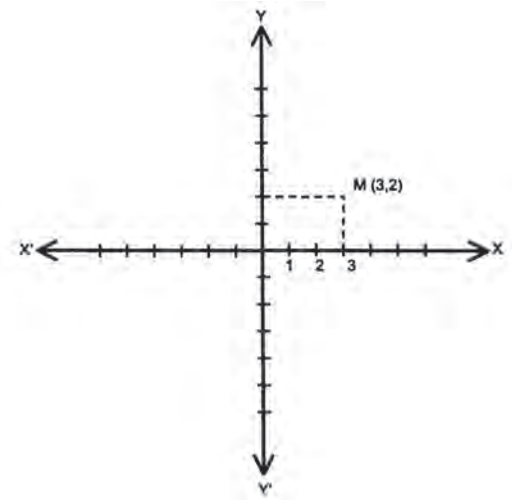
Supóngase que se necesita localizar el punto M cuyas coordenadas son (3,2).

Se procede de la siguiente manera.

1. Se localiza en el **eje de abscisas** la "primera componente" (en este caso 3) de la pareja ordenada. A partir de ese punto se traza también una recta punteada paralela al **eje de las ordenadas.**

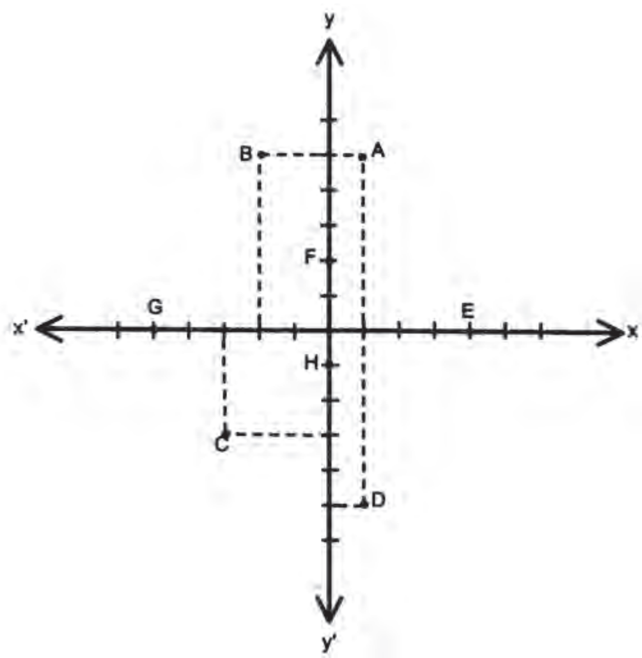
2. Se localiza en el **eje de las ordenadas** la "segunda componente" (en este caso 2) de la pareja ordenada. Se traza también una recta (punteada) paralela al **eje de las abscisas.**

3. En el cruce de las rectas punteadas se localiza el punto **M**, que representa a la pareja.



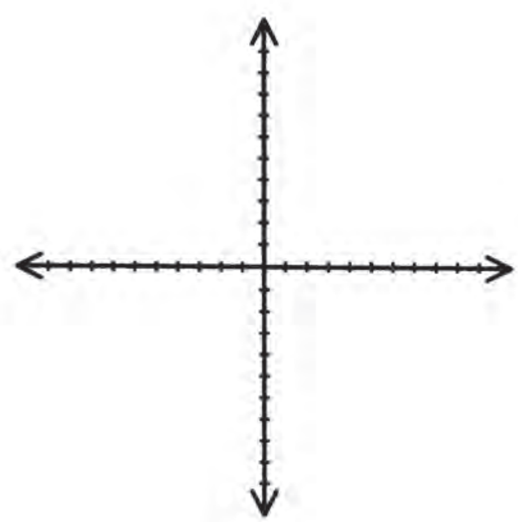
Ejemplos:

Localiza en un plano cartesiano los siguientes pares ordenados: A (1,5), B (–2,5), C (–3,–3), D (1, –5), E (4, 0), F (0, 2), G (–5, 0), H (0, –1), I (0, 0)



Al adquirir la habilidad del uso del plano cartesiano, podrás desarrollar la capacidad de representar e interpretar gráficamente expresiones algebraicas; asimismo, se te facilitará el aprendizaje de otros temas de nivel superior.

Con tus compañeros(as) de equipo, dibuja en una cartelera o en el tablero, un sistema de ejes coordenados y con base a él, organicen un diálogo en el que se discutan respuestas a las siguientes preguntas:



1. ¿Qué son los ejes coordenados? ¿Qué importancia tiene el trazado de ellos?

2. ¿Cuál es el eje de las abscisas?

3. ¿Cuál es el eje de las ordenadas?

4. ¿En cuántas partes dividen los ejes coordenados al plano cartesiano?

5. ¿Cómo se llaman estas partes? ¿Cómo se enumeran?

6. ¿Cuál es la ordenada de un punto? ¿Qué nombre recibe la otra componente?

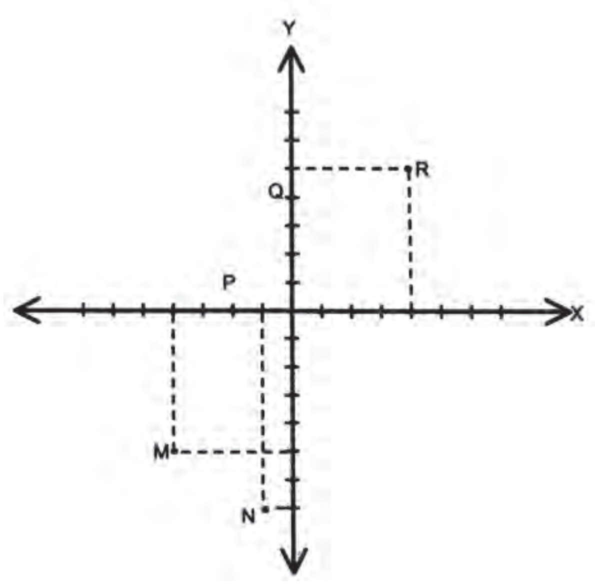
7. Distribúyanse en dos grupos A y B. Un integrante del grupo A da las coordenadas de un punto para que éste sea representado en un plano por un integrante del grupo B. Después, intercambian.

Ustedes pueden modificar o completar las reglas del juego.

El plano cartesiano también puede dibujarse en el piso. Si éste tiene baldosas se facilita más la localización de los puntos.

Ahora trabaja individualmente, en tu cuaderno.

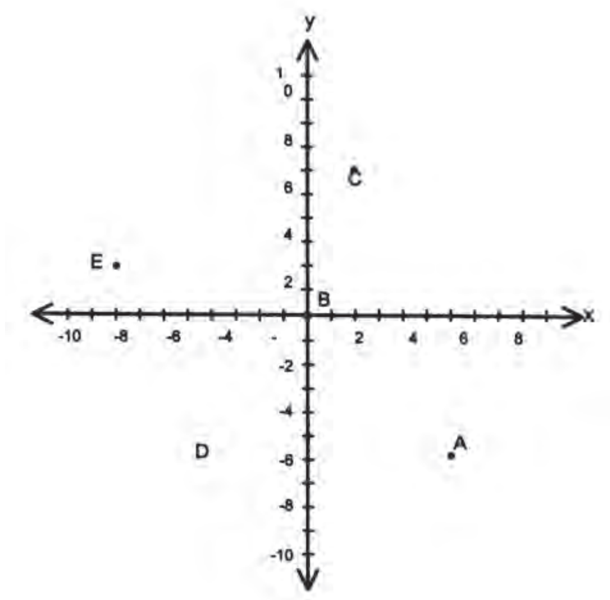
- Localiza en el plano cartesiano los siguientes pares ordenados: A (5, 1); B (1, 5); C (–5, –4); D (5, 4); E (1, –1); F (–1, 1); G (7, 0); H (0, 7); I (–2, 0); j (0, –7).



- Encuentra las coordenadas de los puntos M, N, P, Q, R.

- Encuentra las coordenadas de los puntos representados en el sistema de ejes coordenados y anótalas en el lugar correspondiente.

A (,); B (,); C (,); D (,); E (,)



Intercambia tu cuaderno con el de otro compañero(a) y verifica si han trabajado bien. En caso de duda consulta con otros compañeros(as) o con el profesor(a).

35 INFINIDAD DE PUNTOS

87-2

Regiones en el plano
Localización de regiones de puntos en el plano

La representación gráfica de expresiones algebraicas puede estar constituida por una serie infinita de puntos que ocupe toda una región del plano. ¿Has visto cómo se realiza?

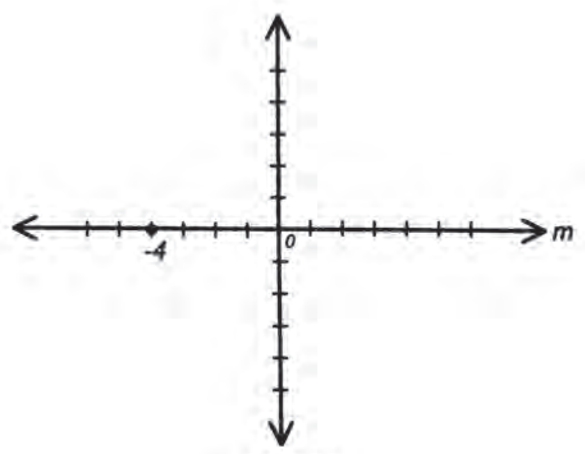
Con dos compañeros(as) vas a comprobar cómo puedes representar en un plano cartesiano alguna expresión algebraica (o el conjunto de las soluciones de dichas expresiones).

• ¿Cuál es el valor de m que hace cierta la igualdad?:

$$5 + m = 1?$$

Representa en un sistema de coordenadas esa solución; ella es la gráfica de la expresión dada porque si a

$$5 + m = 1 \quad \text{le restamos 5 a ambos miembros}$$
$$5 - 5 + m = 1 - 5 \quad \text{se obtiene}$$
$$m = -4$$



5 + m = 1

• n ≤ 5 (n es menor o igual que 5).

La expresión n ≤ 5 es una desigualdad. Es necesario considerar que una desigualdad es una expresión que consta de dos miembros y en la cual el primer miembro puede ser mayor (>), menor (<), mayor o igual (≥) menor o igual (≤), que el segundo; y que tiene propiedades diferentes a la igualdad.

¿Cuáles son los números enteros que hacen cierta esa expresión algebraica?

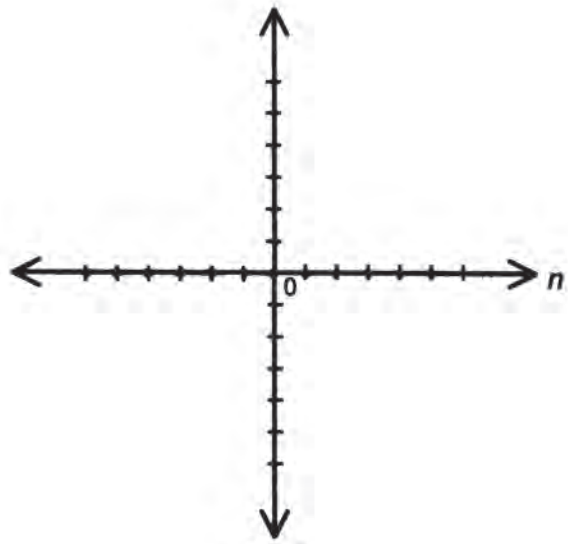
¿Es 5 un elemento del conjunto de las soluciones? ¿Por qué?

¿Es 6 un elemento del conjunto de las soluciones? ¿Por qué?

¿Que puedes decir de 0 y de –1?

¿Cuál es entonces el conjunto de las soluciones en los números enteros?

Es notorio que cualquier entero negativo hace cierta la desigualdad anterior. Por lo tanto, a partir de 5 hacia la izquierda de la recta numérica, hay infinidad de puntos que representan los números que cumplen con las condiciones necesarias en este caso.



$n \leq 5$

Observa atentamente el video. Conocerás cómo se construye la gráfica de algunas expresiones algebraicas sencillas, pero muy especiales. Al finalizar, reúnete con dos compañeros(as) e intercambia ideas respecto a lo que te haya parecido interesante.

Lee en silencio el siguiente texto:

REGIONES EN EL PLANO

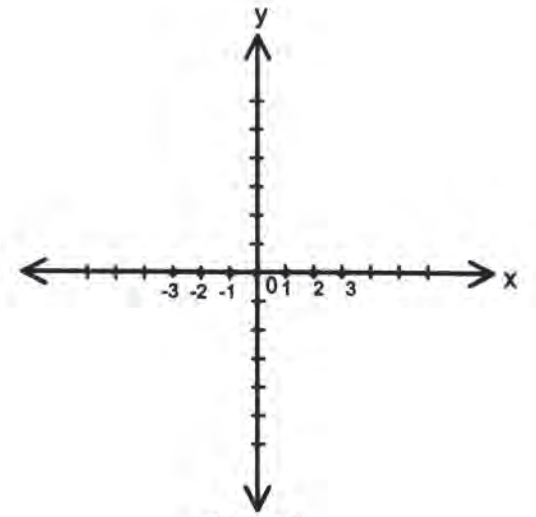
Una vez que se conoce el procedimiento para representar un par ordenado de números en el plano cartesiano, es el momento indicado para proceder a representar expresiones algebraicas sencillas. La gráfica de una expresión algebraica puede ser, como ya viste, desde un solo punto hasta infinidad de puntos que cubran toda una región en el plano.

Veamos otros ejemplos:

a) $\mathbf{-3 \leq x < 4}$ (***x*** es mayor o igual que –3 y menor que 4).

Para darse cuenta de cuáles son los números que hacen cierta la expresión, es conveniente descomponerla y hacer la estimación correspondiente. Su significado es: $-3 \leq x$ y $x < 4$.

Entonces, los valores enteros que hacen cierta la expresión, son: –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3.



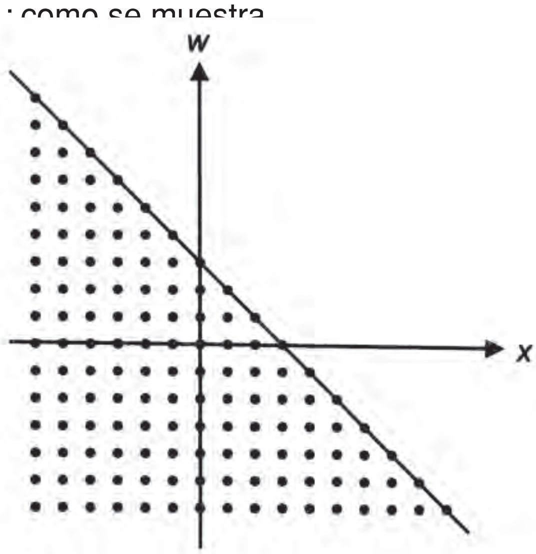
$-3 \leq x < 4$

b) **$w + x \leq 3$** (w más x, menor o igual que 3).

Al hacer una estimación, puede verse que hay infinidad de pares ordenados de números enteros que hacen cierta la expresión, ya que cualquier adición cuyo resultado sea menor o igual que 3, satisface la condición dada. Considérense algunas sumas.

$2 + 1 = 3$, $1 + 2 = 3$, $0 + 3 = 3$, $-1 + 4 = 3$, $-2 + 5 = 3$, etc.
$2 + 0 < 3$, $1 + 1 < 3$, $0 + 2 < 3$, $-1 + 3 < 3$, $-2 + 4 < 3$, etc.
$1 + 0 < 3$, $0 + 1 < 3$, $-1 + 2 < 3$, $-2 + 3 < 3$, $-3 + 4 < 3$, etc.
$0 + 0 < 3$, $-1 + 1 < 3$, $-2 + 2 < 3$, $-3 + 3 < 3$, $-4 + 4 < 3$, etc.

Entonces se representan los pares ordenados (2, 1), (1, 1), (0, 2), (–1, 3), (2, 4), (1, 0), (0, 1), (–1, 2), (–2, 3), etc.; como se muestra



$w + x \leq 3$

Se puede comprobar que ningún punto situado por arriba de la recta, hace cierta la expresión $w + x \leq 3$.

Los puntos que representan los pares ordenados (x, w), que hacen cierta la expresión, ocupan una región del plano.

A esta representación se le llama comúnmente **triángulo infinito.**

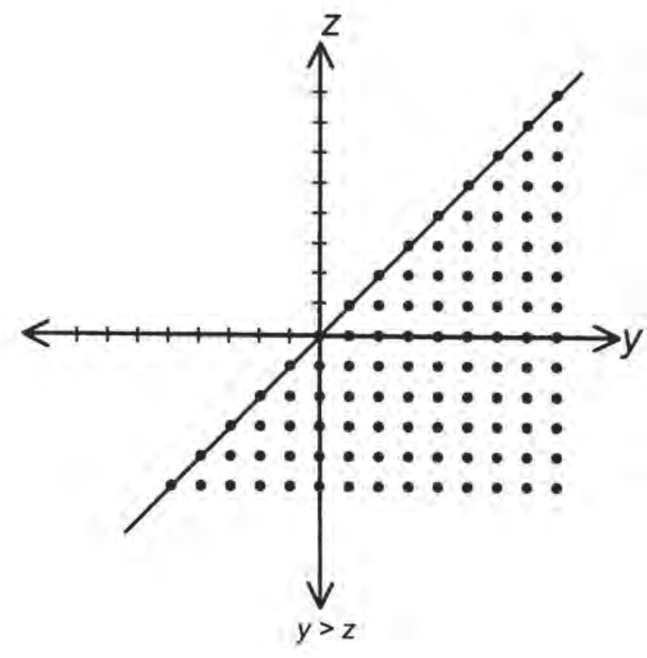
c) **$y > z$** (y mayor que z).

Al efectuar la estimación respectiva, se aprecia que nuevamente hay infinidad de pares ordenados de números enteros que hacen cierta la expresión.

Véanse algunos ejemplos.

5 > 4, 4 > 3, 3 > 2, 2 > 1, 1 > 0, 0 > –1, –1 > –2, etc.
5 > 3, 4 > 2, 3 > 1, 2 > 0, 1 > –1, 0 > –2, –1 > –3, etc.
5 > 2, 4 > 1, 3 > 0, 2 > –1, 1 > 2, 0 > 3, –1 > –4, etc.
5 > 1, 4 > 0, 3 > –1, 2 > –2, 1 > –3, 0 > –4, –1 > –5, etc.

Así, los pares ordenados que deben estar en al gráfica son: (5, 4), (4, 3), (3, 2), (2, 1), (1, 0), (0, –1), (–1, –2), (5, 3), (4, 2), (3, 1), (2, 0), (1, –1), (0, –2), (–1, –3), etc., como se observa a continuación.



Ningún punto por arriba del lado del triángulo que está frente al ángulo recto, hace cierta la desigualdad y > z.

La infinidad de puntos (y, z) cuyas coordenadas hacen ciertas la expresión algebraica ocupa una región del plano cartesiano.

Saber representar expresiones algebraicas en el plano cartesiano es útil para resolver muchas situaciones que se plantean durante el aprendizaje de las matemáticas y de otras asignaturas que integran el plan de estudios de la secundaria.

Ahora intégrate a un equipo, comenta los aspectos interesantes y nuevos del video y de la lectura y luego haz los siguientes ejercicios:

- Completa en forma oral los siguientes enunciados:

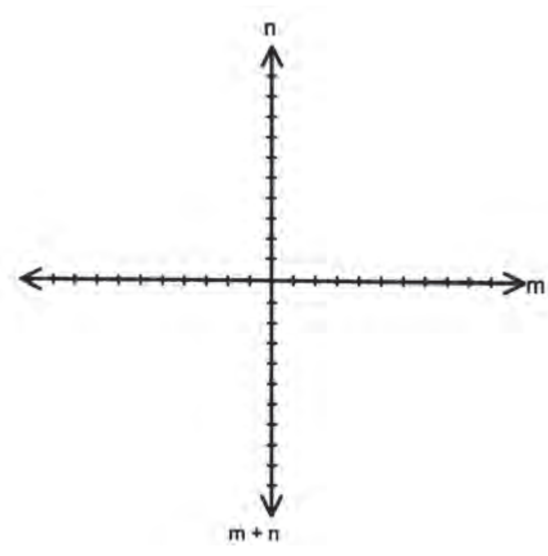
1. La expresión $6 + y = 2$ es una...
2. La expresión $2 + 5 > n$ es una...
3. La expresión $5 > x = 2$, se lee...

- Copia en tu cuaderno las siguientes expresiones algebraicas y, para cada una de ellas, escribe cinco pares ordenados que las hagan ciertas.

a) $m = m$ b) $x + y = 5$ c) $w < y$

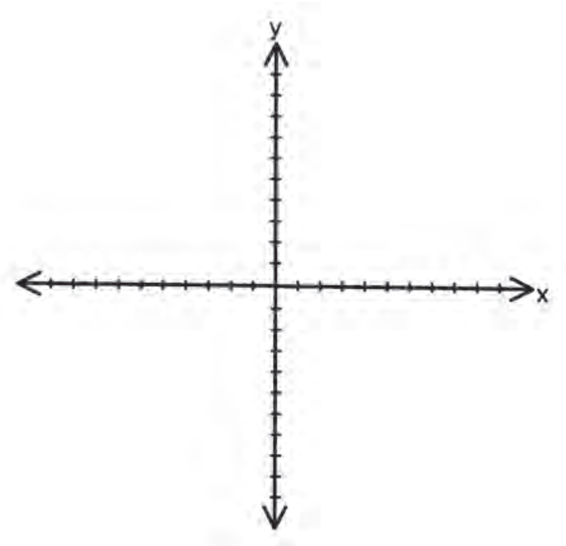
Compara tus respuestas con las de otro equipo. En caso de desacuerdos discutan y argumenten sus puntos de vista. Si es necesario, consulten con el profesor(a).

Continúa trabajando en equipo. Determina varios pares ordenados que hagan cierta la expresión $m + n \geq 6$; traza la gráfica y, una vez dibujada la recta que limita la región respectiva, coloca los puntos del triángulo infinito correspondiente.



Compara tu gráfica con la de otro equipo. Si hay errores, corrígelos.

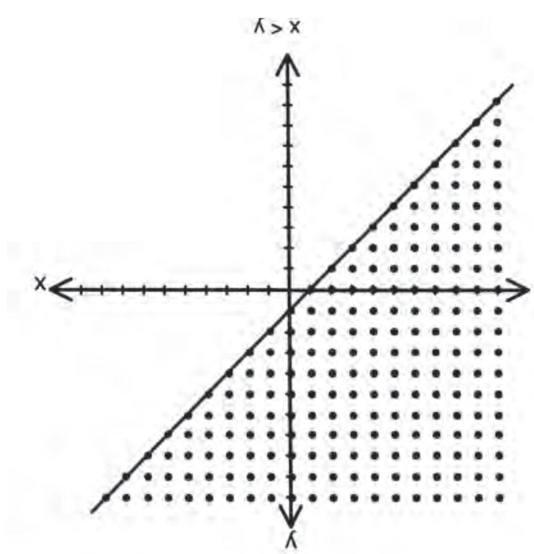
En forma individual, construya la gráfica correspondiente a la desigualdad $x < y$. Una vez trazada la recta que limita la región del plano en que se localiza la infinidad de puntos que la hacen cierta, completa el triángulo infinito que se obtiene.



Compara tu gráfica con la clave de esta sección, que aparece enseguida. Si hay errores, corrige.

CLAVE

Pares ordenados: (3, 4), (2, 3), (1, 2), (0, 1), (–1,0), (–2, –1), etc., (2, 4), (1, 3), (0, 2), (–1, 1), (–2, 0), (–3,–1), etc., y así sucesivamente.



36 UNO DEPENDE DE OTRO

3-26 Funciones
Concepto, tabulación y gráfica de funciones

Muchas cosas que sucedan a nuestro alrededor dependen unas de otras. El clima de una región depende, entre otras cosas, de la latitud y la altitud en que se encuentre ubicada.

Intégrate a un grupo para trabajar las siguientes situaciones:

Situación 1: *Bocadillos y ganancias*

- Por cada bocadillo que vende Luis, se gana \$ 50.
  ¿Cuánto gana por la venta de 2, 3, 4, 5, 6... bocadillos?

a) ¿De qué depende la ganancia de Luis?

b) En una tabla organiza los datos:

Número de bocadillos	Operación	Ganancias ($)
1	50×1	50
2	50×2	100
3		
4		
5		
⋮	⋮	⋮
x	$50 \cdot x$	$50x$

c) Si representas por y la ganancia, ¿cuál es la ecuación que da cuenta del valor de y para un número cualquiera x de bocadillos?

d) ¿De qué depende el valor de y?

Observa que los valores de x y y varían; el de x se escoge arbitrariamente, el de y depende exclusivamente de x. Por eso se dice que x es **variable independiente** mientras que y (ganancias) es la **variable dependiente.**

e) La persona para quien trabaja Luis, decide incrementarle las ganancias (seguramente para compensar el transporte) y le ofrece $4 000 fijos independientes del número de bocadillos vendidos.

– ¿Qué modificación habría que hacerle a la tabla anterior?

– ¿y a la ecuación que obtuviste en el literal e? ¡Escríbela!

Situación 2: *Densidad del vidrio*

a) ¿Qué es la densidad de una sustancia?

Las densidades de los líquidos y de los sólidos se acostumbran expresar en gramos por centímetro cúbico (g / cm^3).

La densidad del vidrio es de 2.5 g/cm^3 aproximadamente; esto quiere decir que cada centímetro cúbico de vidrio tiene una masa de 2.5 gramos.

Volumen de vidrio (cm^3)	Operación	Masa (g)
1	2.5×1	2.5
2		
4		
5		
. . . X		
Entrada	Salida	

$$\left(\frac{g}{cm^3}\right)\left(cm^3\right) = \frac{g \times \cancel{cm^3}}{\cancel{cm^3}} = g$$

Con base en la información anterior, ¿cuál es la masa de 2, 3, 4, 5, ... x centímetros cúbicos de vidrio?

b) ¿Cuáles son las variables? ¿Cuál es la dependiente?

c) Escribe la ecuación que expresa el valor de la variable dependiente **en función** de la independiente.

En las dos situaciones que acabas de trabajar, es muy importante que precises cómo cambian los datos de la primera columna de las tablas para responder a los requerimientos de las preguntas; observa también cómo las expresiones algebraicas (ecuaciones) tratan de capturar ese proceso de trasformación.

En la primera situación las ecuaciones son:

$y = 50x$
$y = 50x + 4\,000$

En la segunda, la ecuación es: $y = 2.5x$

Observa el video; en él verás que hay cosas que dependen de otras. Comenta con tus compañeros(as) qué entiendes por función.

Con el mismo equipo lee cuidadosamente el texto:

Funciones

Existen cosas que cambian en **función** de otras. Por ejemplo, la hora del día varía en función de la posición del Sol respecto al cenit. Si se desea hacer un viaje, el costo del pasaje variará en función de la distancia del lugar que se desea visitar.

Las operaciones aritméticas con las cuales has venido trabajando son de este tipo pues ellos trasforman números en otros números.

Así, por ejemplo, las operaciones “sumar 3” o “triplicar” actúan sobre los enteros y producen otros enteros:

+3	...	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	...
	...	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...

$-4 \xrightarrow{+3} -1$

$-3 \xrightarrow{+3}$

$-1 \xrightarrow{+3}$

$0 \xrightarrow{+3} 3$

...	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
...	–12	–9	–6	–3	0	3	2	9	12	15

3x

$$-4 \xrightarrow{3x} -12$$
$$-1 \xrightarrow{3x} -3$$
$$0 \xrightarrow{3x} 0$$
$$1 \xrightarrow{3x} 3$$

De la misma manera, las operaciones adición y multiplicación trasforman parejas de enteros en enteros. Así:

$$(1, -2) \xrightarrow{+} -1 \qquad (-1, 0) \xrightarrow{\times} 0$$
$$(-4, -1) \xrightarrow{+} -5 \qquad (7, -7) \xrightarrow{\times} -49$$
$$(-4, 1) \xrightarrow{+} -3 \qquad (-4, -2) \xrightarrow{\times} 8$$
$$(7, -7) \xrightarrow{+} 0 \qquad (-5, 3) \xrightarrow{\times} -15$$

Fíjate que las operaciones son las trasformadoras; las activas en los diferentes sistemas numéricos que conoces. Naturalmente que hay casos para los que es necesario establecer condiciones que permitan realizar la operación, por ejemplo, la sustracción en los números naturales requiere que el minuendo sea mayor que el sustraendo. Esta condición se “levanta” cuando estamos en el sistema de los números enteros.

¿Qué pasa con la división en los enteros?

El concepto de función es pues muy importante en matemáticas y sin él muchos otros conceptos no habrían evolucionado hasta ser lo que son ahora.

Considérese el siguiente ejemplo:

Se desea conocer el perímetro de algunos círculos, conociendo la medida de sus diámetros. Se toma una aproximación de π = 3,1416.

Círculo 1: 10 cm de diámetro, por lo tanto P = 31.416 cm
Círculo 2 : 15 cm de diámetro, por lo tanto P = 47.12 cm
Círculo 3 : 18 cm de diámetro, por lo tanto P = 56.54 cm
Círculo 4: 25 cm de diámetro, por lo tanto P = 78.54 cm
Círculo 5: 32 cm de diámetro, por lo tanto P = 100.53 cm

Dando valores a la medida del diámetro es posible encontrar el perímetro del círculo, aplicando la regla que existe entre esos dos valores; ésta es:

$$P = \pi d$$

En esa expresión se localizan la constante π y las variables **P, d.**

Un símbolo o literal que representa un valor específico recibe el nombre de constante**.**

Un literal o símbolo que puede adquirir diferentes valores recibe el nombre de variable**.**

Así, en la expresión anterior, π sólo puede tomar un valor, por lo tanto es constante.

En cambio la medida de los diámetros varía independientemente en cada círculo y sus perímetros dependen de la medida que adquiera el diámetro. Por lo tanto **d** y **P** son variables.

En este caso, por variar independientemente de otras medidas a la medida del diámetro se le conoce como **variable independiente.**

Como la medida del perímetro depende del valor del diámetro, se le conoce como **variable dependiente.**

Asígnesele a la medida del diámetro la letra **x** y a la del perímetro la **y.**

Se puede observar que siempre que cambia el valor de x cambia el valor de y.

Esto es:

Si el diámetro es 10 cm, el perímetro es 31.416 cm.
Si el diámetro es 15 cm, el perímetro es 47.12 cm.
Si el diámetro es 18 cm, el perímetro es 56.54 cm.

Lo anterior también puede representarse así:

$$10\text{ cm} \xrightarrow{3.1416(\ )} 31.416\text{ cm}$$

$$15\text{ cm} \xrightarrow{3.1416(\ )} 47.12\text{ cm}$$

$$18\text{ cm} \xrightarrow{3.1416(\ )} 56.54\text{ cm}$$

⟸ **Estas son las imágenes que produce la función, para cada uno de los valores iniciales o pre-imágenes.**

Esta representación permite visualizar la acción del **operador 3.1416** ( ) sobre los valores de la variable independiente. El ( ) "recibe" el valor que va a ser trasformado en su imagen.

La regla de la trasformación o de funcionalidad es πd, donde el valor aproximado de π es 3.1416. Cada resultado es el perímetro P del círculo correspondiente.

$$P = \pi\, d$$

Sustituyendo P por y, d por x se tiene:

$$y = \pi x \qquad \text{o} \qquad f(x) = \pi x$$

Donde ***f*** representa la función y ***f*** (x) la imagen de x mediante ***f***.

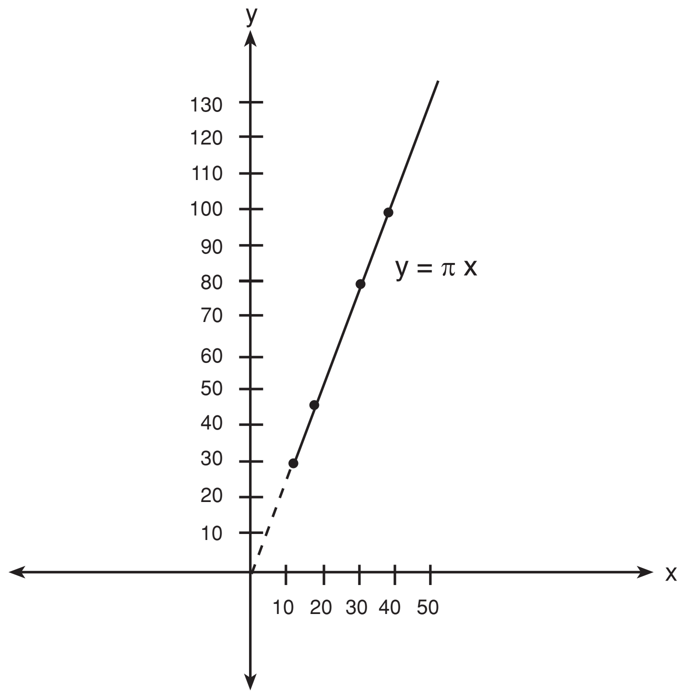
Así, de acuerdo con los valores que adquiere **x** (variable independiente) variará el valor de **y** (variable dependiente), y se formarán con cada pareja correspondiente **(x, y) o (x, *f* (x)**) los **pares ordenados o coordenadas de la gráfica.**

Los datos de **x** y **y** se pueden agrupar en una tabla, que puede ser horizontal o vertical, anotando en el primer renglón los valores de **x**, y en segundo los de **y**.

x	10	15	18	25	30	32
y = πx	31.146	47.12	56.54	78.54	94.25	100.53

x	y	Coordenadas
10	31.416	(10 , 31.416)
15	47.12	(15 , 47.12)
18	56.54	(18 , 56.54)
25	78.54	(25 , 78.54)
30	94.25	(30 , 94.25)
32	100.53	(32 , 100.53)

Estos datos pueden representarse en forma gráfica, localizando en el plano cartesiano los pares ordenados y uniendo dichos puntos.



Esta es la representación gráfica de la función: $y = \pi x$, o $f(x) = \pi x$.

Es característico de una función que a valores diferentes de x correspondan valores diferentes de y, es decir que no puede haber parejas como (x_1, a) y (x_1, b) con $a \neq b$.

Véase otro ejemplo con la siguiente función:

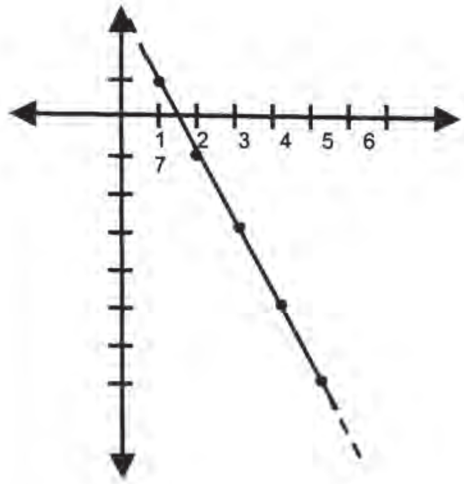
$$y = -2x + 3$$

Para realizar la tabulación se dan valores arbitrarios a **x**, pues es la variable independiente de los cuales se obtendrán los valores de **y**, la variable dependiente.

x	y
1	1
2	–1
3	–3
4	–5
5	–7

$$y = -2(1) + 3$$
$$y = -2(2) + 3$$
$$y = -2(3) + 3$$
$$y = -2(4) + 3$$
$$y = -2(5) + 3$$

De esa forma se obtienen las parejas ordenadas con las que se establecen las coordenadas de la gráfica correspondiente.



Si se localizan en la gráfica coordenadas **x**, **y**, no consideradas en la tabulación, y se sustituyen sus valores en la regla de funcionalidad, se puede comprobar que ésta se cumple.

Tómense las coordenadas (4.5, –6) para comprobar con ellas la regla:

$$
\begin{aligned}
y &= -2x + 3 \\
-6 &= -2\,(4.5) + 3 \\
-6 &= -9 + 3 \\
-6 &= -6
\end{aligned}
$$

Estas reglas se cumplen para cualquier punto de la gráfica correspondiente, la cual es única, independientemente de los valores asignados a **x**.

Una función puede ser de primero, segundo, tercero u otro grado, de acuerdo con el mayor exponente que tenga x en la ecuación, y la representación gráfica de cada una de ellas tendrá características particulares.

A las funciones cuya gráfica es una línea recta se le denomina **funciones de gráfica lineal**. Entre ellas hay unas que son muy especiales, las que **pasan por el origen** (0, 0), a estas últimas se les llama **funciones lineales** y cumplen unas condiciones particulares que vas a comprender a continuación.

Intégrate a un equipo para trabajar la función “el doble”. Alisten sus cuadernos.

1. Representa la acción de esta función (f) en algunos números racionales.

Ejemplo:

$-4 \xrightarrow{2x} -8$ o $-4 \xrightarrow{2(\ \ )} -8$ o $-4 \xrightarrow{f} -8$

Este tipo de funciones también son conocidas como **operadores multiplicativos** y son de frecuente uso en matemáticas.

2. Haz una tabla a tres columnas.

x	f (x)	Par ordenado (x, y)
–4	–8	(–4, –8)
–1		
0		
0.8		
$\frac{7}{5}$		
1.7		
3		

Tabla de la función y = 2x

3. Haz la representación gráfica de la función y = 2x
¿Pasa por el origen? ¿Cumple la pareja (0, 0) con la regla de funcionalidad?

4. Verifica si para la función u operador multiplicativo 2x o 2 ( ) son ciertas las siguientes afirmaciones:

a) La imagen de una suma es igual a la suma de las imágenes, es decir

$$¿f(a + b) = f(a) + f(b)?$$

Veamos: $a = -4$ entonces, por $f: -4 \xrightarrow{2(\ )} -8 = f(a)$

$b = 3$ entonces, por $f: 3 \xrightarrow{2(\ )} 6 = f(b)$

$a + b = -4 + 3 = -1$ entonces, por $f: -1 \xrightarrow{2(\ )} -2 = f(a + b)$

–2 es la imagen de la suma. ¿Cuál es la suma de las imágenes?

$$f(a) + f(b) = ?$$

¿Qué puedes decir de la afirmación inicial?

b) La imagen de un producto es igual al producto de las imágenes.

$$¿f(a \times b) = f(a) \times f(b)?$$

Verifícalo con ejemplos particulares.

c) Se dice también que para calcular la imagen de un operador multiplicativo en un producto de dos números a y b se puede hallar la imagen de uno de los dos números y multiplicar este resultado por el otro número. ¡Verifícalo!

d) Toma otro operador multiplicativo (triplicador, quintuplicador,...) y verifica si se cumplen las afirmaciones anteriores.

5. De acuerdo con la ecuación $y = 3x - 2$ contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las dos variables?

b) ¿Cuál de ellas es la variable independiente?

c) ¿Cuál es la variable dependiente?

d) ¿Por qué?

6. ¿Qué otro nombre recibe?

Lee en voz alta tus respuestas. Discútelas con tus compañeros(as) y corrige si es necesario.

Con un compañero(a), realiza el siguiente ejercicio.

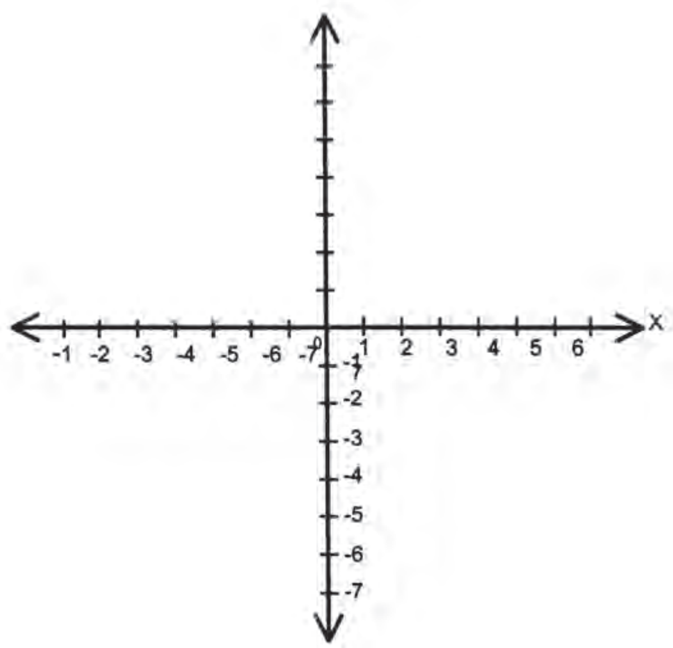
De acuerdo con la función $y = 2x - 2$

1. Tabula de acuerdo con los valores asignados a **x**.

$$y = 2x - 2$$

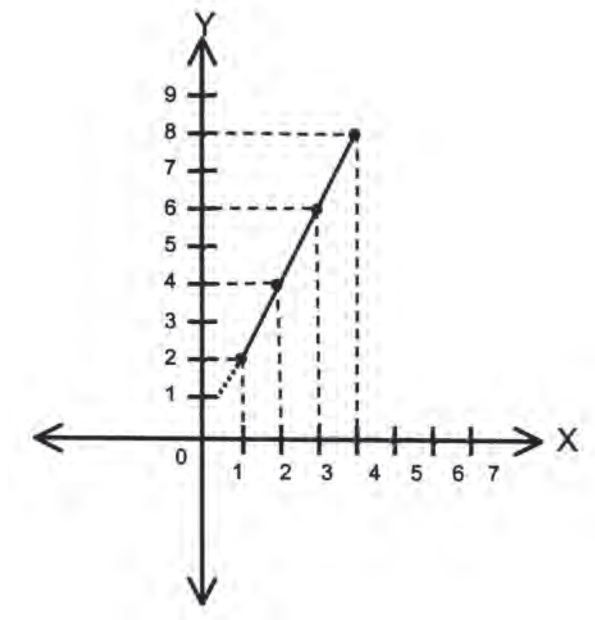
x	**y**
–2	
–1	
0	
1	
2	

2. Realiza la gráfica correspondiente.



Realiza, en equipo, el siguiente ejercicio. Trabaja en tu cuaderno.

Observa la siguiente gráfica y contesta la pregunta.



1. ¿Cuál es el valor de **y** cuando **x** = 1?

2. ¿Qué valor adquiere **y** cuando **x** = 2?

3. ¿Cuál cuando **x** = 3?

4. ¿Y cuando **x** = 4?

5. Escribe las coordenadas que resultan con esos valores.

(1,   ),   (2,   ),   (3,   ),   (4,   )

6. ¿Cuáles son los valores que toma la variable independiente?

7. ¿Cuáles los de la variable dependiente?

8. ¿Cuál es la función que determina esa gráfica?

9. Toma un par ordenado de la gráfica y comprueba las reglas.

Compara tus resultados con los de la clave. Si hay diferencia, revisa tu cuestionario y si es necesario corrige.

CLAVE

1) 2; 2) 4; 3) 6; 4) 8; 5) (1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 8) ; 6) 1, 2, 3, 4; 7) 2, 4, 6, 8; 8) f (x) = 2x o y = 2x; 9) Respuesta, abierta de acuerdo con las coordenadas que se tomen.

37 LA FUNCIÓN DEBE CONTINUAR

3-27

Las funciones y sus aplicaciones
Aplicaciones de las funciones en diferentes campos

RECUERDA: En la función: $y = 4 - x$.

1. ¿Cuál es la constante?

2. ¿Cuáles son las variables?

3. ¿Cuál es la variable independiente?

4. ¿Cuál es la regla de funcionalidad?

Seguramente has observado que en ciencias como la medicina, la física o la economía, se requiere de expresiones algebraicas y de sus representaciones gráficas para ilustrar mejor ciertos cambios que ocurren al variar algunos fenómenos. Esas son aplicaciones de las funciones.

Observa en el video algunas actividades en las que se usan las funciones. Comenta con tu grupo otras situaciones en las que puedas emplearlas.

En equipo haz la lectura del siguiente texto.

LAS FUNCIONES Y SUS APLICACIONES

El concepto de función se encuentra implícito en actividades que tienen que ver con fenómenos de cambio, y su empleo es innegable en ciencias como la física, la geometría, la medicina, etc.

Obsérvense algunos ejemplos:

Se sabe que la velocidad de la luz es de $300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$, con lo cuál se puede establecer la distancia que recorre en cuatro, cinco, seis, siete, segundos, etc.

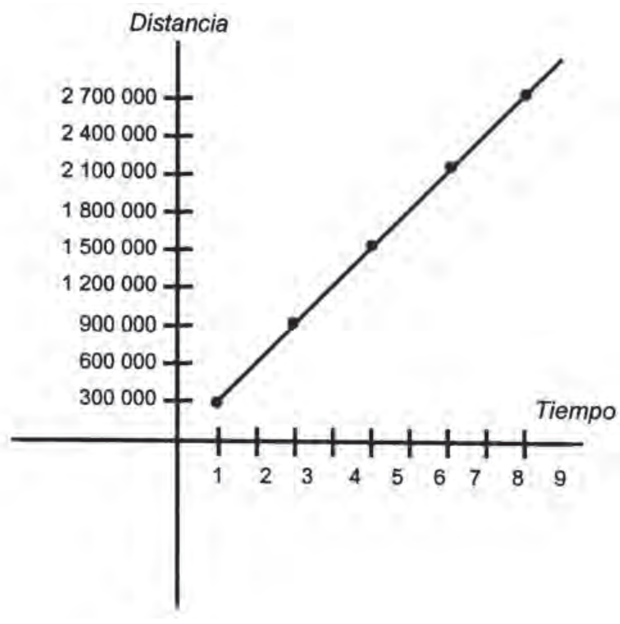
Si en un segundo recorre	300 000	km.
en tres segundos recorre	900 000	km.
en cinco segundos recorre	1 500 000	km.
en siete segundos recorre	2 100 000	km.
en nueve segundos recorre	2 700 000	km.

Se puede apreciar que la distancia que recorre la luz depende del tiempo trascurrido: por lo tanto el tiempo es la variable independiente (**x**); la distancia es la variable dependiente (**y**), y la regla de funcionalidad:

$$\text{Distancia} = (\text{velocidad de la luz})\ (\text{tiempo})$$
$$y = 300\,000\ x$$

Aplicándola, se obtiene la siguiente tabulación con la que se puede realizar la gráfica.

x	y
1	300 000
3	900 000
5	1 500 000
7	2 100 000
9	2 700 000



La gráfica muestra cómo a mayor tiempo trascurrido, mayor distancia recorrida por la luz.

Si se toman coordenadas de la gráfica no consideradas en la tabulación, puede comprobarse la regla de funcionalidad.

Tómense las coordenadas (4, 1 200 000)

$$\begin{aligned} y &= 300\,000\ x \\ 1\,200\,000 &= 300\,000\ (4) \\ 1\,200\,000 &= 1\,200\,000 \end{aligned}$$

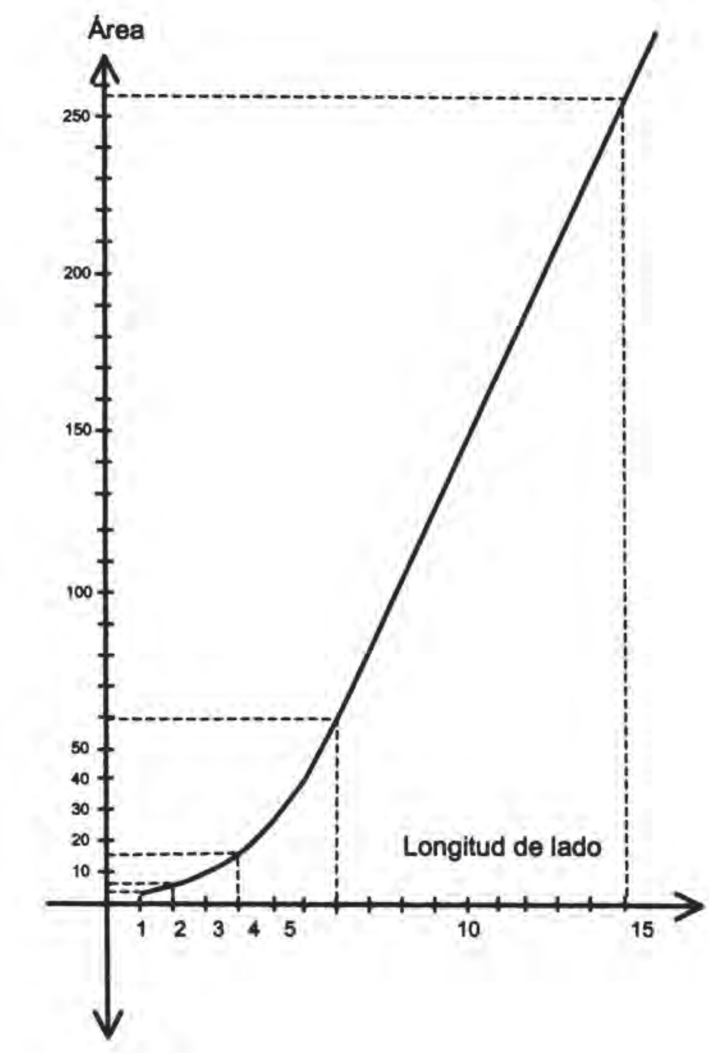
En geometría se sabe que al duplicar las longitudes de un dibujo en una escala de ampliación, su área se cuadruplica. De modo que si un cuadrado tiene de lado una unidad, su área es de 1 u^2, si tiene 2 u de lado, su área será de 4 u^2; si tiene 4 u de lado, su área será de 16 u^2, etc.

Se observa que el área del cuadrado depende de la longitud de su lado, por lo tanto, el área es la variable dependiente y la longitud del lado, la variable independiente.

Y graficando esos valores se tiene:

$y = x^2$

x	y
1	1
2	4
4	16
8	64
16	256



Se observa que las gráficas de las funciones anteriores presentan características particulares; la primera es una recta, por lo que dicha función es llamada lineal y su regla de funcionalidad es de primer grado y la de la segunda es cuadrática con la que se obtiene una curva.

Otro problema en que se utilizan las funciones es el siguiente:

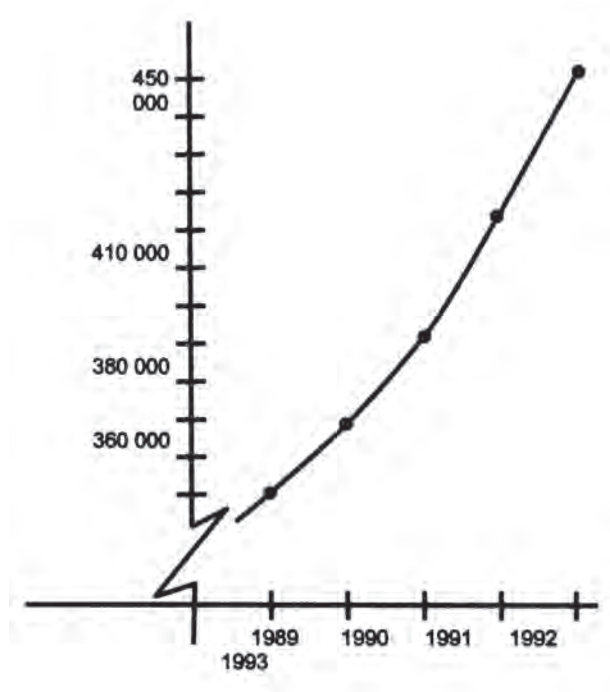
En los últimos cinco años se reportó la población de un lugar con las siguientes cifras:

1989 - - - - - - - 340 000
1990 - - - - - - - 360 000
1991 - - - - - - - 380 000
1992 - - - - - - - 410 000
1993 - - - - - - - 450 000

En este caso, los años representan la variable independiente, y la población, la dependiente.

La gráfica será la siguiente:

x	y
1989	340 000
1990	360 000
1991	380 000
1992	410 000
1993	450 000



Estas son sólo algunas aplicaciones de las funciones y, si se analiza, se encuentran en muchas otras actividades humanas.

Comenta con tu grupo los datos que se necesitan para hacer la gráfica de una función.

Reúnete con un compañero(a) y analiza el siguiente problema.

Enrique hará un viaje en su automóvil a una población que se encuentra a 240 km de distancia. ¿Cuánto tiempo tardará en llegar si maneja a una velocidad constante?

El tiempo depende de la velocidad a la que viaje, por lo tanto, ¿cuál es la variable independiente? ¿Cómo la representarías?

¿Cuál es la variable dependiente? ¿Cómo la representarías?

Dividiendo la distancia entre la velocidad a la que viaje, se encuentra el tiempo que tardará Enrique en llegar. Esto es:

$$\text{Tiempo} = \ ?$$

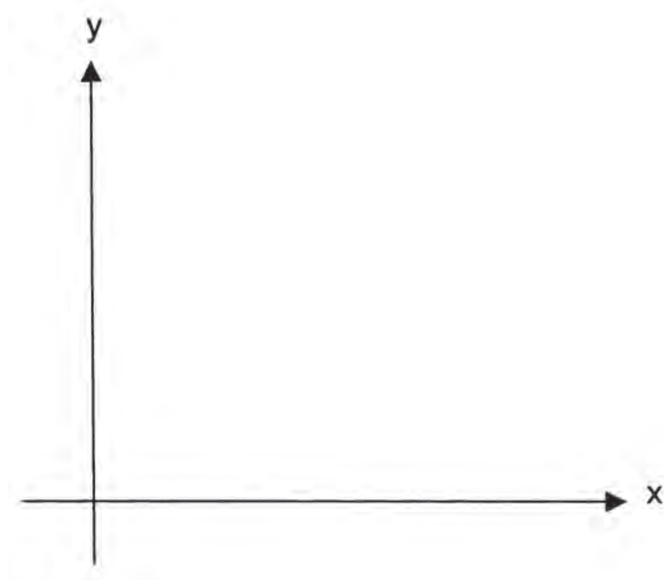
Sustituyendo **y** por tiempo y **x** por distancia se tiene la regla:

$$y = \ ?$$

Señalando diferentes velocidades (**x**) encuentra el tiempo que tardaría Enrique para llegar en cada caso y traza la gráfica correspondiente.

$$y = \frac{\text{distancia}}{x}$$

x	y
40	
60	
80	
120	
16	



Consulta los resultados de tus compañeros(as). Si hay diferencias, discútelas y corrige si es necesario.

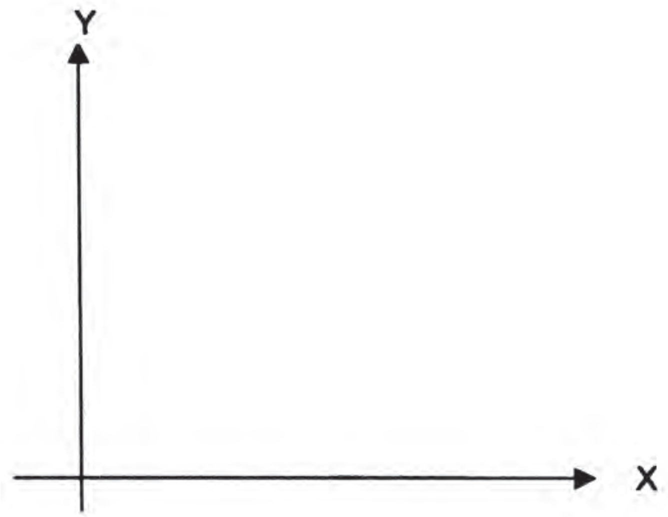
En pareja, realiza el siguiente ejercicio.

Una empresa con 20 trabajadores tuvo en su primer año de labores $120 000 000 de ganancias. Al siguiente año duplicó el número de empleados, situación que triplicó sus ganancias. El tercer año despidió a la cuarta parte de sus empleados y sus ganancias bajaron una tercera parte.

Realiza la tabulación.

x	y
20	120 000 000

Traza la gráfica correspondiente.



x = Número de empleados contratados por año.

y = Ganancias por año.

¿Cuál es la variable independiente?

¿Cuál es la variable dependiente?

Comenta con tu profesor(a) tus respuestas y corrige si es necesario.

De manera individual, lee el siguiente enunciado y haz lo que se te pide.

A un cuerpo elástico se le aplica una carga de 50 gramos y sufre un alargamiento de 5 cm. Calcula qué alargamiento tendrá cuando las cargas sean de 100, 150 y 200 gramos (de acuerdo con la ley de Hocke, la deformación de un cuerpo elástico es directamente proporcional a la carga), la regla de funcionalidad es:

$$y = \frac{x}{k} \qquad \text{Siendo } k = 0.10$$

1. ¿Cuál es la variable independiente?

2. ¿Cuál es la variable dependiente?

3. ¿Cuál es la regla de funcionalidad?

4. Tabula los datos.

x	y
50	
100	
150	
200	

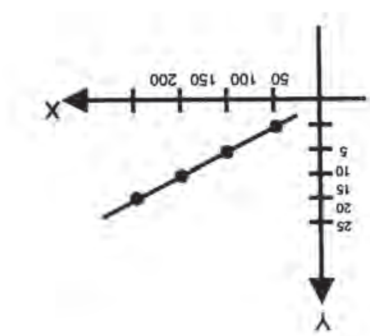
5. Grafica esos datos en tu cuaderno.

Consulta la clave para observar la veracidad de tus respuestas. Si hay errores, corrige.

CLAVE

1. La carga; 2. El alargamiento; 3. $y = \frac{x}{k}$ o $y = \frac{x}{0.10}$; 4.

x	y
50	5
100	10
150	15
200	20



38 CON DOS SE PUEDE

28-3

Gráfica de funciones de las formas y = mx + b, y = mx – b
Representación en el plano cartesiano de funciones de la forma y = mx + b, y = mx – b

Muchas veces se puede identificar un objeto de entre varios muy semejantes por un solo detalle que lo diferencia.

Taller introductorio

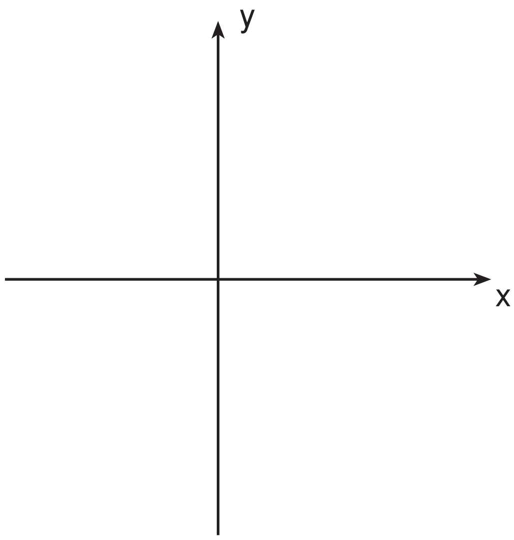
Con un compañero(a) haz en tu cuaderno un análisis comparativo de las funciones cuyas expresiones algebraicas son:

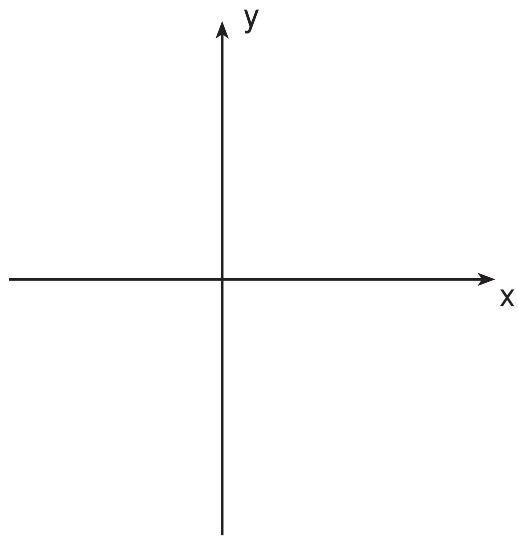
Primer grupo	Segundo grupo
$y = 2x$	$y = 2x$
$g = \frac{1}{2}x$	$h = 2x - 2$
$j = -3x$	$u = 2x + 1$

En el siguiente cuadro escribe los resultados o valores que toma la ordenada cuando la abscisa es 0 y cuando es 1.

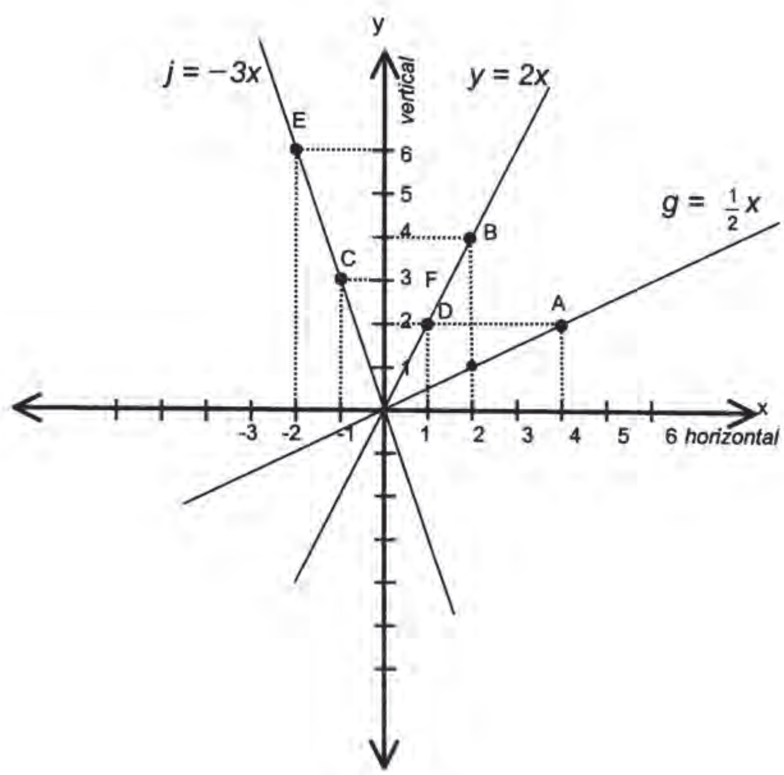
Expresiones algebraicas asociada a las funciones	$y = 2x$	$g = \frac{1}{2}x$	$j = -3x$	$h = 2x - 2$	$u = 2x + 2$
$x = 0$	0			–2	
$x = 1$	2		–3		4

En los ejes de coordenadas grafica las tres funciones de cada grupo. Así podrás compararlas mejor.





Veamos las tres del primer grupo.

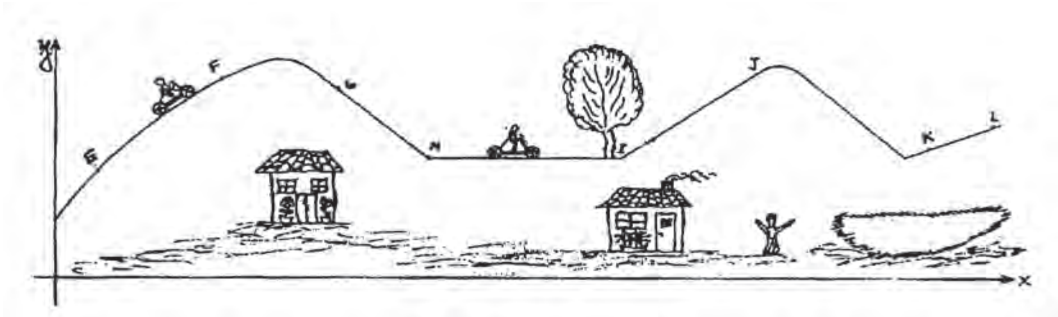


¿Cuáles son las coordenadas de los puntos señalados?

A (,) ; B (,) ; D (,) ; C (,) ; E (,) Respecto a la línea horizontal o eje de las abscisas puedes observar que las otras rectas aparecen como “subidas” o “bajadas”. Unas más “peligrosas” que las otras debido a su mayor o menor **inclinación** o **pendiente.**

Asocia la reflexión anterior con el hecho de subir o bajar montañas, carreteras, terrenos ondulados, etc., y considera que la horizontal es el nivel del mar y la vertical la altura sobre éste.

Para hacer más significativa esta última reflexión, supongamos que el siguiente dibujo representa un tramo de la ruta seguida en “la vuelta a Colombia”.



Si la *y* es la altura sobre el nivel del mar y se fija un sentido para la horizontal:

- ✔ ¿Qué pasa con el valor de *y* cuando va aumentando el de *x*?

Si el ciclista, que avanza en el sentido indicado, tiene que hacer fuerza para avanzar y subir al mismo tiempo como ocurre en el tramo EF, el valor de *y* aumenta. Pero si el ciclista tiene que hacer fuerza para no acelerar demasiado porque viene en bajada, como ocurre en el tramo GH, entonces el valor de *y* disminuye.

En el primer caso se dice que la pendiente es positiva y en el segundo, que es negativa.

- ✔ ¿Cómo son las pendientes en los tramos IJ y KL?
- ✔ ¿Qué opinas de la pendiente en el tramo HI?
- ✔ ¿Crees que sea posible asignarle un valor numérico a las pendientes? ¡Emprendamos esa búsqueda!
- ✔ Trata de encontrar para cada una de las rectas de las tres funciones anteriores **cuánto se sube por cada unidad que se avance** sobre la horizontal.

- En la recta que representa a la función *g* es fácil observar que en la posición alcanzada en el punto designado con la letra A, por 2 unidades que se subieron sobre la vertical, se avanzaron 4 sobre la horizontal.

✔ Ubica otro punto sobre esta recta y verifica si se cumple o no la misma relación que para A.

- Te darás cuenta que en todos los casos la razón entre lo que se sube y lo que se avanza, es la misma y se puede hallar así:

Para el punto A:

$$\frac{\text{Lo que subió}}{\text{Lo que se avanzó}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

✔ Hazlo para el punto que tú escogiste.
¡También debe ser igual a $\frac{1}{2}$!

✔ Encuentra las razones, de este tipo, para las rectas que representan a las otras dos funciones.

¿Cómo interpretas el signo de -1 en la horizontal, para el caso de la función *j* cuando se ha alcanzado la posición señalada con la letra C?

Se puede pensar que la unidad de longitud se retrocedió, o sea que el avance se hizo en sentido opuesto al usual que es hacia la derecha.

✔ Considera ahora en la recta de la función *y* el tramo comprendido entre los puntos D y B cuyas coordenadas son (1, 2) y (2, 4) respectivamente y encontremos la razón entre lo que se subió y lo que se avanzó cuando se pasa de D a B.

$$\frac{\text{Lo que subió}}{\text{Lo que se avanzó}} = \frac{\text{diferencia entre las ordenadas}}{\text{diferencia entre las abscisas}} = \frac{4 - 2}{2 - 1} = \frac{2}{1} = 1$$

✔ Puedes determinar otros puntos sobre la misma recta y escoger tramos en ella para encontrar **la razón entre lo que se subió y lo que se avanzó.**

✔ En resumen, para cada una de las tres rectas, ¿cómo son las razones encontradas?

✔ Compara el valor de las razones con los coeficientes de la expresión algebraica de las funciones y, g, j.

Para cada recta, **la razón** encontrada es el valor numérico de su **pendiente**, que se acostumbra designar con la letra *m*.

✔ Organiza en un cuadro los resultados:

Expresiones algebraicas asociada a las funciones	*Coeficiente*	$\frac{\text{Lo que se subió}}{\text{Lo que se avanzó}}$	*Pendiente (m)*
$y = 2x$	2	$\frac{4}{2}, \frac{2}{1}, \dots$	2
$g = \frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \dots$	$\frac{1}{2}$
$j = -3x$	–3	$\frac{3}{-1}, \frac{6}{-2}, \dots$	–3

Así la expresión algebraica general de las funciones lineales podría ser ahora:

$y = mx$, donde m es la pendiente de la recta que representa a dicha función.

✔ Haz un trabajo similar con el grupo de las otras tres funciones y escribe una expresión general para este tipo de funciones de gráfica lineal.

- En este grupo encontrarás gratas sorpresas que te llevarán a caracterizar mejor las rectas paralelas.

- Establece la relación que hay entre la intersección de cada recta con el eje de las ordenadas y la constante de la expresión algebraica de la función.

✔ Finalmente, escribe la ecuación asociada a cada una de las funciones de gráfica lineal anteriores (son 5) para encontrar los valores de x que las hacen cero, es decir aquellos valores para los cuales “ no hay subida”.

Ejemplo: para $u = 2x + 2$ se tiene $2x + 2 = 0$. ¿Cuál es el valor de x que satisface esa ecuación?

Observarás que ese valor es la intersección de la recta con el eje de las abscisas.

Observa atentamente el video donde verás cómo distinguir la gráfica de una función de otra muy semejante.

Lee el siguiente texto:

GRÁFICA DE FUNCIONES DE LAS FORMAS $y = mx + b$, $y = mx - b$

A las funciones de la forma $y = mx + b$, $y = mx - b$ se les llama funciones de gráfica lineal. Cuando $b = 0$ se obtienen expresiones correspondientes a las funciones lineales: $y = mx$.

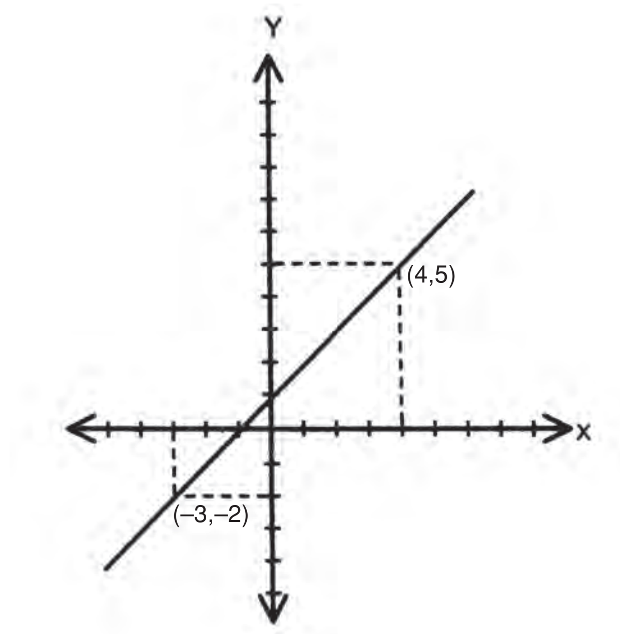
En este tipo de funciones **y** representa la variable dependiente, **x** la variable independiente y **m** y **b** son constantes, es decir, su valor no varía aunque cambien los valores de las variables en una función.

Analícense algunos casos para la función $y = mx + b$:

Se tabula para encontrar los valores de **x** y **y**.

$y = x + 1$

x	*y*	**puntos**
–3	–2	(–3 , –2)
4	5	(4 , 5)



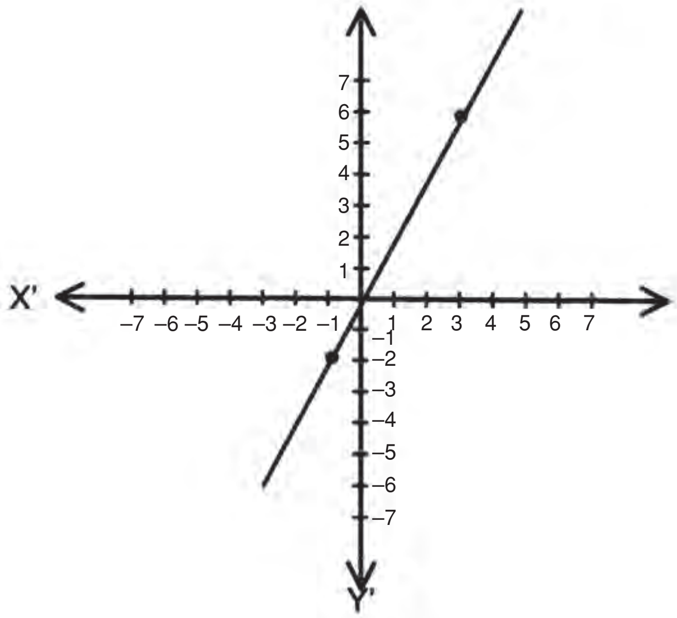
Nótese que la recta interseca al eje de las ordenadas en el punto 1 —que es el valor de la constante *b* en la función dada— y que el ángulo que forma con el eje de las abscisas es menor que 90°.

Volvamos sobre la función y = 2x que también se puede expresar como:

$$y = 2x + 0$$

Al tabular se obtiene:

x	*y*	puntos
–1	–2	(–1 , –2)
3	6	(3 , 6)

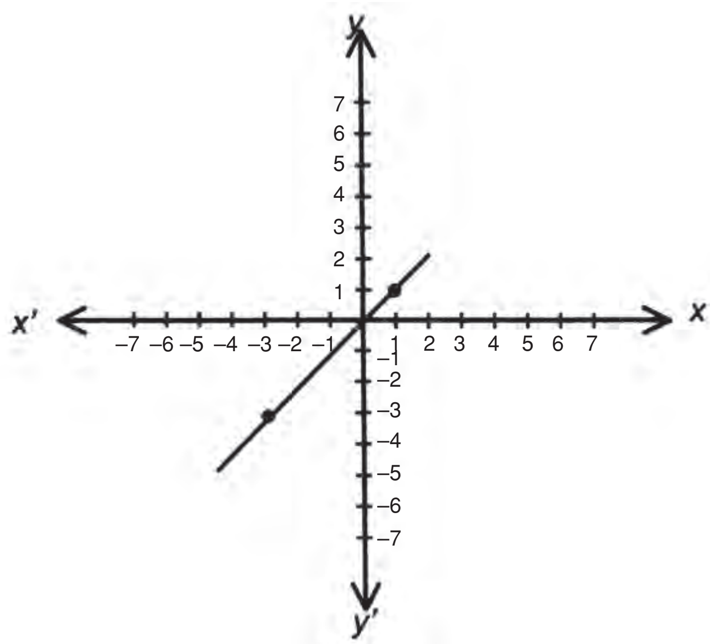


Obsérvese que, en este caso, la recta pasa por el origen y forma un ángulo menor que 90º con el eje de las abscisas.

Ahora se revisará la gráfica para y = mx – b; por ejemplo y = x – 0, o sea, y = x, esto es, cuando **m** = 1 y **b** = 0.

Tabulación

x	*y*	puntos
–3	–3	(–3 , –3)
1	1	(1 , 1)



Véase que la recta obtenida forma un ángulo de 45º con el eje de las abscisas y que pasa por el origen. También se puede decir que corta al eje de las ordenadas en el punto cuyo valor en la función corresponde a **b**.

La distancia del origen al punto donde la recta corta al eje de las ordenadas se conoce como **ordenada al origen.**

En síntesis, se puede decir que: en las funciones y = mx + b si **b** es igual a cero, la recta obtenida pasa por el origen y si **b** tiene otro valor, la recta corta al eje de las ordenadas en el punto determinado por **b**.

Intégrate a un equipo como lo indique el profesor(a) y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son las constantes en una función de la forma y = mx + b? ¿Cómo puede interpretarse el valor de m? ¿Cuáles son las variables?

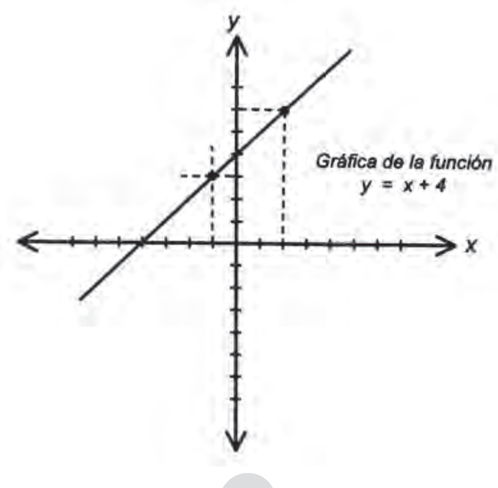
b) ¿Qué es función de gráfica lineal? ¿Qué particularidades tienen las funciones lineales?

c) ¿Qué indica la ordenada al origen en una función de gráfica lineal?

d) ¿Cuánto mide el ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas en la función $y = x$? ¿Cuál es el valor de la pendiente en este caso?

Compara tus respuestas con las de otro equipo, si no coinciden, consulta con tu maestro(a).

Forma una pareja, observa la gráfica y completa lo que se pide.



Las coordenadas de A son (_____ , _____)

Las coordenadas de B son (_____ , _____)

Sustituye los valores de **x** y **y** en la función

Para el punto A

$y = x + 4$

_____ = _____ + 4

_____ = _____

Para el punto B

$y = x + 4$

_____ = _____ + 4

_____ = _____

En la función $y = x + 4$, ¿qué valor tiene la constante “**b**”? ¿Y la pendiente m?

¿Qué relación hay entre esta recta y la que representa a la función $y = x$?

¿Por qué punto del eje de las ordenadas pasa la recta?

¿Qué relación tiene ese punto con **b**?

Compara tus respuestas con las de otra pareja y corrige si es necesario.

Tú solo, resuelve el siguiente ejercicio:

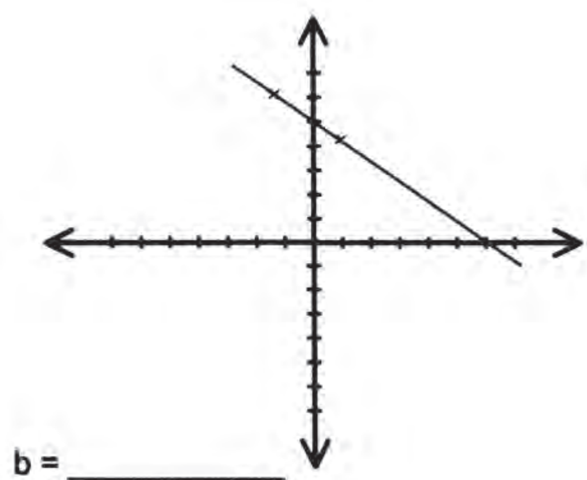
1. a) En tu cuaderno completa las tabulaciones y traza la gráfica de las funciones $y = 3x$; $y = x - 6$

x	***y***	**puntos**
1		
–1		

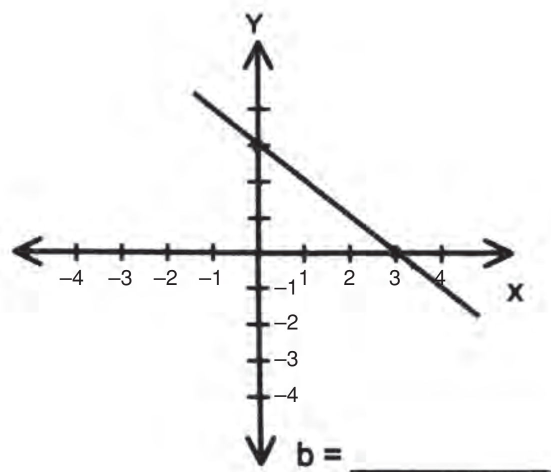
x	***y***	**puntos**
0		
5		

b) Cómo es la pendiente de la recta de la segunda función comparada con la de $y = x$? ¿Cómo son estas dos rectas?

2. Indica cuál es el valor de la ordenada al origen de las siguientes gráficas.



b = ____________



b = ____________

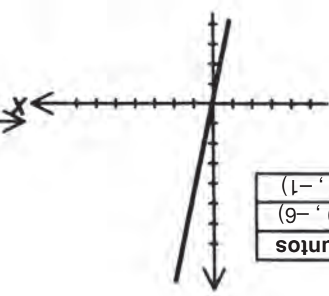
Compara tu ejercicio con el de otro compañero(a); en caso necesario, consulta la clave.

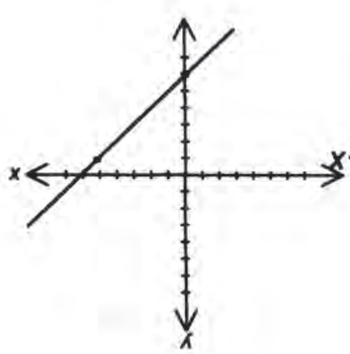
CLAVE

1. a) $y = 3x$ $\qquad$ $y = x - 6$

x	**y**	**Puntos**
1	3	(1 , 3)
–1	–3	(–1 , –3)

x	**y**	**Puntos**
0	–6	(0 , –6)
5	–1	(5 , –1)





2. $b = 5$ $\qquad$ $b = -6$

b) Las pendientes son iguales y las rectas son paralelas.

39 ALGO CAMBIA

3-29

Gráfica de funciones de las formas y = –mx + b, y = –mx – b
Representación en el plano cartesiano de funciones en forma y = –mx + b, y = –mx – b

¿Cuántas veces te ha sucedido que un pequeño detalle cambie la dirección de lo que tenías planeado?

RETO

Antes de mirar el video o de hacer la lectura, plantea dos funciones particulares que correspondan a la forma general de las aquí propuestas; grafícalas y escribe tus respuestas a las siguientes preguntas:

* Con respecto a la línea horizontal o eje de las abscisas, ¿cómo será la inclinación de las rectas que representan este tipo de funciones?

* ¿Cuál es la pendiente en estos casos y cómo explicas que sea negativa?

Observa atentamente el video y ve cómo cambia la dirección de estas rectas respecto a las gráficas estudiadas en la sesión anterior.

Reúnete con un compañero(a) y realiza una lectura comentada del texto que sigue. Anota en tu cuaderno lo que consideres más importante.

GRÁFICA DE FUNCIONES DE LAS FORMAS
y = – mx + b, y = – mx – b

Como ya se vio, una función de las formas y = mx + b, y = mx – b dan origen a una recta, por lo que se conoce como funciones lineales, aunque lo más adecuado sería llamarlas de gráfica lineal puesto que para b ? 0 no cumplen las condiciones de linealidad.

Enseguida, se verán las gráficas correspondientes a otras funciones lineales de la forma $y = -mx + b$, $y = -mx - b$.

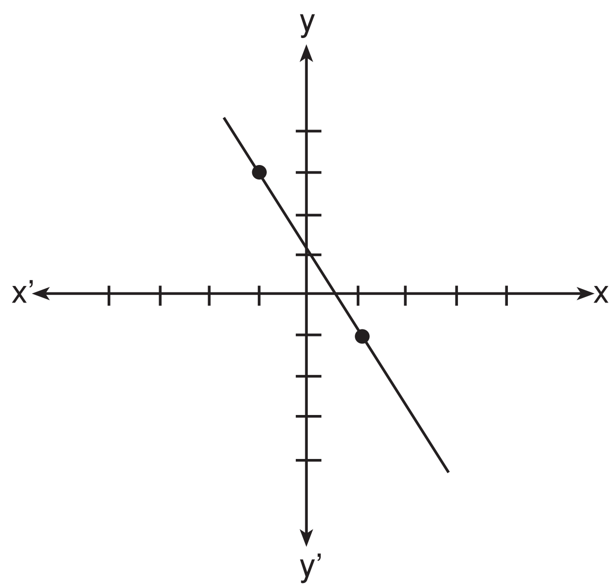
a) Graficar la función $y = -2x + 1$

Se tabula para obtener los puntos.

$y = -2(-1) + 1$
$y = 2 + 1$
$y = 3$

$y = -2(1) + 1$
$y = -2 + 1$
$y = -1$

x	y	Puntos
–1	3	(–1 , 3)
1	–1	(1 , –1)



Obsérvese que la recta forma un ángulo mayor que 90° con el eje de las abscisas. Además, corta al eje de las ordenadas en el punto 1, que es el mismo valor de *b* en la función.

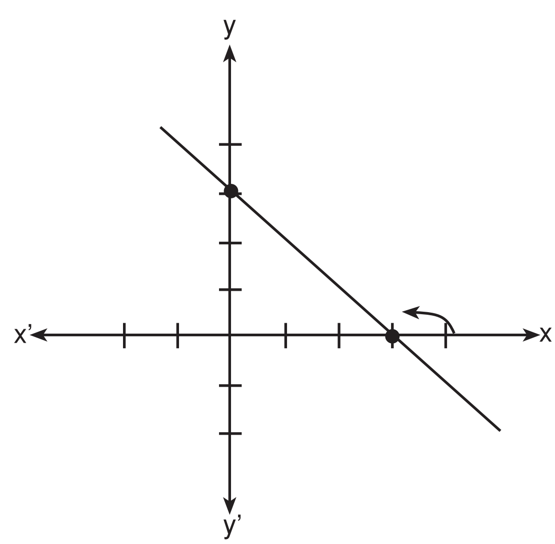
b) Graficar la función $y = -1x + 3$

Se tabula para obtener los puntos.

$y = -1(0) + 3$
$y = 0 + 3$
$y = 3$

$y = -1(2) + 3$
$y = -2 + 3$
$y = 1$

x	y	Puntos
0	3	(0 , 3)
2	1	(2 , 1)



Ahora se analiza la gráfica correspondiente a la función de la forma $y = -mx - b$

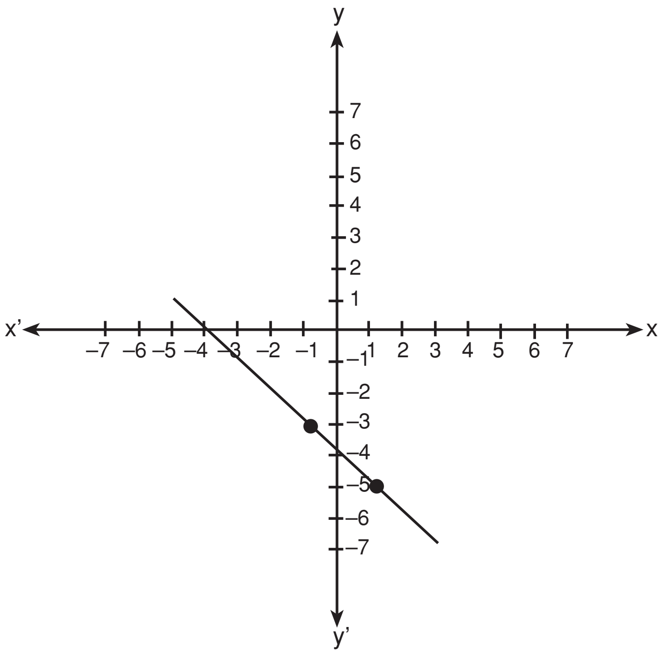
a) Graficar la función $y = -x - 4$ donde $m = -1$ y $b = -4$

Se tabula encontrando las coordenadas de dos de sus puntos.

$y = -x - 4$
$y = -(-1) - 4$
$y = 1 - 4$
$y = -3$

$y = -x - 4$
$y = -(1) - 4$
$y = -1 - 4$
$y = -5$

x	y	Puntos
–1	–3	(–1 , –3)
1	–5	(1 , –5)



b) Graficar la función $y = -2x - 3$ donde $m = -2$ y $b = -3$

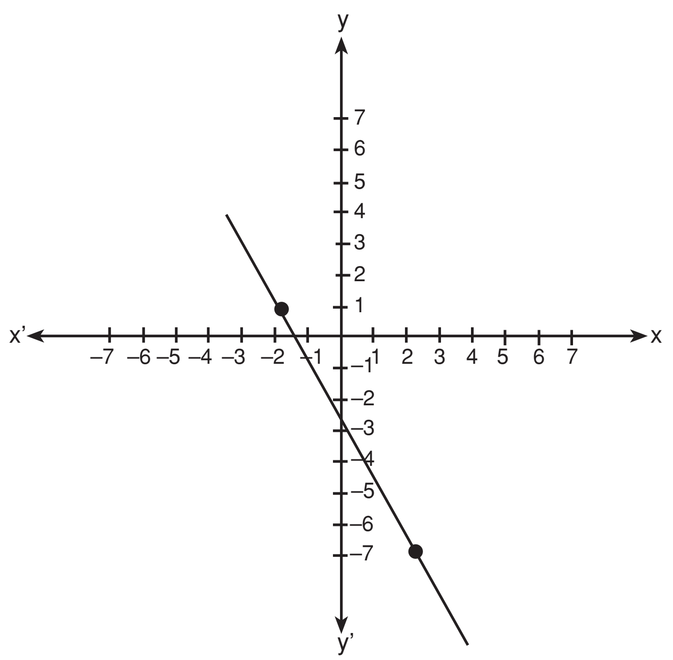
Se tabula buscando las coordenadas de dos puntos.

x	y	Puntos
2	–7	(2 , –7)
–2	1	(–2 ,1)

$y = -2x - 3$
$y = -2(2) - 3$
$y = -7$

$y = -2x - 3$
$y = -2(-2) - 3$
$y = 4 - 3$
$y = 1$

Con estos dos puntos es posible realizar la gráfica.



Observando las gráficas se puede ver que las rectas cruzan el eje de las ordenadas en el punto señalado por b, esto es, en el eje vertical donde las ordenadas son negativas y que el ángulo formado por las rectas con el eje de las abscisas es mayor que 90° y menor que 180°.

Continúa en pareja y contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cómo se llama una función que da origen a una recta?

b) En la función $y = -mx + b$, ¿cuáles son las constantes?

c) En la misma función ¿cuál es la variable dependiente y cuál es la variable independiente?

d) ¿Cómo se obtienen los valores de **x**?

e) ¿Cómo se obtienen los valores de **y**?

f) ¿Cuál es el primer paso para graficar una función?

g) ¿Qué se toma en cuenta para hacer la tabulación?

Compara tus respuestas con las de otra pareja. Si hay diferencias, discute y saca una conclusión.

Forma una terna y completa las siguientes tablas; grafícalas en tu cuaderno.

a) $y = -3x - 1$　　　　b) $y = -7x + 2$

x	***y***	**puntos**

x	***y***	**puntos**

Compara tu ejercicio con el de otro grupo y corrígelo si es necesario.

Individualmente, realiza los siguientes ejercicios.

1. Acerca de la función $y = -5x - 8$ contesta:

a) ¿Qué transformaciones hace esta función?

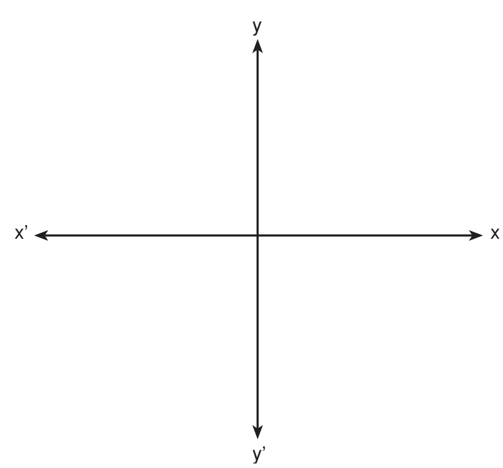
b) ¿Cuál es el valor de **b**? ¿y el valor de **m**?

c) La gráfica es una recta que cruza al eje de las ordenadas en ¿cuál punto?

2. Tabula la función anterior y grafícala.

$y = -5x - 8$

x	***y***	**puntos**
–3		
–1		



Compara tus resultados con los de la clave; si hay diferencias, revisa tus procedimientos y corrige.

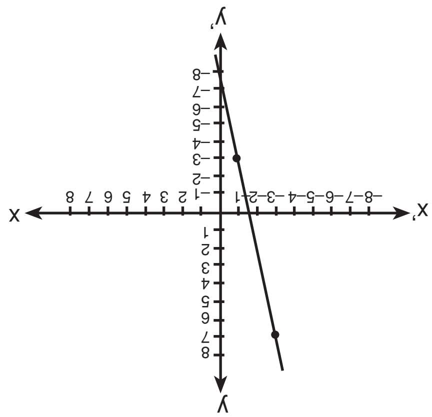
CLAVE

1 a) A cada valor de x, lo quintuplica, le cambia de sentido y luego le resta 8.

b) –8, –5   c) (0 , –8)

2

x	y	Puntos
–3	7	(–3 , 7)
–1	–3	(–1 , –3)



40 ¡VAYA FAMILIAS!

30-3

Familias de rectas de la forma y = mx + b
Identificación del comportamiento de las gráficas de la forma y = mx + b, cuando son paralelas y cuando se cortan en un punto

Cuando los objetos matemáticos presentan características comunes se puede pensar que constituyen una familia, aunque dentro de ella sea necesario distinguir clanes con la intención de estudiar mejor propiedades particulares de éstos últimos.

Observa con atención el video; en él te hablarán del comportamiento que presenta una familia muy conocida por ti. Al finalizar el programa, comenta con tus compañeros(as) el tema principal.

Lee en silencio, con tu equipo de trabajo, el texto que sigue; al finalizar, comenta la diferencia que existe entre la familia de recta paralelas y rectas que se cortan en un punto o intersectan, y que sirven para graficar familias diferentes de funciones.

FAMILIAS DE RECTAS DE LA FORMA Y = MX + B

En las sesiones anteriores se vio la construcción de gráficas de ecuaciones de la forma y = mx + b (ecuaciones de gráfica lineal o de primer grado). Recordarás que toda ecuación lineal o de primer grado con dos variables, tiene por gráfica una línea recta.

En esta ocasión se verán dos casos particulares de comportamiento de una familia de gráficas de la forma y = mx + b; cuando las gráficas que se obtienen son líneas paralelas entre sí o cuando corresponden a líneas que se cortan.

Véase el siguiente ejemplo que corresponde a una familia de rectas (forma y = mx + b)

$$\textbf{1.}\quad \left[\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 2 \\ y = 2x + 4 \end{array}\right.$$

Para construir su gráfica es necesario dar valores a **x** y encontrar los valores correspondientes a **y**, como sigue:

$y = 2x - 1$

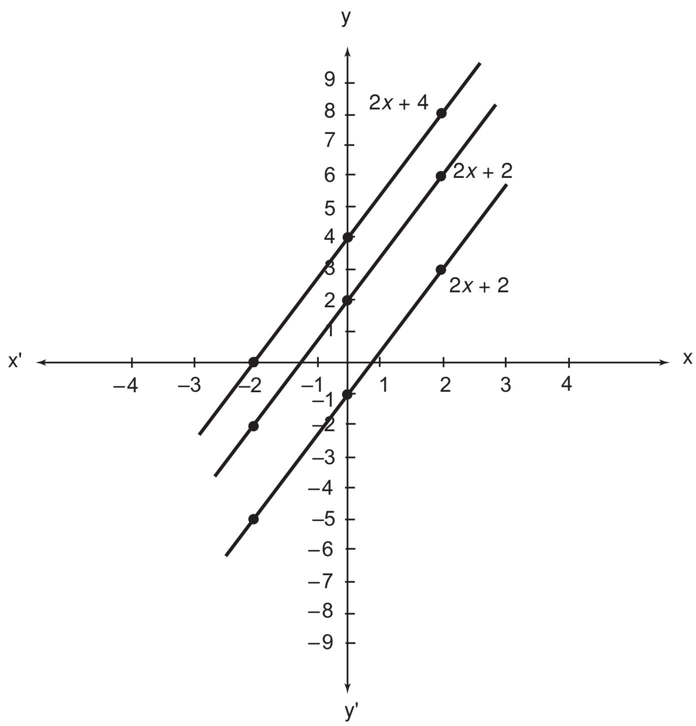
x	y
–4	–9
–2	–5
0	–1
2	3

$y = 2x + 2$

x	y
–4	–6
–2	–2
0	+2
2	6

$y = 2x + 4$

x	y
–4	–4
–2	0
0	4
2	8



Se observa que las gráficas de esta familia de rectas son paralelas entre sí, ¿y, en qué coinciden las tres? Si te fijas en la variable independiente x, aparece en las tres ecuaciones el mismo valor del coeficiente (m = 2). Esto significa que cuando se tiene una familia de rectas correspondientes a las funciones de la forma y = mx + b y el coeficiente de la variable independiente tiene el mismo valor, las líneas que representan estas funciones serán paralelas entre sí.

Tienen la misma inclinación y por consiguiente la razón entre lo que se sube y lo que se avanza, respecto al eje de las abscisas, es igual en todos los casos. Ya sabes que esta razón es la pendiente, cuyo valor es precisamente m (coeficiente de la variable independiente).

Ahora considérese el siguiente ejemplo:

$$\textbf{2.} \quad \left[\begin{array}{l} y = 2x - 3 \\ y = 4x - 3 \\ y = 6x - 4 \end{array}\right.$$

¿Qué consideraciones puedes anticipar antes de graficarlas?

Primero se asigna un valor a x para encontrar los correspondientes de y, y así poder construir sus gráficas.

$y = 2x - 3$

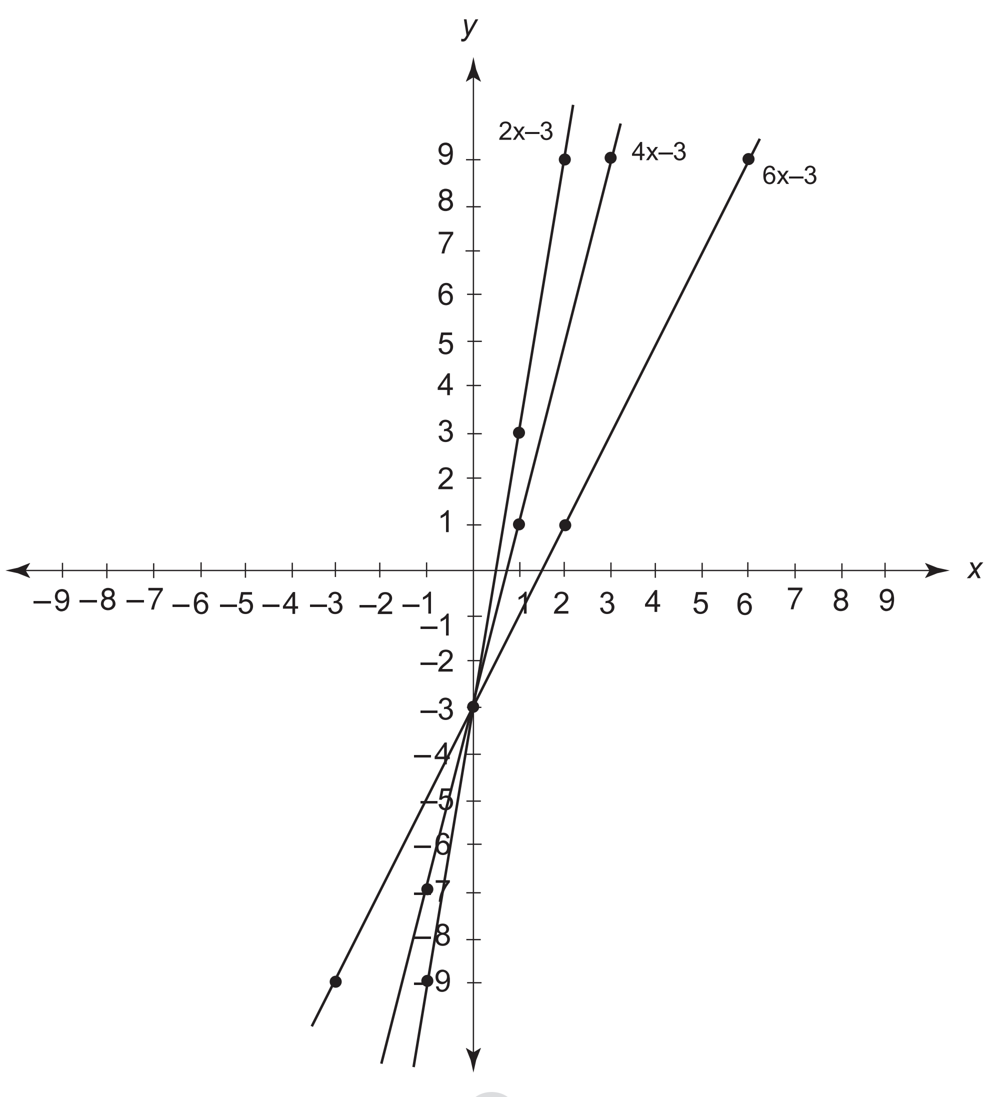
x	y
–3	–9
0	–3
2	1
6	9

$y = 4x - 3$

x	y
–1	–7
0	–3
1	1
3	9

$y = 6x - 3$

x	y
–1	–9
0	–3
1	3
2	9



Ahora se observa un comportamiento diferente en estas gráficas, ya que se cortan o intersecan en un punto determinado. ¿Qué las hace tener ese punto en común?; efectivamente, el término b tiene un valor constate en las tres ecuaciones ($b = -3$). Esto quiere decir que cuando en la familia de rectas de la forma $y = mx + b$ se tiene un mismo valor para b, las rectas que se obtienen se cortan en ese punto.

De acuerdo con los ejemplos anteriores se puede concluir que el comportamiento de una familia de gráficas que corresponde a la forma $y = mx + b$, se resume de la siguiente forma:

1. Cuando la variable independiente x tenga un coeficiente constate (m), las rectas que se obtienen en la gráfica serán siempre paralelas entre sí. Es decir, tienen la misma pendiente.

2. Cuando el término independiente b tenga un valor constante, las rectas que se obtendrán en la gráfica se cortarán en un punto.

Con tu equipo, contesta lo que se pide a continuación.

1. ¿Cuándo son paralelas las rectas que grafican una familia de funciones de la forma $y = mx + b$? Da ejemplos y verifica graficándolas.

2. ¿Cuándo se cortan las rectas que grafican una familia de funciones de la forma $y = mx + b$? Da ejemplos y verifíca graficándolas.

Compara tus respuestas con otro equipo, si hay error, discute y corrige.

Con tu equipo, traza la gráfica de las siguientes familias de rectas.

¿Cómo supones que van a ser las gráficas?

¿Cuál es la pendiente de éstas gráficas?

a) $y = x + 3$; $y = x - 3$; $y = x + 2$

Completa los valores correspondientes a **y**.

$y = x + 3$

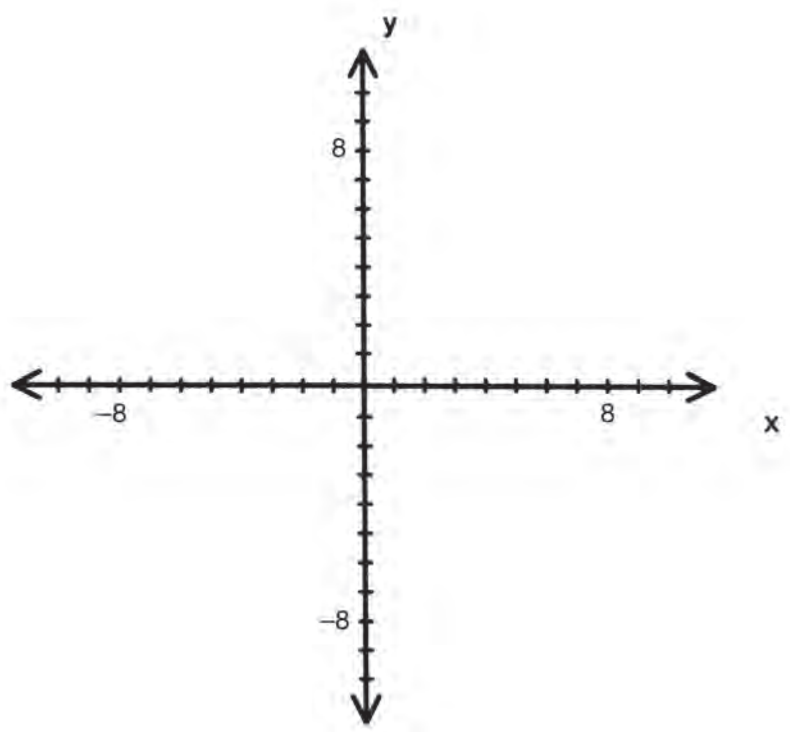
x	y
–4	
0	
+4	

$y = x - 3$

x	y
–4	
0	
+4	

$y = x + 2$

x	y
–4	
0	
+4	



a) ¿Cuál es el coeficiente de cada variable independiente?

b) Entonces, ¿cómo son las gráficas de estas tres ecuaciones?

b) $y = 2x - 4$; $y = 3x - 4$; $y = x - 4$

Calcula los valores que le corresponden a **y.**

$y = 2x - 4$

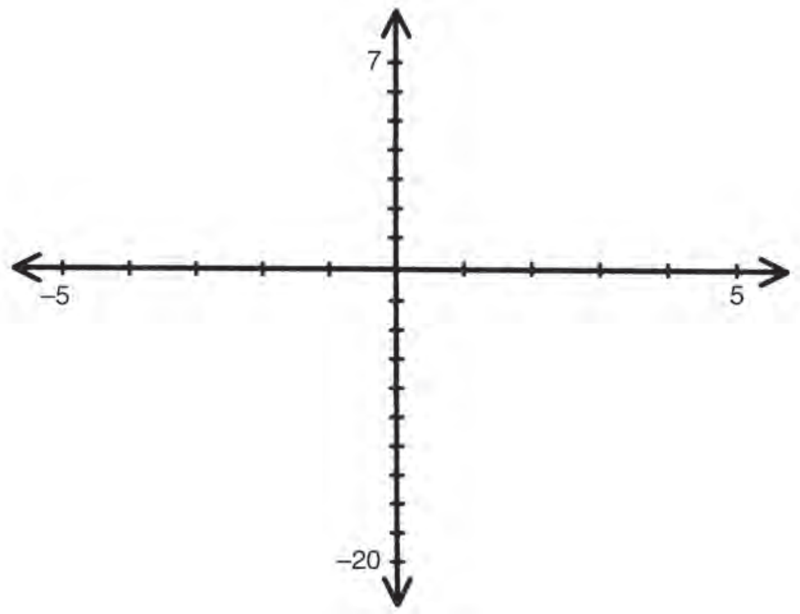
x	y
–5	
0	
+5	

$y = 3x - 4$

x	y
–5	
0	
+5	

$y = x - 4$

x	y
–5	
0	
+5	



a) ¿Cuál es el valor del término independiente?

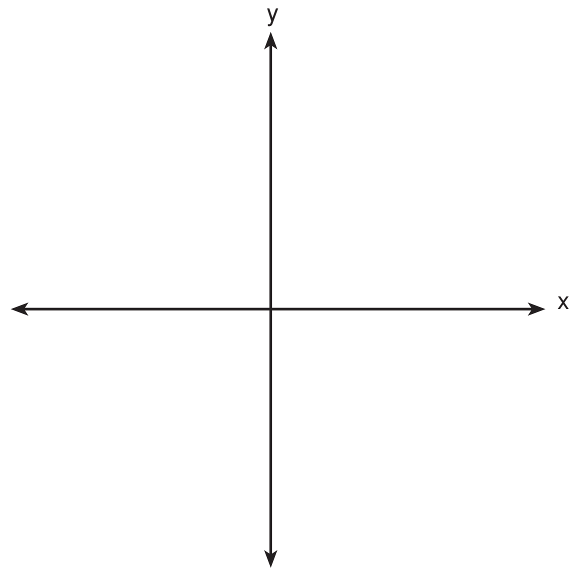
b) Entonces ¿qué tipo de comportamiento tiene esta familia de rectas?

Compara tus gráficas y respuestas con tus compañeros(as), si tiene dudas, pregunta a tu profesor.

Con un compañero(a), resuelve el ejercicio.

1. Traza las siguientes gráficas e identifica el comportamiento que tendrán sus rectas.

$$A.\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ y = \frac{1}{2}x \\ y = \frac{1}{2}x + 2 \end{cases}$$



2. De la siguiente familia de ecuaciones, contesta lo siguiente:

$$B.\begin{cases} y = 4x + 6 \\ y = 2x + 6 \\ y = x + 6 \end{cases}$$

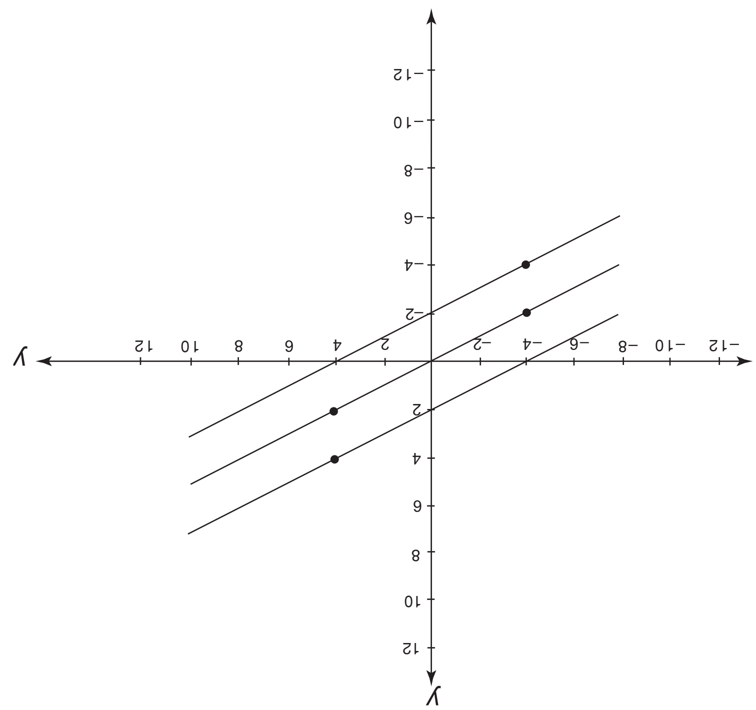
a) ¿Cómo serán sus gráficas?

b) ¿En qué punto se cortan las rectas? ¿Cuál es el valor de la abscisa en este punto?

Compara tus respuestas con las de otra pareja, si no coinciden consulta la clave.

CLAVE

1. Paralelas **2.** a) Cortan en un punto; b) en (0.6); x = 0



41

UNA FUNCIÓN EN CUATRO ACTOS

3-31

Análisis de la gráfica de las funciones lineales
Identificación de las gráficas de la función lineal

RECUERDA: En la función y = –x – 2 ¿qué valor tiene m y b?

Dentro de las funciones de gráfica lineal, comúnmente llamadas funciones lineales, se presentan cuatro casos: ¿ya sabes cómo identificarlos?

Escribe una para cada caso.

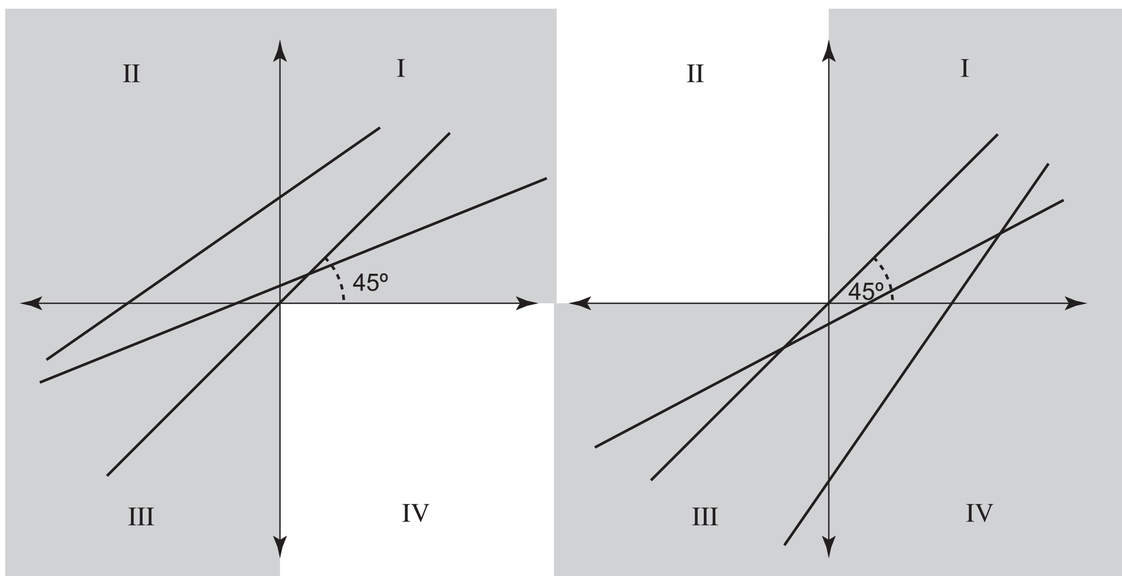
Observa el video ya que en él se mostrarán algunas características que presentan las funciones lineales y ello te permitirá identificarlas fácilmente.

Lee el texto de funciones lineales, después comenta ante el grupo las dudas que hayas tenido.

ANÁLISIS DE LAS GRÁFICAS DE FUNCIONES LINEALES

El análisis de las gráficas de las funciones lineales consiste en ver las características comunes que éstas presentan y ampliar así el conocimiento acerca de estos fascinantes objetos matemáticos que son las funciones de gráfica lineal. A continuación se verán algunas de ellas.

1. Funciones de la forma y = mx + b y **y = mx – b**



Antes de continuar la lectura haz una reflexión que te lleve a decidir a cuál tipo de funciones corresponden las rectas del primer dibujo. ¿Por qué ninguna de ellas corta al eje de las ordenadas en valores negativos?

¿Por qué en el segundo dibujo ninguna de las rectas corta al eje de las ordenadas en valores positivos? ¿Qué especialidad tiene este tipo de funciones?

De las siguientes funciones:

$$y = \frac{1}{2}x + 3 \qquad\qquad y = 7x - 1$$

$$y = \frac{1}{2}x - 3 \qquad\qquad y = 7x + 1$$

¿Cuáles son del primer tipo? ¿Cuáles del segundo?

En cada caso ¿cuál es la ordenada al origen?

Observe que la región sombreada representa el espacio que ocuparían las gráficas de cada uno de los dos tipos de funciones, respectivamente. Cuando «**m**» es positiva se tienen las siguientes características:

a) Cuando la ordenada al origen **b** toma el valor de cero, y **m** el valor de uno, la recta que resulta de graficar la función forma un ángulo de 45° con respecto al eje de las abscisas. En grado noveno aprenderás la relación que existe entre la pendiente m y la tangente del ángulo que forma la recta con el de las abscisas.

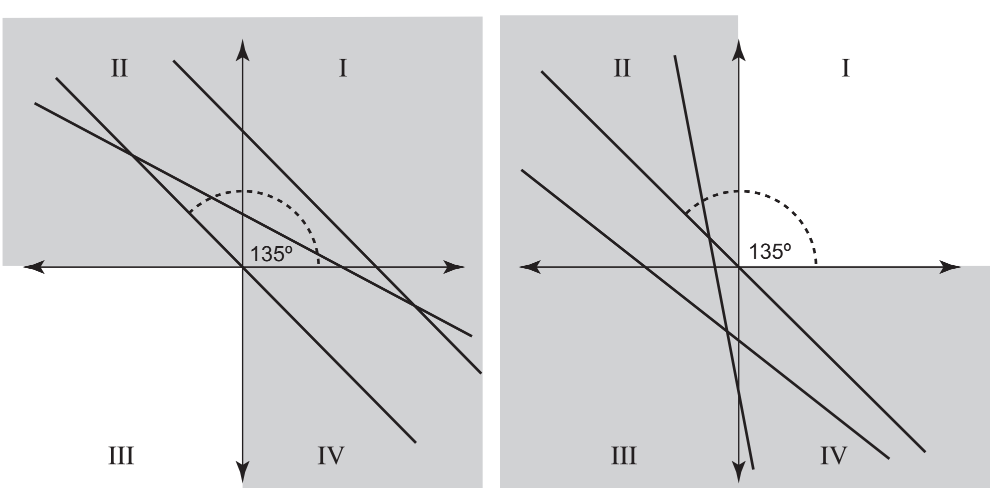
b) Los ángulos que forman las rectas que resultan de graficar cualquiera de las dos funciones y = mx + b, y = mx – b están comprendidos entre 0° y 90° con respecto al eje de las abscisas.

c) En la función y = mx + b, la ordenada al origen **b** es positiva, lo cual indica que las rectas intersecan al eje vertical en donde las ordenadas son positivas.

d) En la función y = mx – b, la ordenada al origen **b** es negativa; aquí las rectas intersecan al eje vertical donde las ordenadas son negativas.

e) Cuando la ordenada al origen **b** es positiva, las gráficas de las funciones no aparecen en el IV cuadrante; mientras que cuando es negativa, las gráficas de las funciones no aparecen en el II cuadrante.

2. Funciones de la forma y = mx + b y y = – mx – b



¿Qué puedes decir de las funciones representadas en el dibujo de la izquierda?
¿Qué particularidad tienen las funciones representadas en el dibujo de la derecha?

Las características que representan las funciones $y = -mx + b$ y $y = -mx - b$, cuando **m** es negativa son las siguientes:

a) Cuando la ordenada al origen **b** toma el valor de cero, y **m** tiene un valor de –1, la recta que resulta de la gráfica forma un ángulo de 135° respecto al eje de las abscisas.

b) Los ángulos que forman las rectas que resultan de graficar cualquiera de las dos funciones $y = -mx + b$, $y = -mx - b$ están comprendidos entre 90° y 180° respecto al eje de las abscisas.

c) En la función $y = -mx - b$ la ordenada al origen **b** es negativa; esto indica que las rectas intersecan al eje vertical en donde las ordenadas son negativas.

d) Cuando la ordenada al origen **b** es positiva, las gráficas de las funciones no aparecen en el III cuadrante, mientras que cuando es negativa, las gráficas de las funciones no aparecen en el I cuadrante.

Con base en lo anterior se concluye que:

Si en una función de la forma $y = mx + b$, m es positiva y b positiva o negativa, la gráfica de la función formará ángulos menores o iguales que 90° respecto al eje de las abscisas.

Si una función de la forma $y = mx + b$, m es negativa y b positiva o negativa, la gráfica de la función tomará ángulos comprendidos entre 90° y 180° respecto al eje de las abscisas.

En el valor que tenga b indicará el punto del eje de las ordenadas en donde la recta lo intersecará.

Forma un grupo con otros compañeros(as) y contesta lo que se pide a continuación:

Dada la función $y = 3x - 5$.

a) ¿Qué valor tiene **m** y **b**?

b) ¿En qué punto la gráfica de dicha función intersecta al eje de las ordenadas?

c) ¿Qué cuadrante no ocupará la gráfica?

d) El ángulo que forma la gráfica de esta función con el eje de las abscisa, ¿entre qué valores estará comprendido?

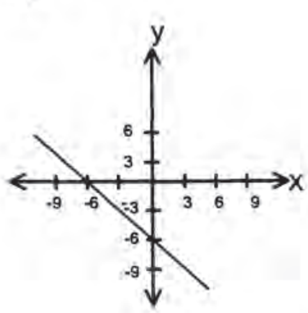
e) Grafica en tu cuaderno la función dada y con ello comprueba tus respuestas.

Comenta tus respuestas con las de otros grupos bajo la asesoría del profesor o profesora; si tienes errores, corrígelos.

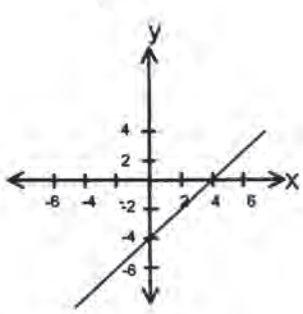
Sigue con tus compañeros(as) y contesta las siguientes cuestiones:

Haz en tu cuaderno las gráficas de cuatro funciones, aquí representadas y escribe debajo de cada una de ellas la forma de la función que corresponda.

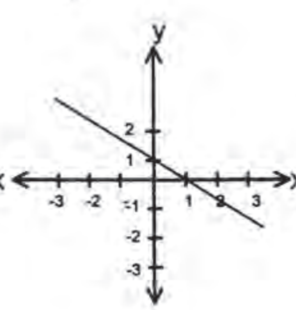
a)



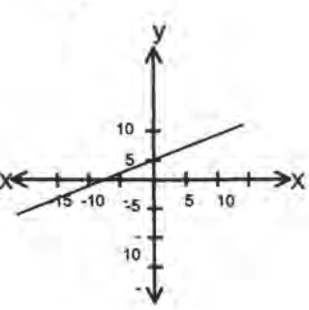
b)



c)



d)



2. Obtén el valor de la ordenada al origen de cada función.

a) ______________ b) ______________ c) ______________ d) ____________

3. De acuerdo con la forma de la función correspondiente, sombrea los cuadrantes que ocuparán las rectas que se obtengan de cada una (sobre las cuatro gráficas que ya se tienen).

Compara tus respuestas con las de otros grupos; en caso de haber resultados diferentes, conjuntamente con el profesor(a) acuerden las respuestas correctas.

En forma individual, resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios:

1. Traza una gráfica para cada una de las funciones siguientes; la única condición es que la recta pase por la ordenada al origen que se indica.

   a) $y = -mx + 2$ b) $y = mx - 1$ c) $y = -mx - 3$ d) $y = mx + 4$

2. Cuando se obtiene la función $y = x + b$, en donde $b = 0$ ¿cuál es el valor de m? ¿Qué ángulo forma la recta que se obtiene respecto al eje de las abscisas?

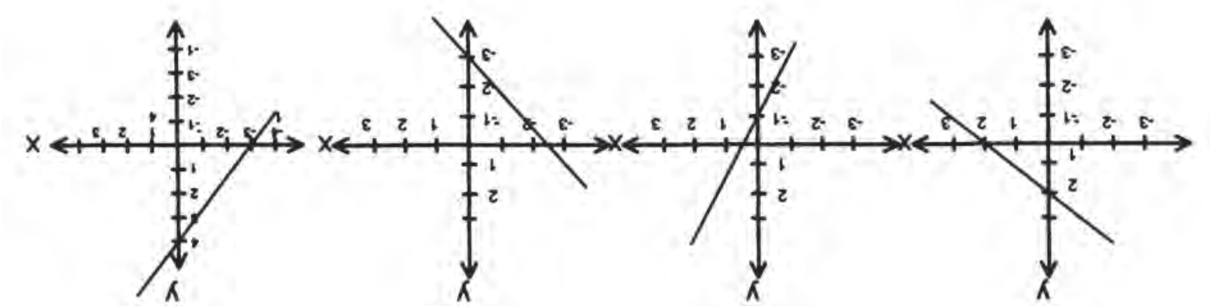
3. ¿Qué características tienen en común las funciones de gráfica lineal de la forma $y = -mx + b$?

4. En la función $y = -x$, ¿qué valor tiene **m**?

Compara tus respuestas con las de otro compañero(a); en caso de existir diferencias, consulta la clave.

CLAVE

1) a) b) c) d)



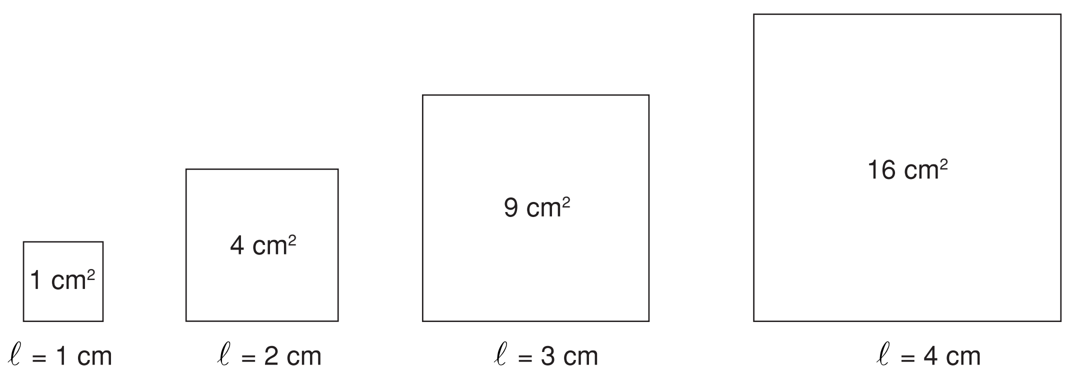
2) $m = 1.45°$; 3) Cuando b vale cero y $m = -1$, la recta forma un ángulo de 135° con respecto al eje de las abscisas; 4) $m = -1$

42	CURVAS SOBRE LA Y
3-32	**Gráfica de funciones 2° grado de la forma $y = x^2 + a$; $y = x^2 - a$** **Identificación del comportamiento de una función en el plano cartesiano de la forma $y = x^2 + a$; $y = x^2 - a$**

Taller introductorio.

Forma un grupo de tres integrantes y con papel cuadriculado y lápiz a la mano, dispóngase a disfrutar del placer de pensar matemáticamente.

Vamos a considerar la función que calcula el área de cuadrados cuando se le conoce la longitud del lado.

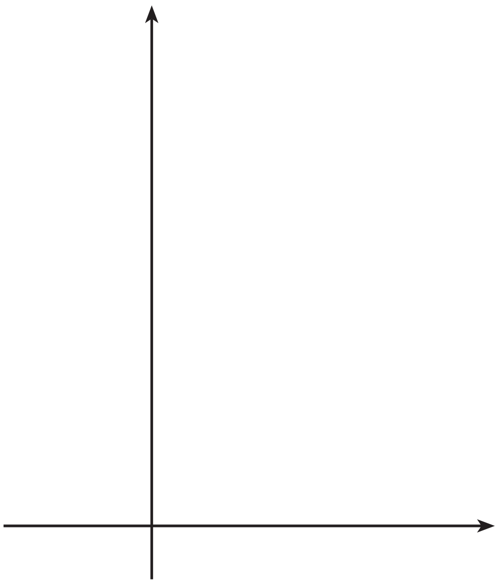


1. Observa la tabla de la función y complétala para algunos valores de x en los enteros positivos.

x(cm)	1	2	3	4	5	6
x^2 (cm²)						

Tenemos una función de $\mathbf{Z}$ en $\mathbf{Z}$. La gráfica estará constituida por los puntos de la forma $(\ell, \ell)^2$ en el plano cartesiano.

2. Haz la gráfica.



$$f = \mathbf{Z}^{+} \longrightarrow \mathbf{Z}^{+}$$
$$\ell \longrightarrow \ell^{2}$$

- ✔ ¿Cómo cambiaría la gráfica si la función estuviese definida en los racionales positivos?

  ¡Seguramente aparecerían muchos más puntos que casi generarían una curva, parecida a una rama que se abre a lo largo del eje positivo de las ordenadas!

- ✔ Considera valores en Q^{+} y señala en el plano nuevos puntos de la función.

- ✔ Si trazas la línea curva continua, ¿qué estarías suponiendo?

3. Considera ahora simplemente la función “cuadrado” en los números racionales. Completa la tabla y haz la representación gráfica correspondiente.

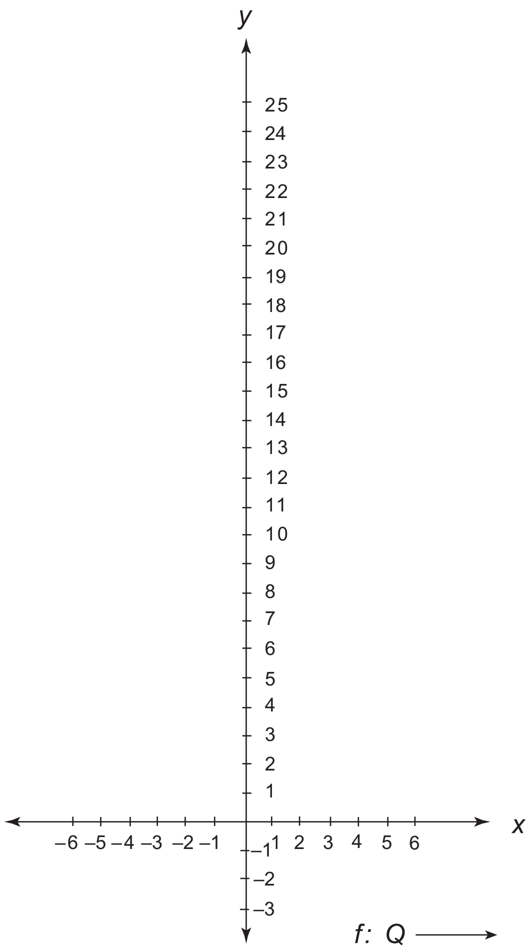
x	± 0	± 0.5	± 1	± 2	± 3	± 2.5	± 3	± 4
x^2								

¿En qué cuadrantes se ubica ahora la gráfica? ¿En qué se diferencia de la anterior? ¿Podría decirse que la relación entre las dos variables es de proporcionalidad directa? Explica tu respuesta.

¿Cumple esta función las condiciones de linealidad.

RECUERDA: En las funciones, el conjunto donde se toman los valores de la variable independiente o pre-imágenes se llama **dominio** de la función y al de las imágenes **codominio** o **recorrido**.

Es claro que en la representación gráfica se toman solamente algunos valores que permiten hacerse una idea de la gráfica de la función.



$$f: Q \longrightarrow$$
$$x \longrightarrow x^2$$

¿Cómo es la gráfica de la función respecto al eje de las ordenadas?

El punto (0, 0) es el vértice de la **parábola**, nombre que recibe la curva que representa la función.

4. Construye una nueva función que además **de elevar al cuadrado sume 1**.

$$f: Q \longrightarrow Q$$
$$Q \longrightarrow x^2 + \boxed{}$$

Escribe la ecuación asociada a esta nueva función.

¿Qué modificación esperas con respecto a la gráfica de la función y = x^2?

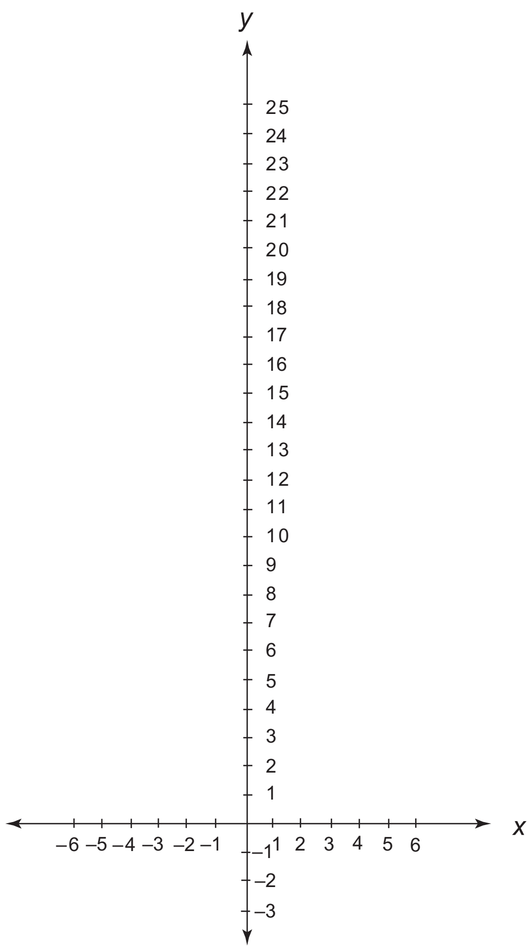
¿Seguirá siendo simétrica respecto al eje de las ordenadas?

¿El punto (0, 0) pertenece ahora a la gráfica de la función?

¿Cómo se modifican los valores de las imágenes?

Completa la tabla y haz la gráfica correspondiente.

x	**$x^2 + 1$**	**puntos**
0		
1		
1.5		
–1		
2		
–2		
2.5		
–3		
4		
–5		

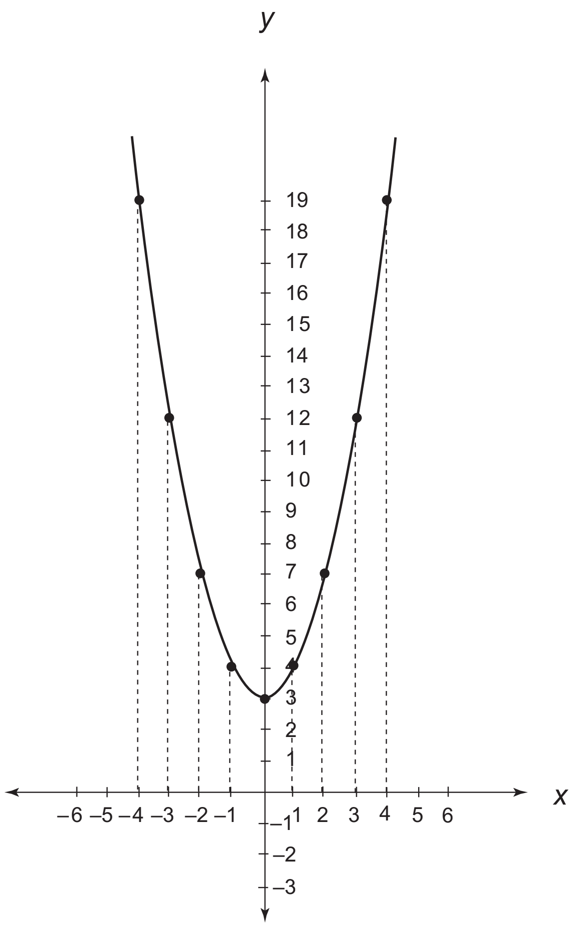


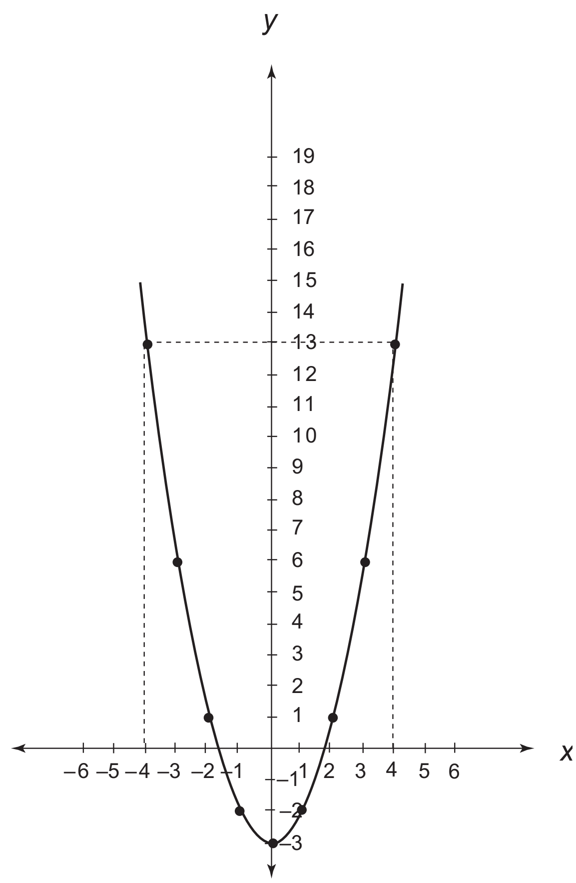
¿Qué habría pasado si la nueva función en lugar de elevar al cuadrado y sumar 1, hubiese sido **elevar al cuadrado y restar 1**?

- Escribe la expresión algebraica para este último caso.
- Haz la tabla y la gráfica correspondientes.

- Escribe las conclusiones después de compararla con la función anterior.

Lánzate a escribir la expresión algebraica para las funciones definidas de Q en Q y cuyas representaciones gráficas son las siguientes:





y = ________________ y = ________________

¿Cómo explicas el hecho de que el vértice de la parábola sea el punto (0, 3) en un caso y (0, –3) en el otro caso?

Vamos a ver si tus reflexiones te prepararon para el disfrute de lo que viene a continuación.

Cuando localices puntos en el plano cartesiano, es importante que identifiques la línea que se forma, pero también que investigues su comportamiento, así como las causas que lo provocan.

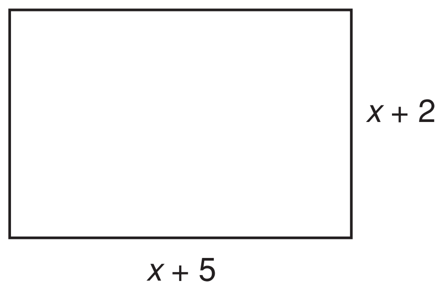
Observa en el video el procedimiento para graficar una función de la forma $y = x^2 + a$; al terminar comenta tus dudas con tus compañeros(as) y maestro(a).

Con tu mismo grupo lee el texto que sigue y al finalizar comenta con tus compañeros(as) y profesor(a) las diferencias entre la trayectoria que determinan las funciones de la forma $y = mx + b$ y $y = x^2 + a$.

GRÁFICA DE FUNCIONES DE 2º GRADO DE LA FORMA $y = x^2 + a$; $y = x^2 - a$

Si los lados de un rectángulo están expresados en forma algebraica, su área se obtiene utilizando la multiplicación de monomios o polinomios.

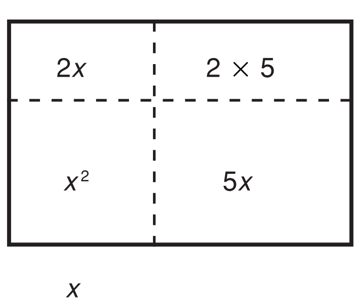
Por ejemplo.



Para obtener su área se multiplica la base por altura.

$$A = (x + 5) (x + 2)$$
$$A = x + 7x + 10$$

Observa cómo se obtienen estos términos, considerando las áreas de las piezas de la superficie del rectángulo inicial. Se puede pensar que la expresión anterior representa una



$$y = x^2 + 7x + 10$$

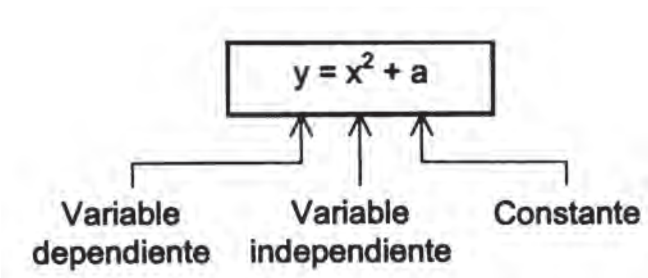
función y la regla que la define es:
Una función cuya variable independiente es de segundo grado se llama función cuadrática y generalmente se escribe en la forma $y = ax^2 + bx + c$, con a 0 en donde **a, b** y **c** son constantes.

Obsérvese que la única restricción sobre las constantes **a**, **b** y **c** es que a 0. Por lo tanto, **b** y **c** pueden ser cero.

Si la constante **b** es igual a cero, el término de primer grado (bx) se elimina, quedando:

$$y = ax^2 + c$$

Si a = 1 y la constante de **c** se representa con la letra **a,** se tiene:



Para determinar una función de la forma $y = x^2 + a$ es necesario determinar el valor de **a**; supóngase que en este caso tiene el siguiente valor:

Si a = 3 se tiene la función $y = x^2 + 3$

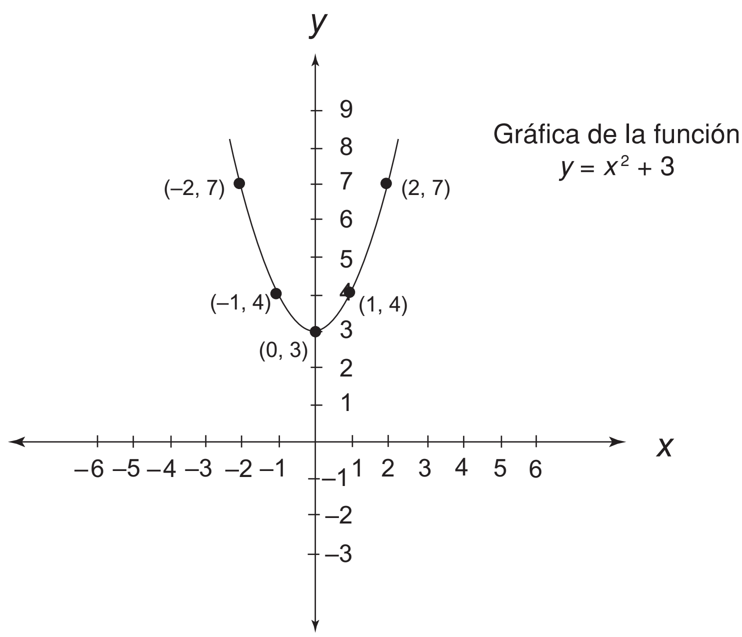
Para graficarla se realiza la tabulación de la función, asignando arbitrariamente valores a su variable **x** y obteniendo los correspondientes de **y**.

$y = x^2 + 3$

x	**y**	
–2	7	(–2,7)
–1	4	(–1,4)
0	3	(0,3)
1	4	(1,4)
2	7	(2,7)

Si x = –2, $y = (-2^2) + 3 = 4 + 3 = 7$
Si x = –1, $y = (-1^2) + 3 = 1 + 3 = 4$
Si x = 0, $y = (-0^2) + 3 = 0 + 3 = 3$
Si x = 1, $y = (1^2) + 3 = 1 + 3 = 4$
Si x = 2, $y = (2^2) + 3 = 4 + 3 = 7$

Posteriormente se representan en el plano cartesiano los pares ordenados (x, y), que permitirán, al trazar una curva continua que pase por ellos, obtener la gráfica de la función.



La curva que representa esta función recibe el nombre de parábola; es simétrica respecto a un eje, que en este caso coincide con el eje OY. La intersección del eje de la parábola con la curva se llama vértice (V).

Otro ejemplo de gráfica de la forma $y = x^2 + a$ es cuando $a = 1$; se tiene:

$$y = x^2 + 1$$

Para determinar los pares (x, y) se realiza la siguiente tabulación.

Si $x = 3$, $y = (3^2) + 1 = 9 + 1 = 10$

Si $x = 2$, $y = (2^2) + 1 = 4 + 1 = 5$

Si $x = 0$, $y = (-0^2) + 1 = 0 + 1 = 1$

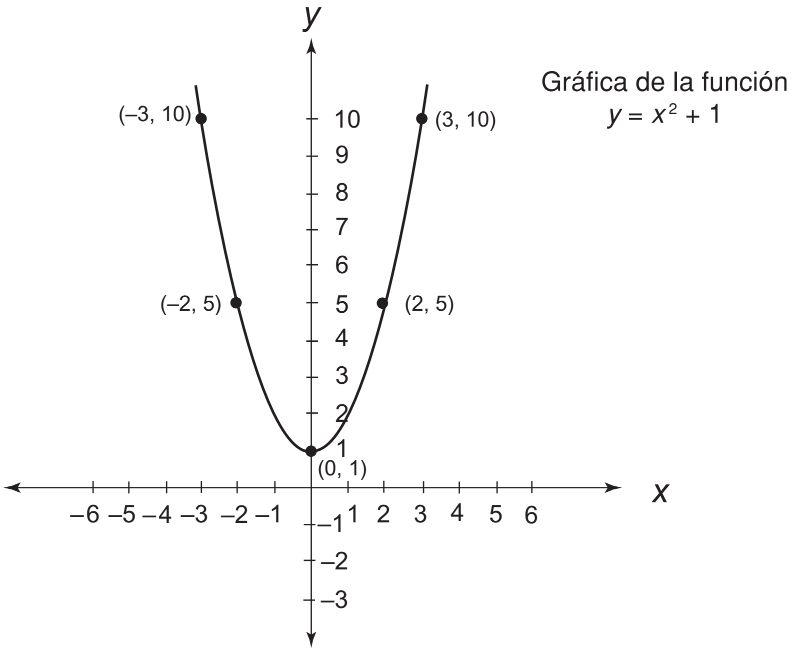
Si $x = -2$, $y = (-2^2) + 1 = 4 + 1 = 5$

Si $x = -3$, $y = (-3^2) + 1 = 9 + 1 = 10$

$y = x^2 + 1$

x	**y**	Parejas (x, y)
3	10	(3, 10)
2	5	(2, 5)
0	1	(0, 1)
–2	5	(–2, 5)
–3	10	(-3,10)

Se obtiene la gráfica localizando en el plano cartesiano los pares ordenados (x, y) y trazando una curva continua que pase por ellos.



El vértice de la parábola (V) es el punto cuyas coordenadas son (0,1). Al comparar ésta y la anterior gráfica se puede afirmar que en una función de la forma $y = x^2 + a$ el valor de **a** determina el vértice de la parábola sobre el eje de las ordenadas.

Reúnete con dos compañeros(as) para contestar en tu cuaderno las siguientes preguntas.

a) ¿Cuáles son las constantes en $y = ax^2 + bx + c$? ¿Y las variables?

b) ¿Qué nombre reciben las funciones de la forma $y = x^2 + a$ por tener en la variable x el exponente 2?

c) ¿Cómo se llama la curva que representa una función de la forma $y= x^2 + a$?

d) ¿Con qué recta coincide el eje de simetría de la curva de una función de la forma $y = x^2 + a$?

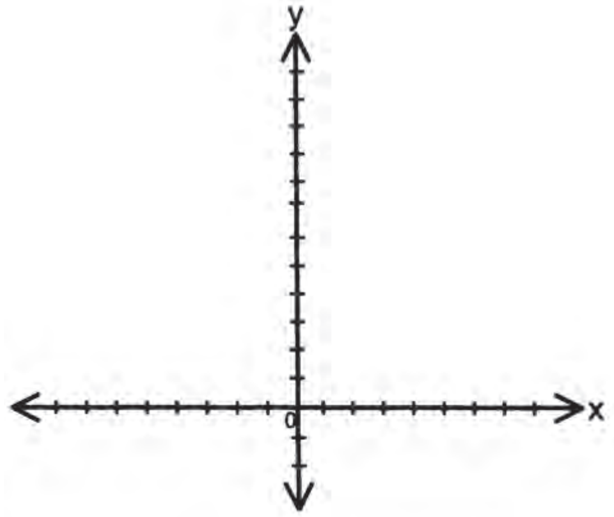
e) ¿Qué determina la constante **a** en una función de la forma $y = x^2 + a$, y siendo *a* positiva o negativa?

Compara tus respuestas con las de otro grupo, si no coinciden, consulta la lectura.

Grafica individualmente la función $y = x^2 + 5$.

¿Cuáles son las coordenadas del vértice de la parábola?

¿Cuál es el punto mínimo de la curva?

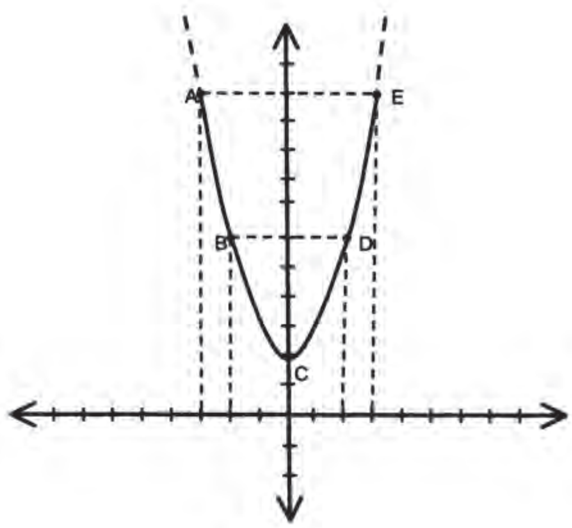


$y = x^2 + 5$

x	y
–2	
–1	
0	
1	
2	

Compara tu gráfica con la que realice tu profesor(a) en el tablero; si no coinciden, corrige.

Observa con mucha atención la siguiente gráfica y contesta individualmente lo que a continuación se pide. Trabaja en tu cuaderno.



Completa la tabla.

Puntos	x	y
A		
B		
C		
D		
E		

¿Qué función representa la gráfica?

Compara tus respuestas con la clave; si tienes dudas, consulta con tu profesor(a).

CLAVE

Puntos	x	y
A	–3	11
B	–2	6
C	0	2
D	2	6
E	3	11

A (–3 11); B (–2, 6); C (0 , 2); D (2 , 6); E (3, 11); representa la función $y = x^2 + 2$

43 CURVAS SOBRE LA X

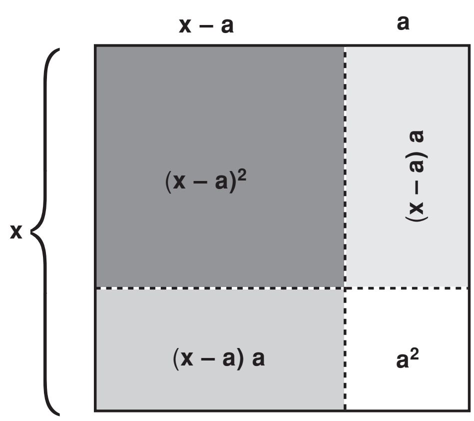
33-3

Gráfica de funciones de la forma y = $(x-a)^2$ Identificación del comportamiento de una función en el plano cartesiano de la forma y = $(x-a)^2$

Al representar puntos en el plano cartesiano, éstos determinan diversas trayectorias; asimismo, éstas tienen diferentes comportamientos; las funciones de la forma $y = (x-a)^2$ determinan una trayectoria especial y tienen un interesante comportamiento.

Taller introductorio. **Primera parte.**

RECUERDA: Una expresión como $(x-a)^2$ puede interpretarse como el producto $(x-a)(x-a)$ que a su vez podrá tomarse como el área de un cuadrado cuyo lado es $x-a$.



Consideramos un cuadrado del lado **x** y sobre su lado elegimos un segmento de longitud **a**. Construimos el cuadrado cuyo lado es **x – a.** ¿Qué partes o piezas del cuadrado del lado x debemos suprimir para que solamente nos quede el cuadrado de lado $x-a$, cuya área es $(x-a)^2$? Trabajemos con las expresiones que representan la áreas de las piezas.

$$A = (x-a)^2 = \underset{\substack{\text{Área del}\\ \text{cuadrado de}\\ \text{lado } x}}{\overset{}{x^2}} - \underbrace{2(x-a)\,a}_{\substack{\text{Área de los dos}\\ \text{rectángulos}\\ \text{punteados}}} - \underset{\substack{\text{Área de}\\ \text{cuadradito}}}{a^2}$$

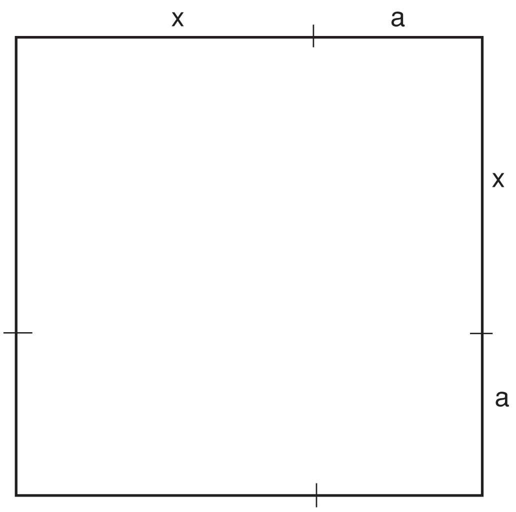
$$\begin{aligned} &= x^2 - 2a(x-a) - a^2 \\ &= x^2 - 2ax + 2a^2 - a^2 \\ &= x^2 - 2ax + a^2 \end{aligned}$$

Entonces, ¿a qué es igual el área del cuadrado sombreado?

✔ Considera ahora un cuadrado cuyo lado es la suma de una variable x y un número constante a.

- Expresa la longitud del lado y el área de dicho cuadrado.

- Representa el cuadrado del lado $x + a$ y su área, como la suma de las áreas del las piezas del rompecabezas que puedes construir trazando líneas como en el caso anterior.



El rompecabezas te debe salir de 4 piezas.

Llama A_1 el área de dicho cuadrado.
$A_1 = (x + a)^2 =$ ___________

Compara el trinomio obtenido con el correspondiente a
$(x - a)^2$
$A = (x - a)^2 =$ __________

Las fórmulas para A y A_1 representan funciones que se pueden escribir así:

$$y = (x - a)^2 \qquad y_1 = (x + a)^2$$

¿Cuáles son las variables independientes? ¿Cuáles las dependientes? ¿Y el término constante?

- La primera función y, corresponde **al cuadrado de la diferencia** de dos valores.

- La función y_1 corresponde **al cuadrado de suma** de dos valores.

Además: resumiendo los resultados anteriores se puede observar que:

$$(x \pm a)^2 = \underbrace{x^2}_{\textit{Cuadrado del primer término}} \pm \underbrace{2ax}_{\textit{El doble del producto del primer término por el segundo}} + \underbrace{a^2}_{\textit{El cuadrado del segundo término}}$$

Como $(x - a)^2 = (x - a)(x - a)$ y $(x + a)^2 = (x + a)(x + a)$ también son productos especiales fáciles de hallar; se acostumbra llamarlos **productos notables** y a los trinomios que resultan se les conoce como **trinomios cuadrados perfectos**.

✔ Expresa mediante un trinomio cuadrado perfecto, cada uno de los siguientes productos notables:

Cuadrado de la suma	Cuadrado de la diferencia
$(x + 5)^2$	$(m - 4)^2$
$(2x + 3m)^2$	$(3z - 2v)^2$
$(a + 7b)^2$	$(5x - 3y)^2$

✔ Verifica si los siguientes trinomios corresponden al desarrollo de un producto notable:

$25 + 10x + x^2$

$144m^2n^2 + 9n^2 + 36mn^2$

$\frac{1}{4}x^2 + xy + y^2$

$a^2 - \frac{4}{3}ab + \frac{4}{9}b^2$

✔ Haz una representación geométrica del primer trinomio, considerando que es el área de un cuadrado.

- ¿Cuál es la longitud del lado?
- ¿Cuál es el área de cada una de las piezas que lo forman?

Representa las figuras cuyas dimensiones se indican a continuación y halla sus áreas.

$(3a + 4)^2$ $(2x - 3)^2$

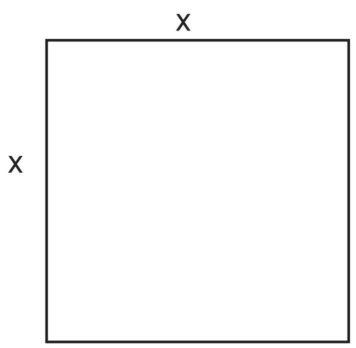
-¿A qué es igual el cuadrado de la suma de dos términos?

-¿A qué es igual el cuadrado de la diferencia de dos términos?

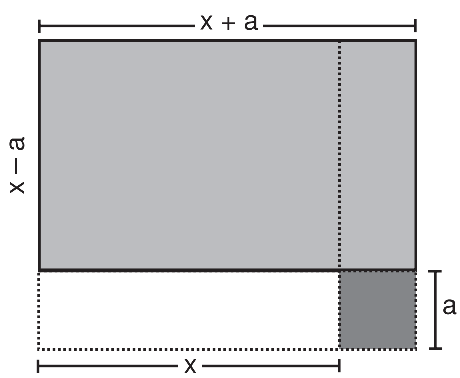
Segunda parte del taller

✔ Considera ahora un rectángulo cuyas dimensiones son **(x + a)** y **(x – a)**

- Dibuja en primera instancia un cuadrado de lado **x.**



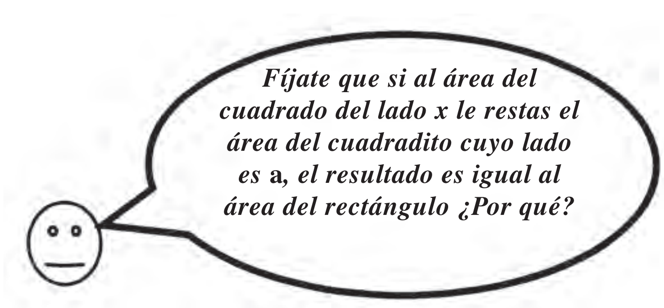
- Aumenta un lado en a y otro disminúyelo en **a**.
- Traza el rectángulo de dimensiones **(x + a)** y **(x – a).**



- Expresa el área del rectángulo sombreado en función de las dimensiones de sus lados.

- Observa muy bien esta última figura y responde:

¿Cómo son las áreas del cuadrado inicial de lado **x** y la del rectángulo? ¿Cuál es mayor?



Lo anterior permite escribir la siguiente igualdad:

$(8x - 3)\ (8x + 3)$; $(0.5y + 2)\ (0.5y - 2)$; $(y + \frac{2}{3}s); (y - \frac{2}{3}s)$

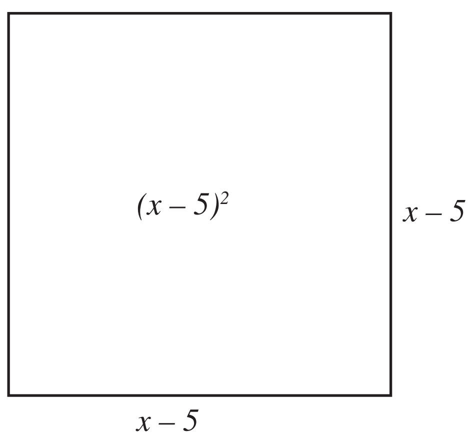
Observa en el video el procedimiento para graficar una función de la forma $y = (x - a)^2$.

Lee individualmente el texto y comenta con tus compañeros(as) y profesor(a) las diferencias entre las trayectorias que determinan las funciones de la forma **$y = x^2 + a$** y **$y = (x - a)$**.

GRÁFICA DE FUNCIONES DE LA FORMA $y = (x - a)^2$

Para calcular el área de un cuadrado, basta con elevar al cuadrado la medida de uno de sus lados.

Por ejemplo:



Haz de suponer que existe un cuadrado de lado x en el cual se toma una longitud de 5 unidades menos, que es precisamente $x - 5$.

Si uno de sus lados es $x - 5$ entonces $A = (x - 5)\ (x - 5)$ o también:

$$A = (x - 5)^2$$

La fórmula representa una función, cuya regla es $y = (x - 5)^2$

La función $y = (x - 5)^2$ es de la forma $y = (x - a)^2$

$$y = (x - a)^2$$

Constante

Variable dependiente

Variable independiente

Dado que $(x - a)^2$ es un binomio con exponente dos, las funciones con esa forma se llaman de segundo grado o funciones cuadráticas.

Para graficarla primero se realiza la tabulación de la función, asignando arbitrariamente valores a su variable **x** y obteniendo los correspondiente valores de **y**.

Si $x = 3$, $y = (3 - 5)^2 = (-2)^2 = 4$

Si $x = 4$, $y = (4 - 5)^2 = (-1)^2 = 1$

Si $x = 5$, $y = (5 - 5)^2 = (0)^2 = 0$

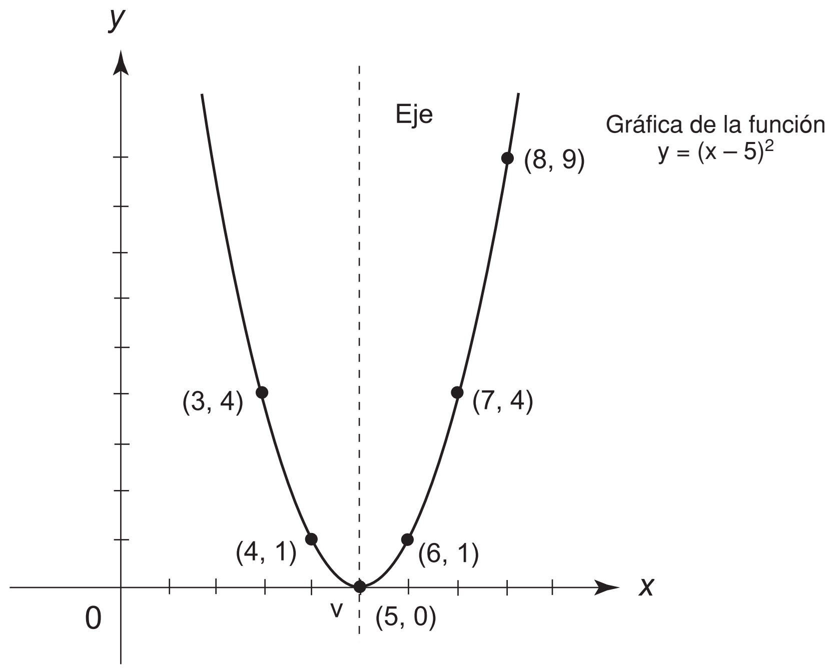
Si $x = 6$, $y = (6 - 5)^2 = (1)^2 = 1$

Si $x = 7$, $y = (7 - 5)^2 = (2)^2 = 4$

$y = (x - 5)^2$

x	**y**	
3	4	(3, 4)
4	1	(4, 1)
5	0	(5, 0)
6	1	(6, 1)
7	4	(7, 4)

Al representar los pares (x, y) en el plano cartesiano se obtiene la gráfica de la función.



La curva que representa esta función recibe el nombre de parábola; es simétrica respecto a una paralela al eje OY, que se llama eje de la parábola. En este caso el punto V de intersección del eje con la parábola es el vértice.

Si se toma cualquier punto de la curva, por ejemplo (8, 9) y se sustituyen sus coordenadas en la función, se tiene:

$$y = (x - 5)^2$$
$$9 = (8 - 5)^2$$
$$9 = 3^3$$
$$9 = 9$$

Por lo tanto, todo punto sobre la curva satisface la función.

¿Cómo será la gráfica para la función

$$y = (x + 5)^2?$$

¿Donde estará situado el vértice?

Otro ejemplo de gráfica de la forma $y = (x - a)^2$ es para cuando $a = 9$ se tiene.

$$y = (x - 9)^2$$

Para obtener los pares (x, y) se realiza la siguiente tabulación:

Si $x = 7$, $y = (7 - 9)^2 = (-2)^2 = 4$

Si $x = 8$, $y = (8 - 9)^2 = (-1)^2 = 1$

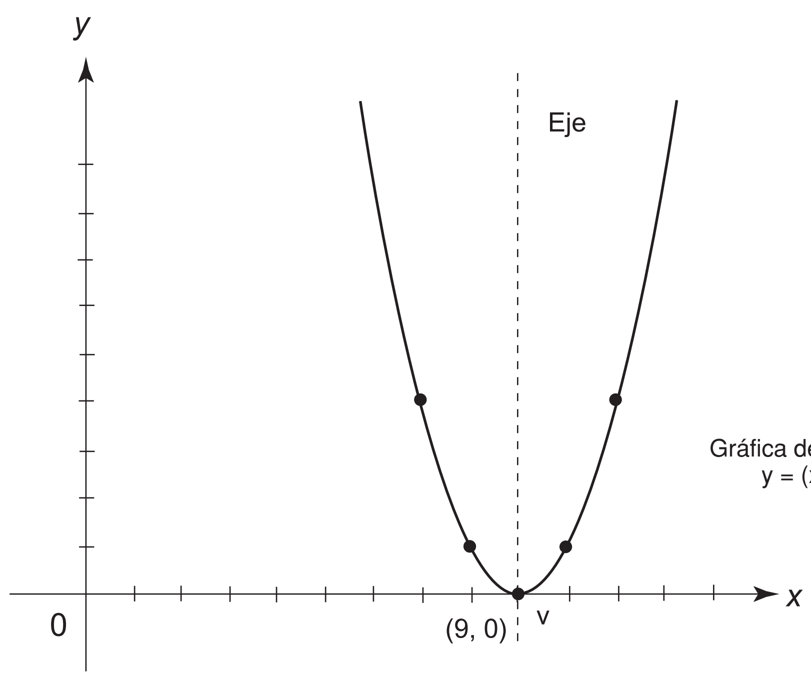
Si $x = 9$, $y = (9 - 9)^2 = (0)^2 = 0$

Si $x = 10$, $y = (10 - 9)^2 = (1)^2 = 1$

Si $x = 11$, $y = (11 - 9)^2 = (2)^2 = 4$

x	y	
7	4	(7, 4)
8	1	(8, 1)
9	0	(9, 0)
10	1	(10, 1)
11	4	(11, 4)

Los pares de números obtenidos son las coordenadas de los puntos que, al trazar una curva continua que pase por ellos, nos dan la gráfica buscada.



El vértice de la parábola (V) es el punto cuyas coordenadas son (9, 0). Al comparar ésta y la anterior gráfica se puede afirmar que en una función de la forma $y = (x - a)^2$, el valor de **a** determina el vértice de la parábola sobre el eje de las abscisas.

¿Cómo será la gráfica para la función $y = (x + 9)^2$?

¿Cuáles serán las coordenadas del vértice de la parábola?

Reúnete con tres compañeros(as) e intenta definir el concepto de parábola; si es necesario, auxíliate con un diccionario, con otro texto de matemáticas o con tu maestro(a).

Anota en tu cuaderno tu definición.

Lee a tu definición frente al grupo para discutirla y hacerle las correcciones necesarias.

Divide el equipo anterior, ahora trabaja en parejas para completar las siguientes afirmaciones.

a) En $y = (x - a)^2$, ¿qué representan las letras y, x, a?

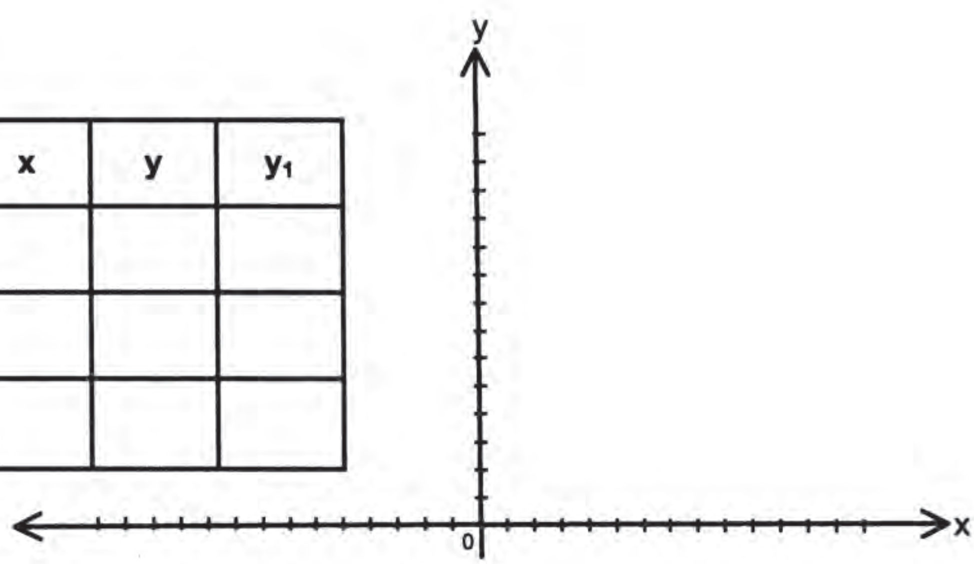
b) ¿Cómo se llama y cómo puedes describir su ubicación en el plano cartesiano de la curva que representa una función de la forma $y = (x - a)^2$?

c) En el vértice de la curva de una función de la forma $y = (x - a)^2$ ¿Cómo se determinan sus coordenadas y dónde se localiza?

Compara tus respuestas con las de otra pareja; si no coinciden consulta con tu profesor(a).

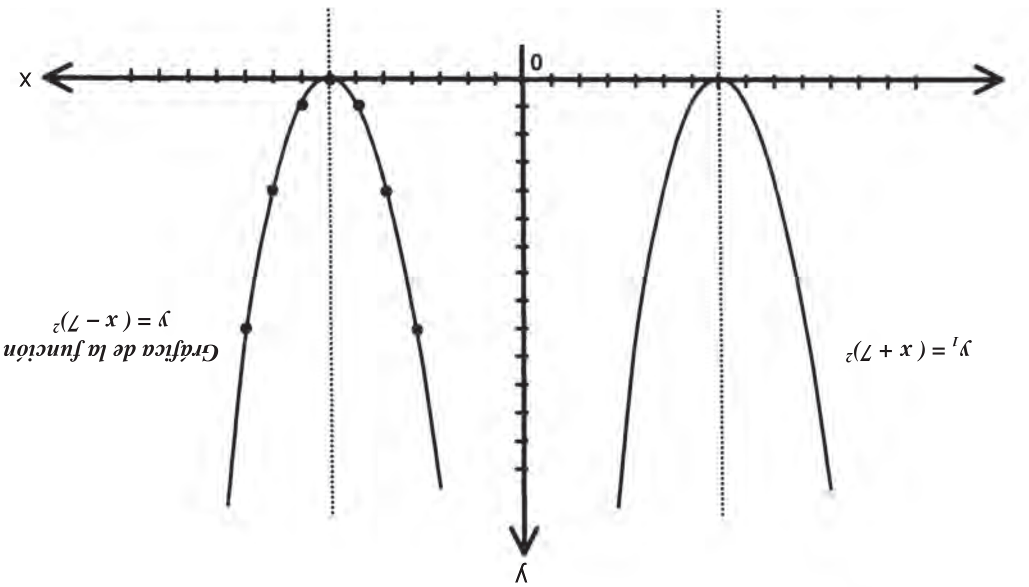
Grafica individualmente la función $y = (x - 7)^2$, lo mismo que $y_1 = (x + 7)^2$.

x	y	y_1



Compara tu gráfica con la que realice tu profesor(a) en el tablero: si es necesario, consulta la clave.

CLAVE:



$$\underset{\substack{\downarrow \\ \textit{Área del} \\ \textit{cuadrado inicial}}}{x^2} \quad - \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \textit{Área del} \\ \textit{cuadradito}}}{a^2} \quad = \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \textit{Área del} \\ \textit{rectángulo}}}{(x+a)\ (x-a)}$$

Las fórmulas para las áreas mencionadas representan la función que puede escribirse así:

$$y = x^2 - a^2 \qquad \text{o} \qquad y = (x + a)\ (x - a)$$

La primera se acostumbra denominar **diferencia de cuadrados**, la cual puede expresarse como la **suma por la diferencia de las raíces**.

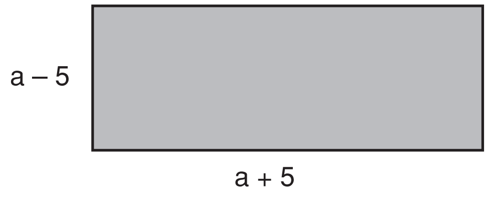
Con base en lo anterior se puede afirmar que:

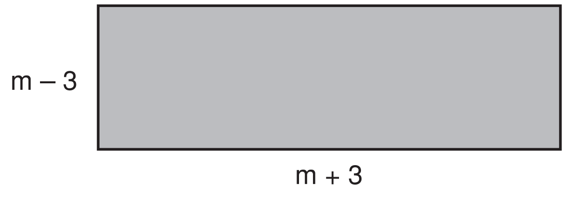
El producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos, es igual al cuadrado del primero menos el cuadrado del segundo.

$(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2$

¡Aplica lo aprendido!

✔ Encuentra el área de los siguientes rectángulos.

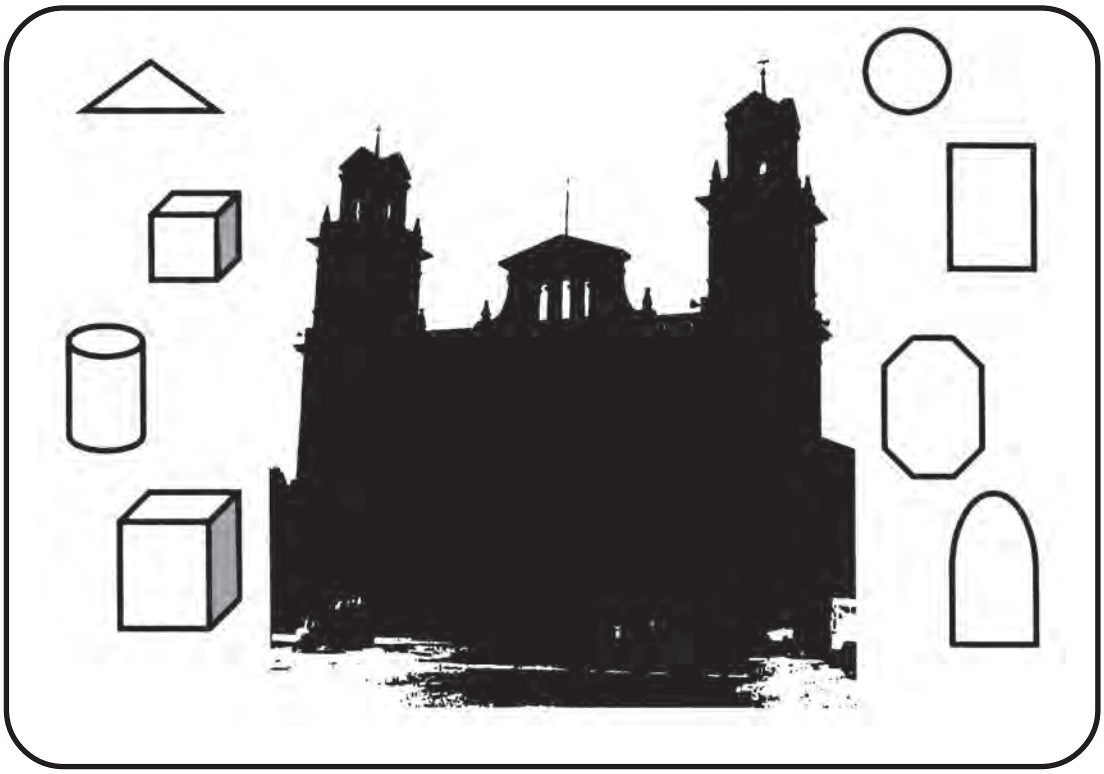




✔ Expresa los siguientes productos como diferencia de cuadrados:

Núcleo Básico 4

SÓLIDOS



Durante el desarrollo de este núcleo conocerás las características de cuerpos que llamamos sólidos geométricos y, con base en éstas, los clasificarás como poliedros o como cuerpos redondos con sus respectivas subdivisiones.

Trazarás los desarrollos del cubo y el prisma rectangular, para construir modelos estos cuerpos y al manipularlos verificarás sus características. A partir de estos sólidos formarás cuerpos compuestos.

Conocerás y manejarás las unidades de volumen y capacidad, así como sus equivalencias y las aplicarás en la resolución de problemas como la obtención del volumen y la capacidad de cubos y prismas rectangulares.

Obtendrás también el área lateral de algunos de ellos.

Los conocimientos que al respecto traes del ciclo de Básica Primaria te serán de mucha utilidad.

44 CON TÉRMINOS PRECISOS

141-1

Descripción de los sólidos
Comprensión y uso de los términos para describir sólidos

Existen términos cuyo significado depende del contexto en que se manejen.

Observa el video que introduce términos en el contexto de la geometría para definir cuerpos que llamamos sólidos geométricos.

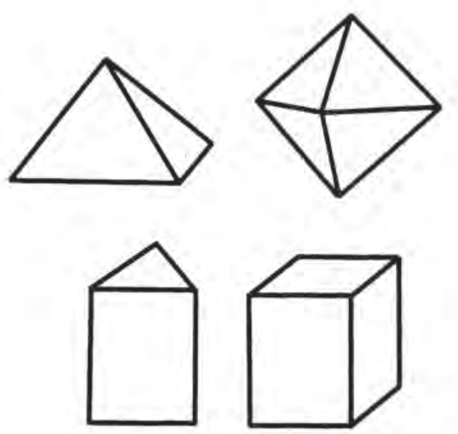
Con tus compañeros(as) de grupo lee y analiza algunas precisiones sobre el lenguaje usado para caracterizar y describir algunos cuerpos geométricos.

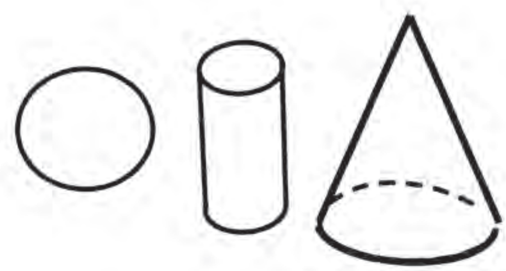
DESCRIPCIÓN DE SÓLIDOS

Frecuentemente se efectúan comparaciones y se clasifican cosas, persona o hechos. Para que las clasificaciones sean válidas, es necesario determinar el criterio de clasificación y manejar un lenguaje común.

A continuación se mencionan los términos utilizados en geometría para definir los llamados cuerpos geométricos o sólidos.

CUERPOS GEOMÉTRICOS O SÓLIDOS	
Poliedros	**Cuerpos redondos**
Cuerpos limitados por caras planas.	Cuerpos limitados por caras curvas, o por caras curvas y planas.

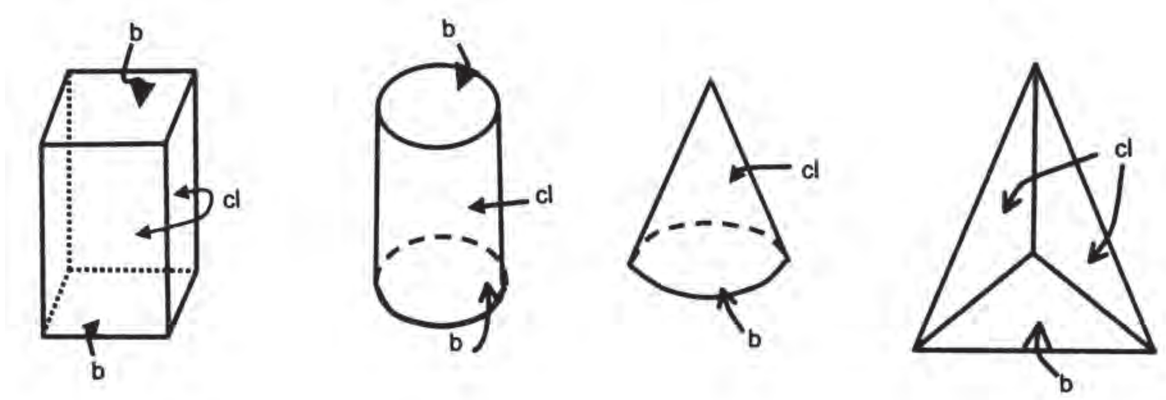




Se ha visto que los sólidos, aunque tienen formas diferentes, tienen elementos comunes.

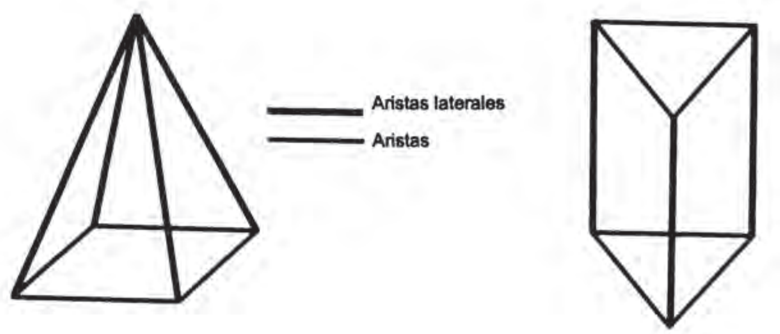
Todo sólido está limitado por caras planas o por caras curvas.

Cara. Es cada una de las superficies que limitan a un poliedro o a un cuerpo redondo. Algunas de estas caras las denominamos bases (b) y otras caras laterales (cl).

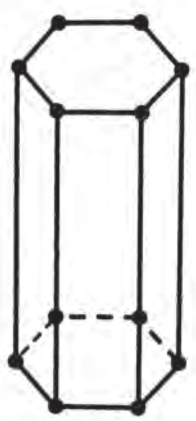


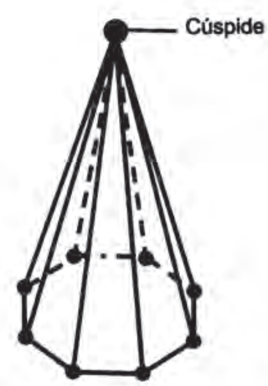
Arista. Es la línea o borde donde concurre o se unen dos caras de un sólido.

Al lado o línea donde concurren dos caras laterales, lo llamamos **arista lateral**.



Vértice. Es el punto donde concurren 3 o más aristas.



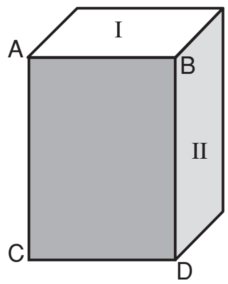


Cúspide. Es el vértice donde se unen todas las caras laterales de una pirámide.

Todo sólido tiene caras, aristas o vértices.

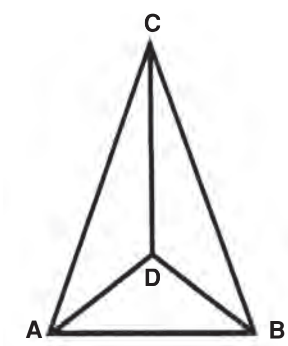
Para hacer referencia específica a cualquiera de los elementos de un sólido es necesario nombrarlos o denotarlos de alguna manera.

Las caras se denominan con un número, o con las letras mayúsculas de sus vértices.



En el prisma, la cara sombreada es ABCD y las caras en blanco **I** y **II**.

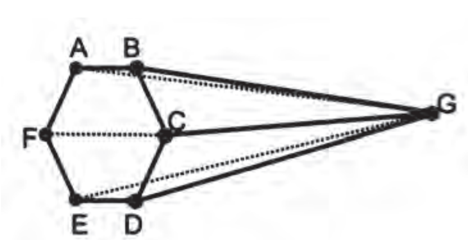
Para nombrar las aristas se utilizan las letras que determinan los puntos extremos y se les dibuja una raya en la parte superior, como a todo segmento.



En la pirámide, sus aristas son:

$\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{DB}$, $\overline{AC}$, $\overline{DC}$, $\overline{BC}$

Los vértices se nombran con una letra mayúscula.

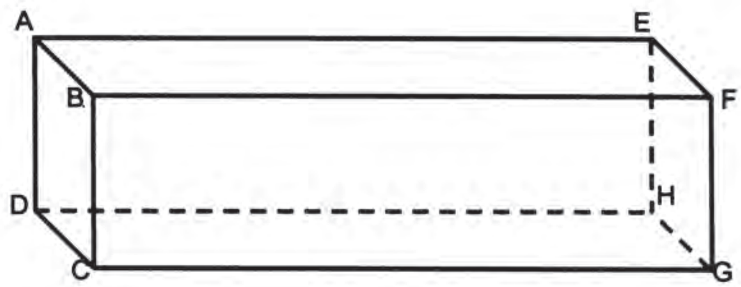


En la figura los vértices son:

A, B, C, D, E, F, G.

Con tus compañeros(as) de grupo busca algunos objetos cuyas formas sean parecidas a cuerpos geométricos descritos en el video o en la lectura anterior y descríbelos usando los términos que has aprendido.

Individualmente, considera el siguiente prisma y contesta las preguntas en tu cuaderno.



1. ¿Cuáles son los vértices del prisma?

2. ¿Cuáles son todas sus aristas? ¿Cómo las denotas?

3. ¿Qué caras consideras como bases del prisma?

4. ¿Cuáles serían entonces sus caras laterales?

5. ¿Si consideras como base de este prisma la cara A B C D, ¿cuál sería la otra base?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros(as).

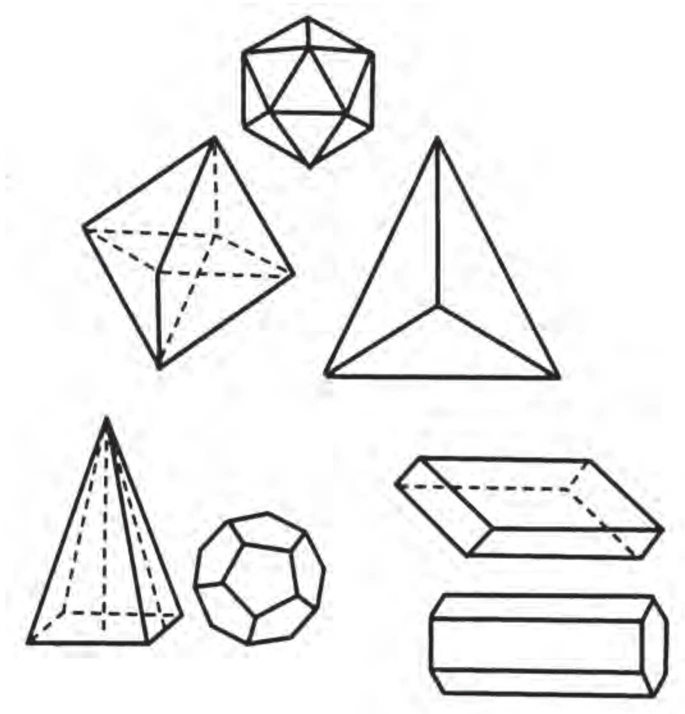
45 CON LA MISMA CARA

142-1

Poliedros regulares
Conocimiento de las características de los sólidos regulares

La naturaleza ha sido fuente de inspiración del hombre con la infinidad de formas que le presenta; unas caprichosas y complicadas, otras más sencillas y armoniosas. Éstas seguramente han permitido el surgimiento de conceptos como el de regularidad, simetría, formas geométricas, y muchos más.

En esta sesión nos ocuparemos de los sólidos llamados poliedros. Es decir de aquellos cuyas caras son polígonos, que pueden ser regulares o irregulares.



Nos interesarán en primera instancia los que ofrecen mayor regularidad; sus caras son polígonos regulares que además tienen igual medida, es decir, son congruentes.

El análisis matemático de los poliedros regulares lo realizaron los pitagóricos (matemáticos griegos cuya escuela empezó a teorizar acerca de la geometría) aunque ya se habían estudiado anteriormente de manera empírica, simplemente como objetos físicos.

Los poliedros regulares se conocen también como **sólidos platónicos**, pues Platón relacionó a 4 de ellos con los elementos y al quinto con el universo:

Cubo	-	*Tierra*
Tetraedro	-	*Fuego*
Octaedro	-	*Aire*
Icosaedro	-	*Agua*
Dodecaedro	-	*Universo*

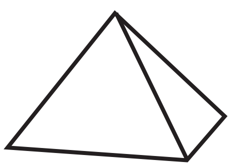
Teeteto (matemático griego que vivió de 415 a 369 a.n.e) fue el primero en formular una teoría general, dando la construcción geométrica de los 5 cuerpos y afirmando que no pueden existir otros.

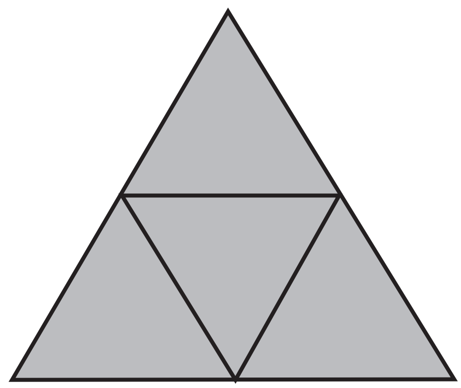
Con tus compañeros(as) de grupo, observa el video, posteriormente organicen un debate sobre los aspectos que encuentren más interesantes.

La mejor forma de buscar características en los poliedros regulares es haciendo modelos de ellos y manipulándolos.

Con tus compañeros(as) de grupo elijan dos o tres y ayudados con los diagramas que vienen a continuación, construyan sus propios modelos.

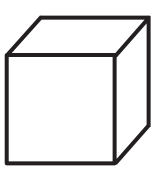
Tetraedro.
Del griego:
Téttara (cuatro) y **edra** (cara o base)
Sus caras son cuatro triángulos equiláteros.

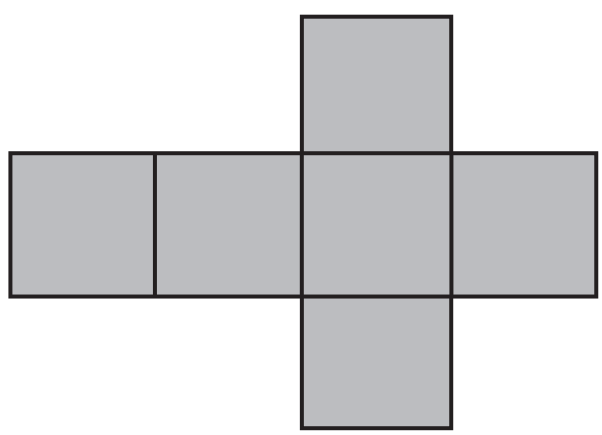




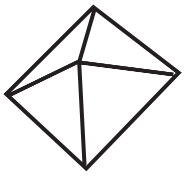
Recorta y dobla por las crestas interiores. Puedes dejar pestañas para pegar al armar el modelo.

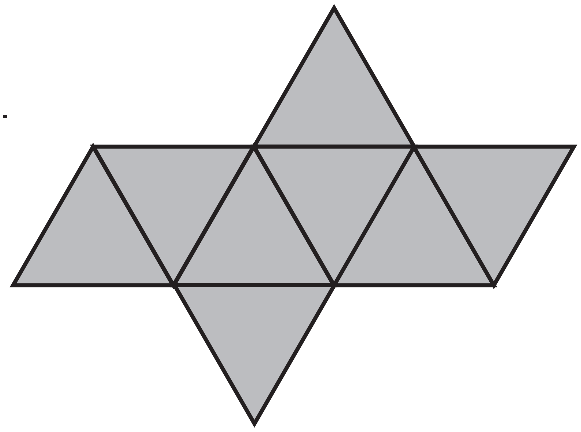
Hexaedro o **cubo**
Del griego:
Hex (seis) y **edra** (cara o base)
Sus caras son seis cuadrados iguales.

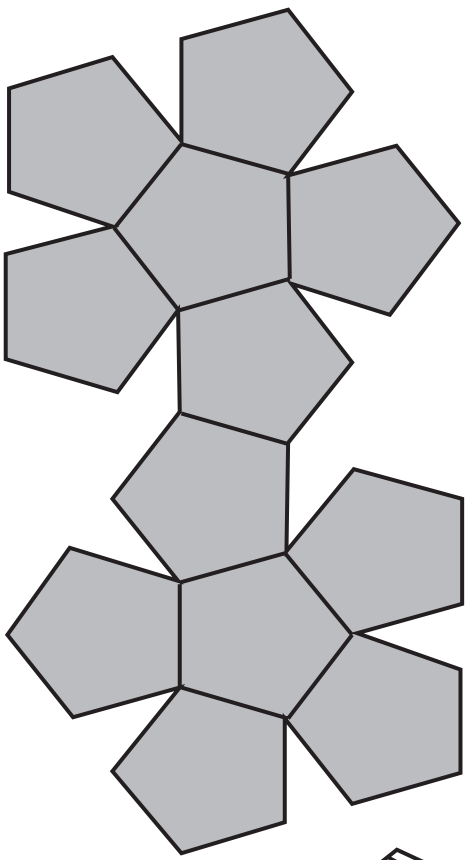




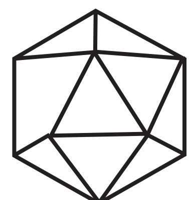
Octaedro
Del griego:
Októo (ocho) y **edra** (cara o base)
Sus caras son ocho triángulos equiláteros.

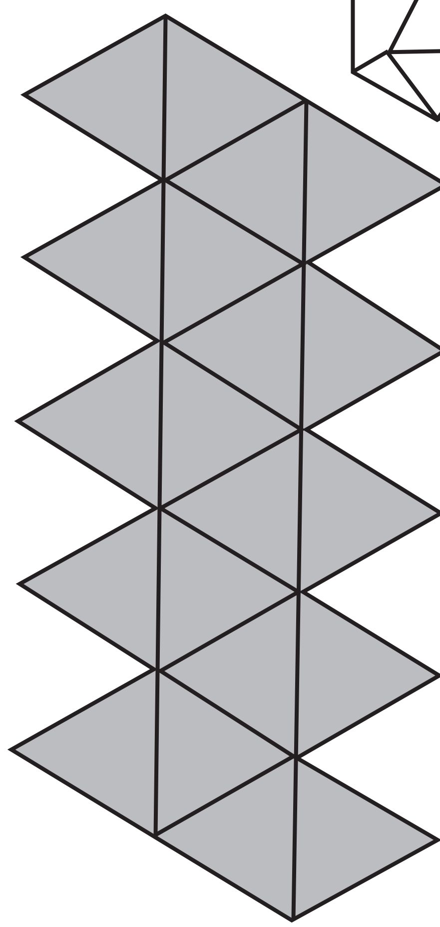


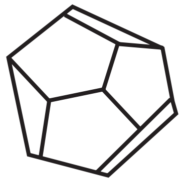




Icosaedro
Del griego:
Eíkosi (veinte) y **edra** (cara o base)
Sus caras son 20 triángulos equiláteros.







Dodecaedro
Del griego
Doódeka (doce) y **edra** (cara o base)
Sus caras son 12 pentágonos regulares.

Con tus compañeros(as), identifica en sus modelos de poliedros los vértices, aristas y caras y construyan en sus cuadernos, una tabla para especificar el número de cada uno de los elementos que los conforman.

Poliedros	Aristas	Caras	Vértices
Tetraedro			
Hexaedro			
Octaedro			
Dodecaedro			
Icosaedro			

1. ¿Cuántas aristas tiene un tetraedro? ¿Cuántas caras y cuántos vértices?

2. Observa detenidamente los datos que sobre el hexaedro y el octaedro has encontrado. ¿Cuántas aristas tiene cada uno de ellos? ¿Cuántas caras tiene el hexaedro y cuántos vértices tiene el octaedro? ¿Cuántas caras tiene el octaedro y cuántos vértices tiene el hexaedro?

Seguramente has encontrado datos curiosos ¿no?

El hexaedro y el octaedro —así como el dodecaedro y el icosaedro— se han llamado **poliedros conjugados**, por tener ambos igual número de aristas e invertido el número de sus caras y vértices.

3. Como a los matemáticos les encanta encontrar regularidades y expresiones generales para ellas, el número de vértices (V) de cada poliedro regular puede obtenerse multiplicando el número de caras por el número de vértices que tiene cada una de éstas y dividiendo el producto entre el total de aristas que concurren en un vértice del poliedro.

$$V = \frac{\text{Número de caras} \times \text{número de vértices de cada cara}}{\text{número de aristas que concurren}}$$

Analiza este ejemplo.

Tetraedro

4 caras triangulares

Cada triángulo tiene 3 vértices

En cada vértice concurren 3 aristas

entonces

$$\frac{4 \times 3}{3} = 4$$

Por lo tanto, el tetraedro tiene cuatro vértices.

4. El número total de aristas de un poliedro se obtiene aplicando la igualdad conocida como el **teorema de Euler**:

Número de caras + Número de vértices = Número de aristas + 2, así que:

Número de aristas = Número de caras + Número de vértices – 2

$$\boxed{A = C + V - 2}$$

Donde
A = Aristas
C = Caras
V = Vértices

Compruébalo para el cubo o hexaedro.

A = ?
C = 6
V = 8

$$A = 6 + 8 - 2 = 12$$

El número de aristas del hexaedro es 12.

En forma individual verifica lo que has aprendido.

1. Haz el siguiente cuadro en tu cuaderno y complétalo.

Poliedro regular	**Número de caras**	**Formas de la cara**
Tetraedro		
Hexaedro		
Octaedro		
Icosaedro		

2. Aplica la expresión para obtener el número de vértices de cada poliedro regular.

$$V = \frac{\text{Número de caras} \times \text{número de vértices de cada cara}}{\text{número de aristas que concurren}}$$

Compara con los resultados en la tabla que habrás construido por conteo.

3. Mediante el teorema de Euler calcula el número de aristas de cada poliedro.

$$A = C + V - 2$$

Compara los valores que obtienes con los de la tabla que ya tenías.

Comparte tus hallazgos con los de tus compañeros(as).

46 UN CUERPO... VARIAS CARAS

143-1

Poliedros irregulares
Conocimiento de las características de los sólidos irregulares

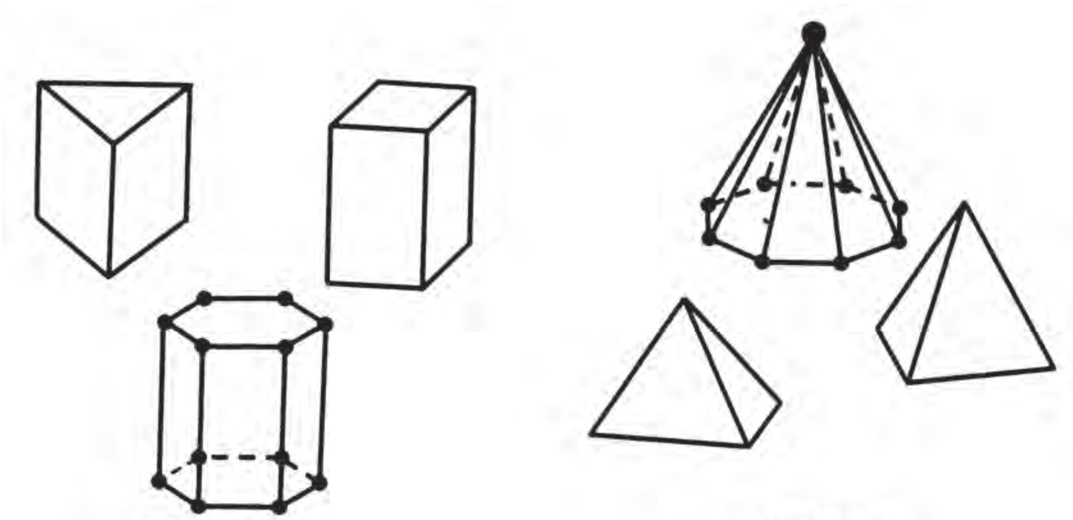
Al realizar compras en una tienda, mercado o centro comercial, es posible encontrar una gran variedad de productos que tienen características muy especiales en la presentación de sus envases. ¿Te gustaría conocer las características de los sólidos irregulares? ¡Adelante!

Observa el video que te permitirá conocer acerca de los llamados **poliedros irregulares** y sus características.

Con tus compañeros(as) de grupo lee, analiza y comenta sobre algunas precisiones acerca de estos sólidos.

La industria emplea una gran variedad de cajas y envases que permiten presentar de manera práctica y atractiva sus productos.

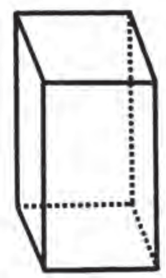
Caracterizaremos dos tipos de ellos.



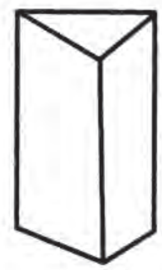
PRISMAS PIRÁMIDES

1. Los **prismas** son aquellos poliedros que tienen dos bases de la misma forma y sus caras laterales son rectangulares; así pues, no todas sus caras son iguales; por ello se les denomina irregulares.

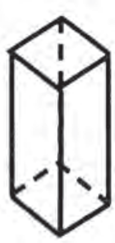
Reciben su nombre según la forma de sus bases, por ejemplo:



Prisma rectangular
Sus bases también son rectángulos, pero no son de la misma forma y dimensiones que sus caras laterales.

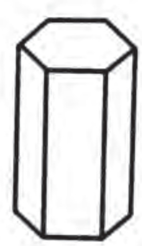


Prisma triangular
Sus bases son triángulos.



Prisma cuadrangular
Sus bases son cuadrados.

Prisma pentagonal
Sus bases son pentágonos



Prisma hexagonal
Sus bases son hexágonos.

Los prismas se pueden distinguir también por el número de caras, vértices y aristas. Para facilitar el análisis de estas características, analícese el siguiente cuadro:

Poliedros irregulares	Caras	Vértices	Aristas
Prisma rectangular	6	8	12
Prisma triangular	5	6	9
Prisma cuadrangular	6	8	12
Prisma pentagonal	7	10	15
Prisma hexagonal	8	12	18

Veamos un ejemplo para determinar el número de caras, vértices y aristas de un poliedro:

El prisma triangular tiene:

a) 2 bases, que son triángulos y 3 caras laterales que son rectángulos.

Por tanto tiene en total 5 caras.

b) ¿Cómo encontrar el número de vértices?

3	$\times$	2	=	6
Número de los lados de cada base		Número de bases		Número de vértices

¿Por qué?: Porque los vértices están sobre las bases.

Porque cada polígono tiene igual número de vértices que de lados.

Porque cada prisma tiene dos bases.

c) ¿Cuántas aristas tiene?

Ya conoces una expresión para ello:

Número de aristas = número de caras + número de vértices –2.

sustituyendo, se tiene:

$$\begin{aligned} \textbf{Número de aristas} &= 5 + 6 - 2 \\ &= 11 - 2 \\ &= 9 \end{aligned}$$

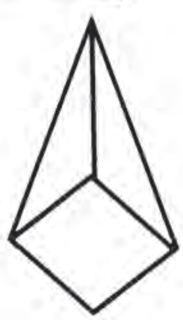
Por tanto, el prisma triangular tiene 9 aristas.

2. Ahora se hará referencia a otros cuerpos irregulares que son las **pirámides**.

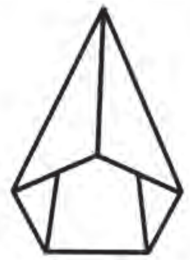
Las pirámides son aquellos poliedros que tienen una base, sus caras laterales son triángulos y los vértices de los triángulos se unen en un punto llamado cúspide, el cual es opuesto a la base.

Al igual que los prismas, las pirámides reciben su nombre en función de la forma de sus bases; por lo tanto, se tiene:

Pirámide triangular



Pirámide cuadrangular



Pirámide pentagonal

Pirámide hexagonal

Las pirámides, al igual que los prismas, también se pueden distinguir por el número de caras, vértices y aristas; obsérvese el cuadro:

Poliedros irregulares	Caras	Vértices	Aristas
Pirámide triangular	4	4	6
Pirámide cuadrangular	5	5	8
Pirámide pentagonal	6	6	10
Pirámide hexagonal	7	7	12

En el siguiente ejemplo se determinará el número de caras, vértices y aristas, situación que es aplicable a los poliedros irregulares (prismas). La pirámide cuadrangular tiene:

a) Una base que es un cuadrado y

b) 4 caras que son triángulos

En este tipo de sólidos, la base será considerada como una cara más; por lo tanto, tiene un total de 5 caras.

Ahora bien, como se sabe, la base de esta pirámide tiene un determinado número de lados y obtiene su nombre en función de la forma de su base. Con esta información es posible obtener el número de vértices.

Si se conoce que la base es un cuadrado, su número de lados, más uno será el número de vértices que presente la pirámide, por consiguiente, se tiene que:

Número de lados de la base + uno = número de vértices.

Sustituyendo: 4 + 1 = 5

Por lo tanto, la pirámide cuadrangular tiene 5 vértices. Otra manera de obtener el número de vértices es sabiendo que el número de caras que tiene corresponderá siempre con el número de vértices.

Observa este aspecto en el cuadro de poliedros irregulares de las pirámides.

Para determinar el número de aristas se procede igual que cuando se obtuvo el número de aristas en los prismas, esto es:

Número de aristas = número de caras + número de vértices – 2.

Sustituyendo la información que se tiene de la pirámide cuadrangular, se tiene que:

$$\begin{aligned} \textbf{Aristas} &= \mathbf{5 + 5 - 2} \\ &= \mathbf{10 - 2} \\ &= \mathbf{8} \end{aligned}$$

Por lo tanto, esta pirámide tiene 8 aristas.

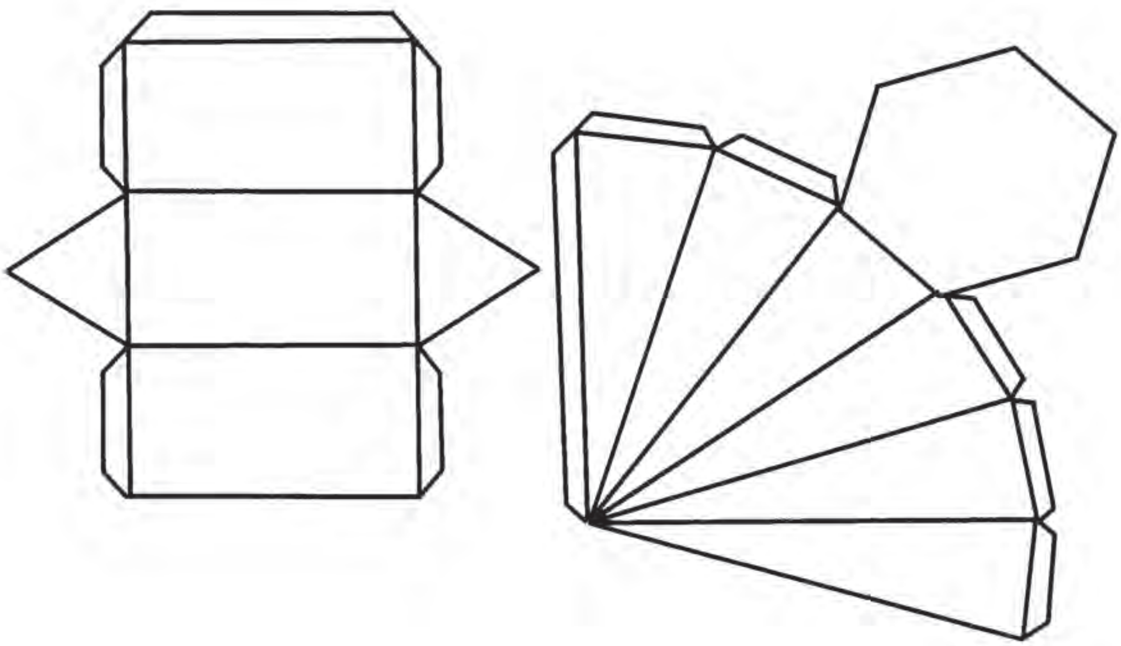
El conocimiento de las características de los poliedros irregulares fortalece y facilita la comprensión de otros aspectos de la geometría que se considerarán próximamente.

Con tu grupo de trabajo, construye modelos de algunos sólidos: un prisma triangular y una pirámide hexagonal.

Haz en tu cuaderno un cuadro con el conteo de los elementos de cada poliedro.

Prisma rectangular: número de caras, vértices y aristas.

Prisma hexagonal: número de caras, vértices y aristas.



Compara tu trabajo con el realizado por tus compañeros(as).

En forma individual, busca en revistas, periódicos e impresos, ejemplos que ilustren cómo el ser humano ha empleado formas geométricas de sólidos irregulares en construcciones y objetos.

Comparte tu trabajo con tus compañeros(as).

47 LOS DESCARADOS

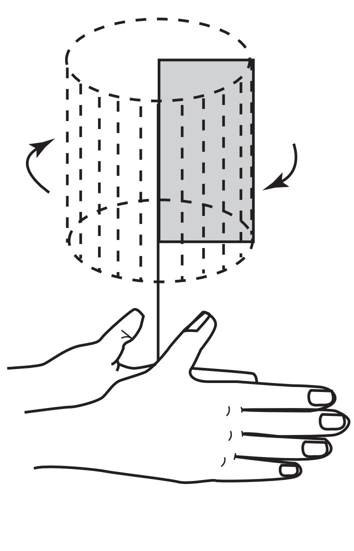
144-1

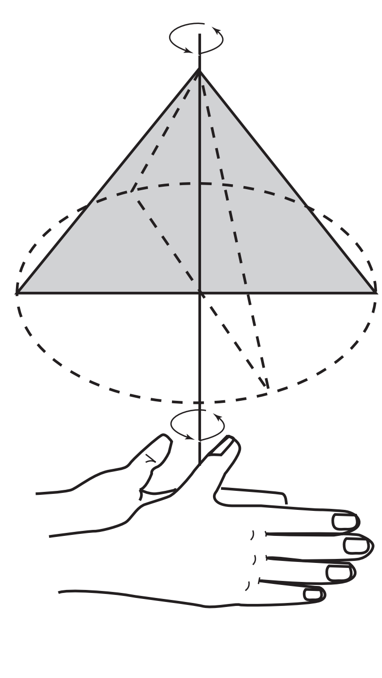
Cuerpos de revolución
Conocimiento de las características de los cuerpos de revolución o de base circular

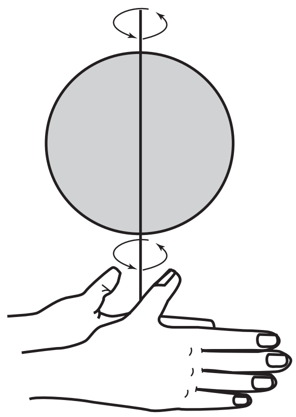
En geometría, el término revolución tiene un significado muy diferente del que se le da en la historia, la ciencia y otros contextos. ¿De qué tipo de revolución se habla aquí?

Observa el video en el que se aclarará el significado de cuerpos de revolución. Comenta con tus compañeros(as) aquellos aspectos que consideres son los más interesantes.

Lee y analiza, con tu grupo de trabajo, algunas precisiones acerca de los llamados cuerpos de revolución. El cilindro, el cono y la esfera reciben este nombre debido a que son generados por la rotación de una figura plana alrededor de un eje:

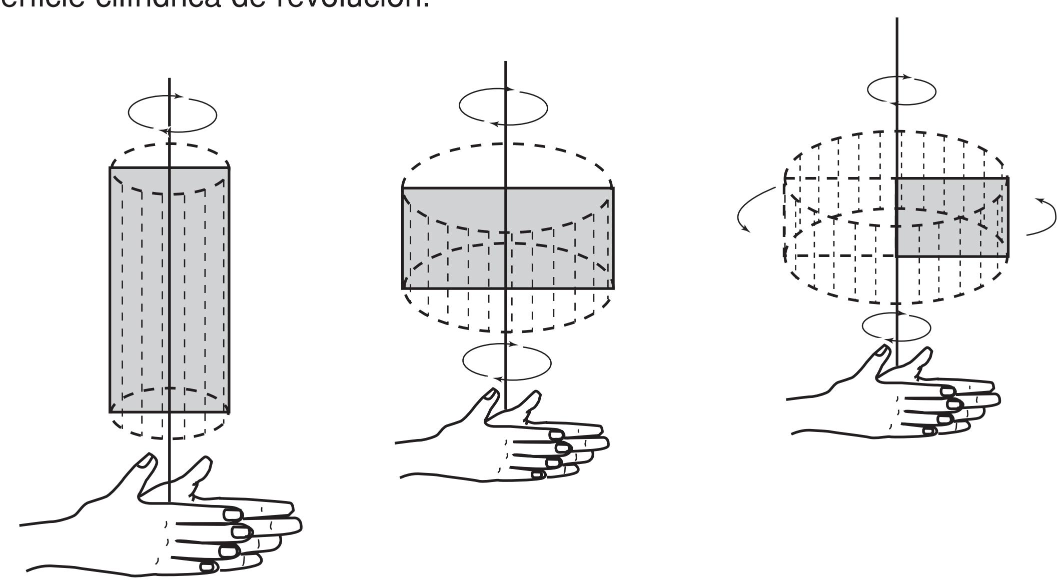






Cilindro

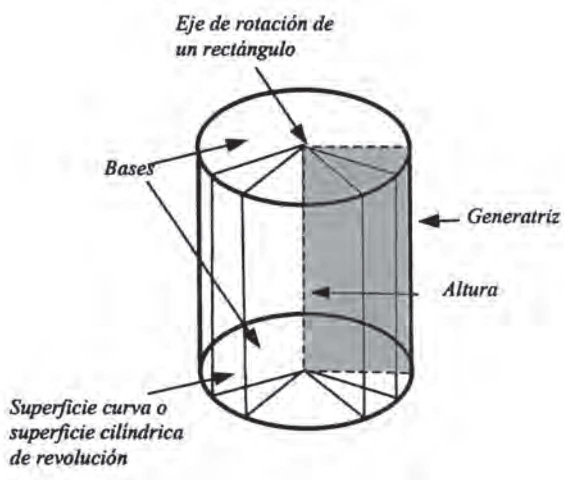
Es un cuerpo generado por un rectángulo, que al girar alrededor de alguno de sus lados, produce un cuerpo que se encuentra limitado por dos círculos de igual dimensión, considerados como bases y por una superficie curva a la que se ha identificado como la superficie cilíndrica de revolución.



La **generatriz** es el lado del rectángulo que al girar produce la superficie curva lateral del cilindro.

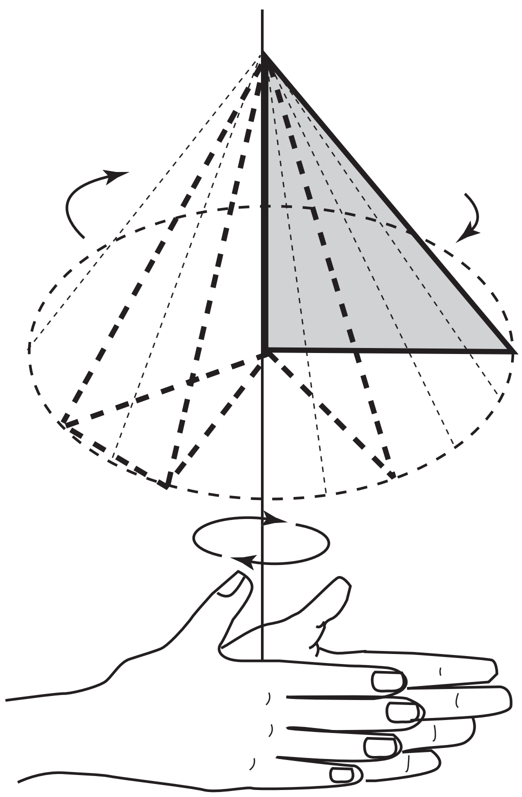
Otro elemento característico de este sólido es su **altura**. La altura es la distancia que existe entre las dos bases y coincide con la longitud de su generatriz.

Obsérvense en la siguiente figura los elementos que constituyen al cilindro.

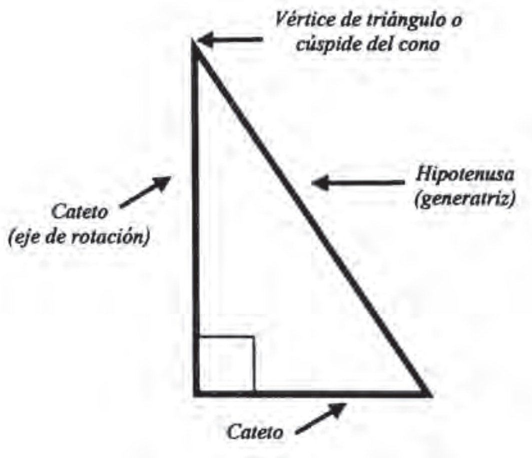


Cono

También es un cuerpo de revolución que se genera por un triángulo rectángulo que al girar sobre uno de sus catetos —el eje de rotación— produce un cuerpo limitado por un círculo (la base) y por una superficie curva, que propiamente forma al cono y se denomina **superficie cónica de revolución**.

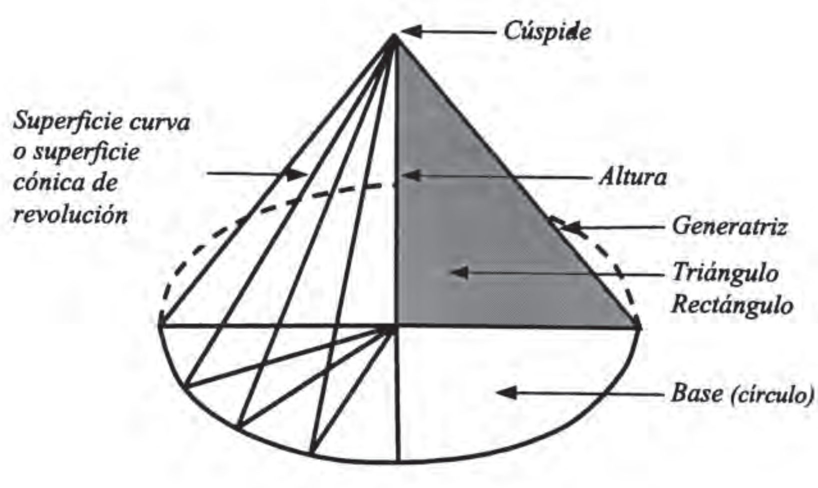


El triángulo rectángulo que genera al cono es como el siguiente:



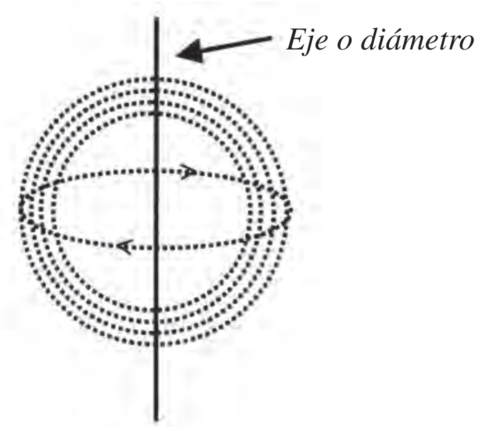
La generatriz del cono es en este caso la hipotenusa o parte «externa» del triángulo rectángulo, el cual, al girar sobre uno de sus catetos, genera la superficie lateral del cono.

Otro elemento que es característico del cono es su vértice o cúspide, que es el mismo vértice superior del triángulo rectángulo; por último, se tiene que la altura del cono es la distancia vertical que existe entre el vértice y el centro de la base.

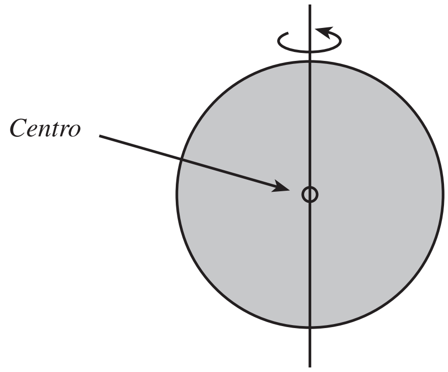


Esfera

Ahora considérense las características de un cuerpo geométrico generado por la rotación completa de un círculo que gira en torno a su diámetro.



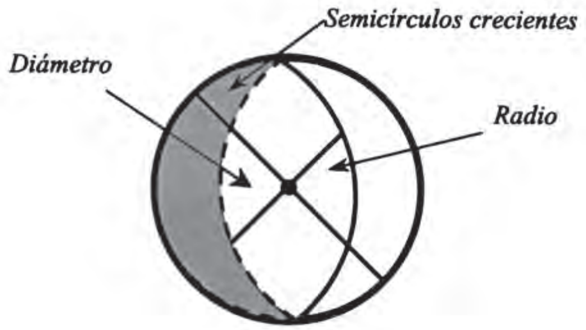
La superficie de la esfera se conoce como **superficie esférica** debido a que todos los puntos de una superficie esférica están a la misma distancia de un punto interior llamado **centro.**

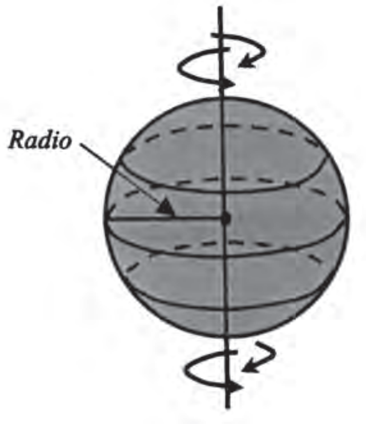


Los elementos característicos de la esfera son el centro, el radio y el diámetro.

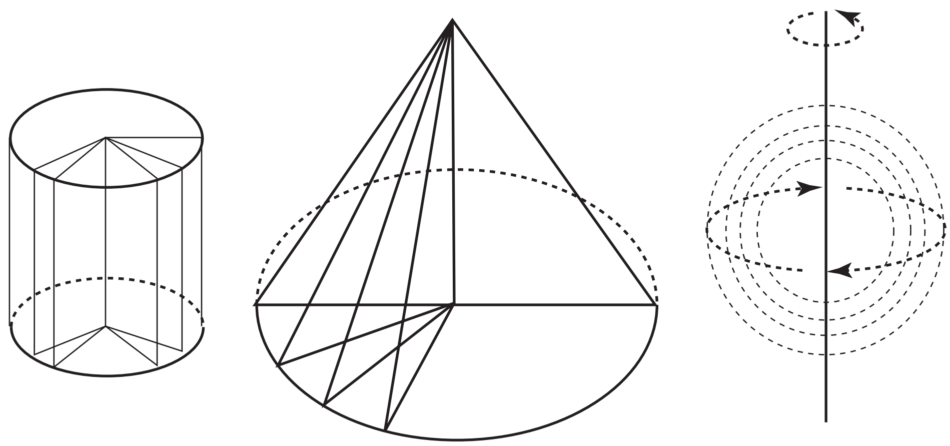
El segmento que une al centro de una esfera con cualquier punto de la superficie, se denomina radio. Y el diámetro es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la superficie esférica y que pasa por el centro de la misma.

Por lo tanto, todos los diámetros de la esfera son iguales entre sí. Al realizar cortes en la esfera se determinan círculos de tamaño creciente, conforme uno se aproxima hacia el centro de la esfera.





Con tu grupo de trabajo, identifica en dibujos que realices en tu cuaderno, los elementos enumerados a continuación.



1. Ejes de rotación

2. Generatrices

3. Superficie cilíndrica de revolución

4. Superficie cónica de revolución

5. Bases de los cuerpos

6. Cúspide del sólido que la presente

7. Alturas

8. Centro de la esfera

9. Radio y diámetro de la esfera

Realiza maquetas huecas del cilindro y del cono. Haz el modelo correspondiente de figura plana que los generarían al rotar.

Expón tu trabajo a tus compañeros(as).

48 MANIPULACIÓN DE SÓLIDOS

145-1 Manipulación de sólidos
Identificación de los sólidos y sus características

De acuerdo con su forma los objetos que te rodean pueden relacionarse con los sólidos geométricos. En el video verás cómo muchas creaciones del ser humano tienen forma de sólidos geométricos.

Trabaja con tus compañeros(as) de grupo. Busca objetos en forma de prisma o de cuerpo redondo. Descríbelas; usa para ello un cuadro como se te sugiere:

Objeto	*Nombre del prisma*	*Número de caras*	*Número de vértices*	*Número de aristas*
	*Prisma rectangular*	*6*	*8*	*12*

Haz una maqueta utilizando modelos de sólidos geométricos que has aprendido a construir. Comparte tu trabajo con tus compañeros(as).

49 IGUALES O DIFERENTES

146-1

Comparación de sólidos
Identificación de los sólidos y sus características

Por lo general observamos a las personas, animales o cosas y, de manera inevitable, hacemos comparaciones y asignamos algún calificativo a la forma que tienen o a su manera de ser. Constantemente las estamos clasificando con base en ciertas características.

Con tus compañeros(as) de grupo lee y analiza el resumen de conceptos básicos sobre los sólidos que has conocido en estas sesiones. Sus características permiten encontrar similitudes y diferencias entre ellos.

Una clasificación general puede ser como la siguiente:

Sólido
Cuerpo geométrico limitado por caras

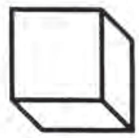
- ***I. Poliedros***
  Están limitados por caras planas poligonales
  - ***Regulares***
    Todas sus caras son de igual forma y tamaño
  - ***Irregulares***
    No todas sus caras son de igual forma o tamaño
- ***II. Cuerpos redondos***
  Están limitados por caras redondas o por caras redondas y planas

Los poliedros regulares, llamados también sólidos platónicos, se pueden agrupar así:

Poliedros regulares

Tetraedro: 4 caras
Octaedro: 8 caras, son triángulos equiláteros
Icosaedro: 20 caras

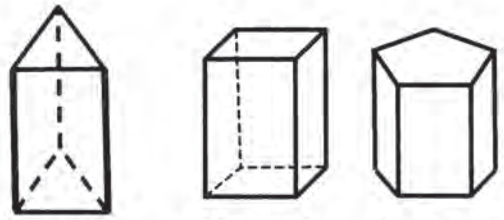
Cubo: 6 caras cuadradas



Dodecaedro: 12 caras pentagonales

Los poliedros irregulares permiten una clasificación como:

Poliedros irregulares

Prismas	Pirámides
Caras laterales rectangulares que unen las bases. Número de bases: 2 Forma de las bases: poligonal La forma de la base determina el nombre del prisma.	Caras laterales triangulares que concuerdan en un punto llamado cúspide. Número de bases: 1 Forma de la base: poligonal La forma de la base determina el nombre de la pirámide.
	
Triangular Cuadrangular Pentagonal	Triangular Rectangular Pentagonal

Los cuerpos de revolución se pueden caracterizar así:

Cuerpos redondos o de revolución			
	Cilindro	**Cono**	**Esfera**
Caras laterales	Una curva	Una curva	Una curva
Número de bases	2	1	No tiene
Forma de la base	circular	circular	No tiene

Cilindro Cono Esfera

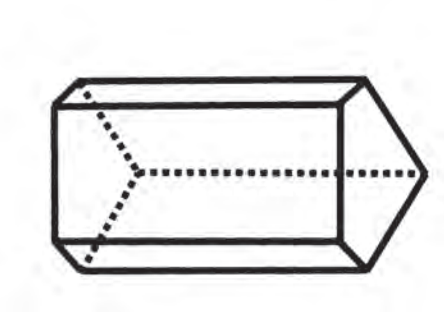
La comparación permite resaltar las particularidades y las diferencias entre dos o más objetos y, con base en ellas, clasificarlos y establecer otras relaciones entre el número de caras, vértices y aristas de estos cuerpos.

Figura	Número de lados de la base	Caras	Vértices	Aristas
Pirámide	n	n + 1	n + 1	2n
Pirámide triangular	3	3 + 1 = 4	3 + 1 = 4	2(3) = 6
Prisma	n	n + 2	2n	3n
Prisma pentagonal	5	5 + 2 = 7	2(5) = 10	3(5) = 15

Observa el video que te permite visualizar mejor las características comunes de los cuerpos geométricos, así como las diferencias que existen entre ellos.

Trabaja en equipo. Elige dos sólidos diferentes, escribe sus nombres, identifica diferencias y semejanzas entre ellos. Haz varias parejas y trabaja en tu cuaderno.

Por ejemplo esta pareja de sólidos:



¿Semejanzas? Diferencias?

Busca en revistas o periódicos ilustraciones sencillas de objetos con formas de sólidos geométricos que has estudiado. Clasifícalos según sus semejanzas y describe sus diferencias.

Comparte tu trabajo con tus compañeros(as).

50 ¿ES UN DADO?

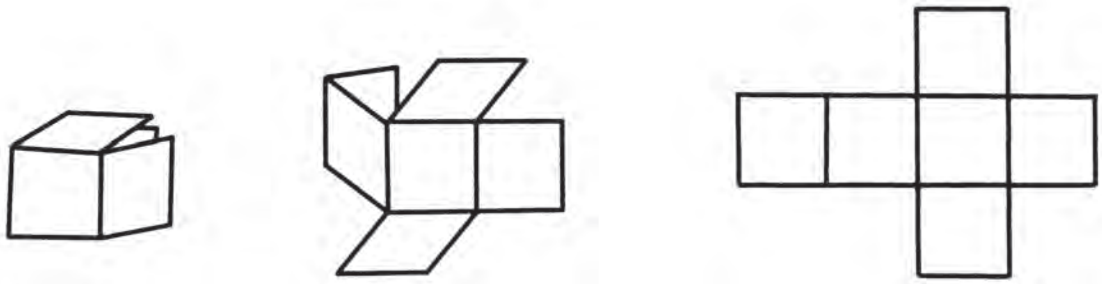
147-1

Desarrollo y trazo del cubo
Armado y representación plana del cubo

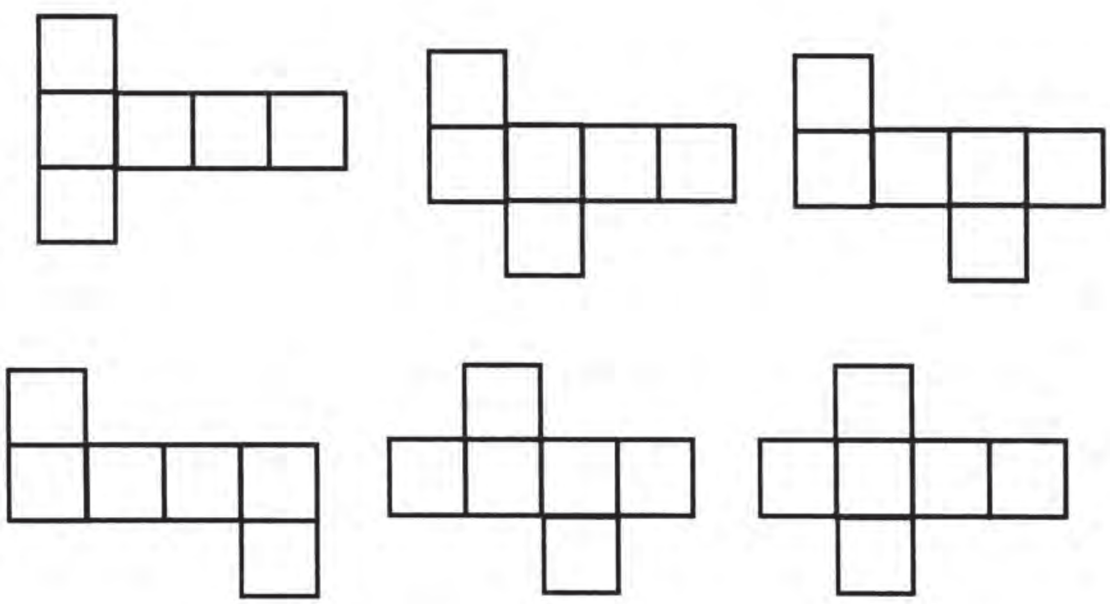
¿Has observado que los granos de sal de mesa son cubos? Compruébalo si no lo has hecho. Por otra parte, habrás notado que algunas construcciones, objetos o juguetes para armar también son cúbicos.

Con tus compañeros(as) de grupo lee, analiza y realiza construcciones relacionadas con el cubo o hexaedro, poliedro regular que Platón relacionó con la Tierra. Es el cuerpo que se toma como base para la construcción de otros poliedros, así como en el estudio y comprensión de las medidas de volumen.

Como sabes un modelo del cubo es una caja de caras cuadradas. Si se hiciera algunos cortes por sus aristas para deshacerlo, obtendríamos un desarrollo del mismo.

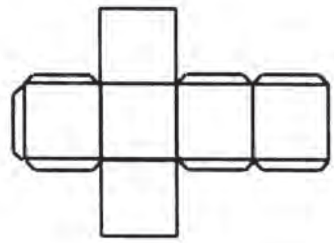


Las siguientes figuras muestran desarrollos de cubos posibles:



Elige algunos de ellos para realizar modelos de cubo. Analiza cómo puedes dejar pestañas para hacer pegues de las caras. Marca las aristas antes de hacer los dobleces para lograr mayor precisión.

Por ejemplo:

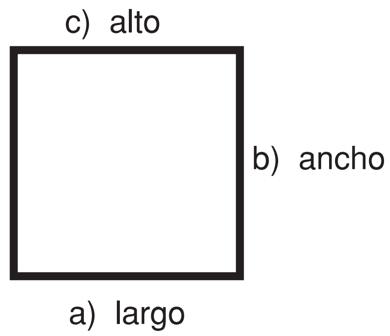


Representación plana del cubo.

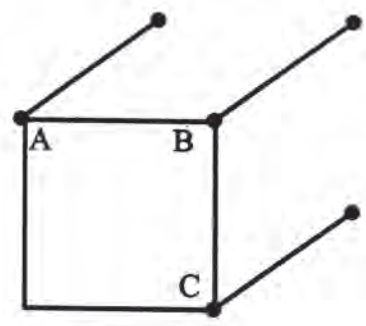
La presentación bidimensional de un cuerpo tridimensional requiere de trazos que permitan apreciar las tres dimensiones del cuerpo.

a) largo b) ancho c) alto

Así, un cuadrado no sería una buena representación del cubo, porque éste solo permite identificar dos dimensiones:

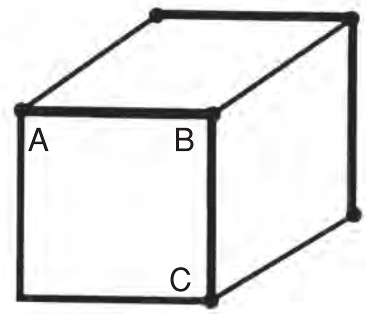


Deben efectuarse otros trazos que representen una dimensión más.

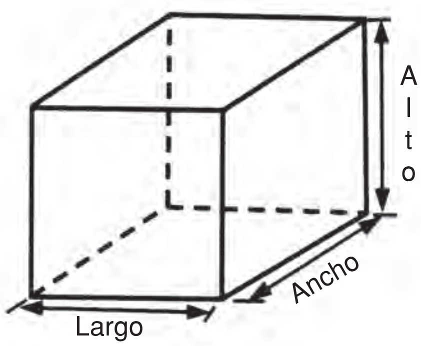


Se inicia con el trazo de un cuadrado y por los vértices A, B y C se trazan segmentos oblicuos paralelos de igual medida, menor o igual al lado del cuadrado.

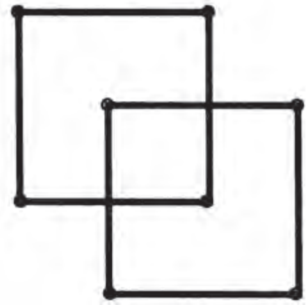
Se unen los extremos de cada segmento, con segmentos que resultan paralelos a los lados AB y BC, respectivamente.

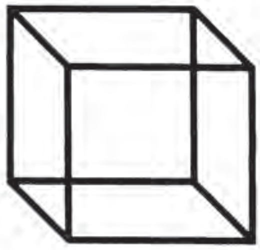


Al trazar con líneas punteadas las aristas ocultas, su imagen se aprecia mejor.



Si conoces las características del cubo, mediante el uso adecuado de los instrumentos geométricos, puedes obtener otras representaciones. Por ejemplo:





El video te ilustra la forma de construir un modelo de cubo y cómo representarlo en un dibujo.

Realiza un rompecabezas espacial con modelos de cubo.

1. Construye un cubo que tenga 4 cm de lado a partir de uno de los desarrollos que ya conoces.

2. Construye otro cubo de 2 cm de lado.

3. Compara los dos cubos que has ensamblado. Compara la longitud de las aristas. ¿Cómo son? ¿Cuántos cubos de 2 cm de lado cubrirían una cara del cubo de 4 cm de lado? ¿Con cuántos cubos de 2 cm de lado podrías ensamblar un cubo de 4 cm de lado?

4. Realiza los cubos necesarios para completar esta comparación.

Comparte con tus compañeros(as) tus experiencias.

51 LAS TRES DIMENSIONES DEL PLANO

148-1

Trazo del paralelepípedo recto
Armado y representación plana del paralelepípedo recto

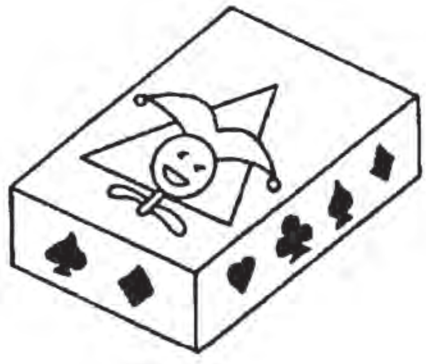
Seguramente en tus actividades diarias te encuentras rodeado de gran cantidad de formas geométricas, cuyos modelos generalmente semejan un paralelepípedo; por ejemplo: cajas, libros, libretas de remisiones, muebles y otros objetos. De hecho, la hoja que estás leyendo en este momento es un paralelepípedo de muy escaso grosor.

El paralelepípedo es un cuerpo con forma tridimensional; es decir, tiene volumen porque ocupa un espacio real. ¿Podrías trazar y armar un paralelepípedo?, ¿lo has intentado?, ¿quieres saber cómo se realiza?

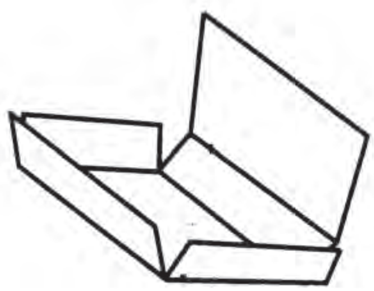
Observa el video que ilustra el procedimiento para desarrollar el trazo de un modelo de paralelepípedo y la manera de construirlo.

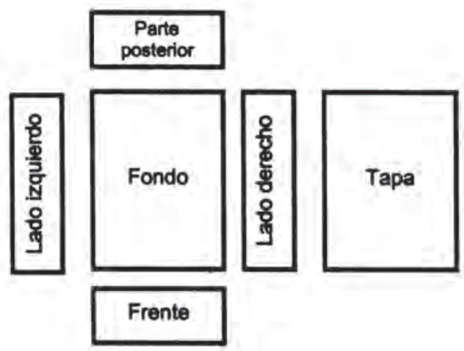
Con tus compañeros(as) de grupo, lee, analiza y sigue los procedimientos.

Supóngase que se desea diseñar una caja para guardar ciertos artículos, puede ser similar a la que se muestra. ¿Cómo harías el diseño?



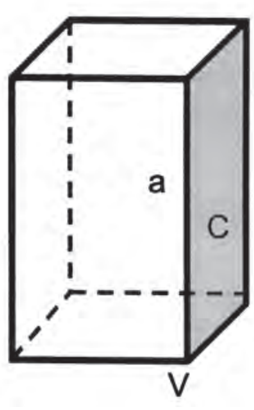
Consigue una caja similar que puedas desbaratar como se ilustra a continuación.





Observando la caja por el frente, la parte posterior, los lados, por arriba, por abajo, se concluye que se requieren dos rectángulos congruentes para la cara posterior y el frente; dos más para los lados, y otros dos para la base y la tapa.

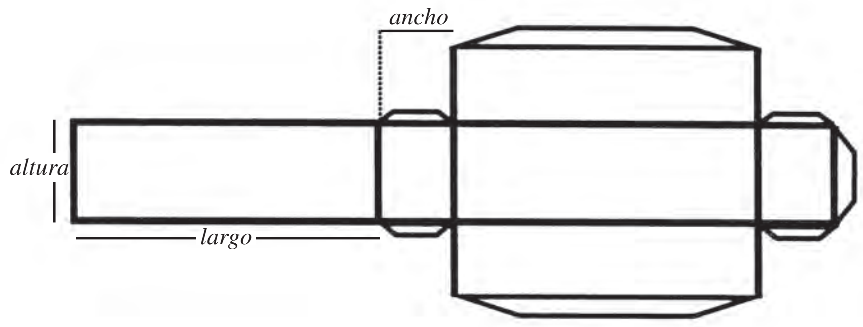
Observa que un paralelepípedo tiene seis caras. Dos de ellas son las bases y cuatro son las caras laterales.



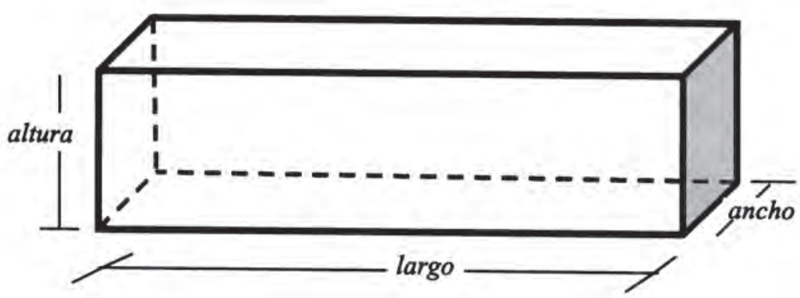
También es importante considerar que todo paralelepípedo tiene doce aristas (intersección de dos caras) y ocho vértices (intersección de dos aristas). En la figura siguiente, se señala con la letra **a** una de la arista, con **V** uno de los vértices y con **C** una de las caras.

Ahora bien, debido a que muchos objetos tienen forma de paralelepípedos (por ejemplo la caja que se mostró anteriormente), es muy común que se requiera trazar y armar paralelepípedos (cajas), pues sus usos son múltiples.

Diseña tu caja, elige las dimensiones y ármala. No olvides señalar las pestañas en ciertos bordes que sirven para pegar la figura. Por ejemplo:



Armada se ve así:



Elige un objeto en forma de paralelepípedo y construye su desarrollo plano para ensamblar un modelo de él. Usa las medidas reales del objeto.

Comparte tu trabajo con el de tus compañeros(as).

52 CUERPO A CUERPO

149-2

Desarrollo de sólidos compuestos
Armado y representación plana de sólidos compuestos

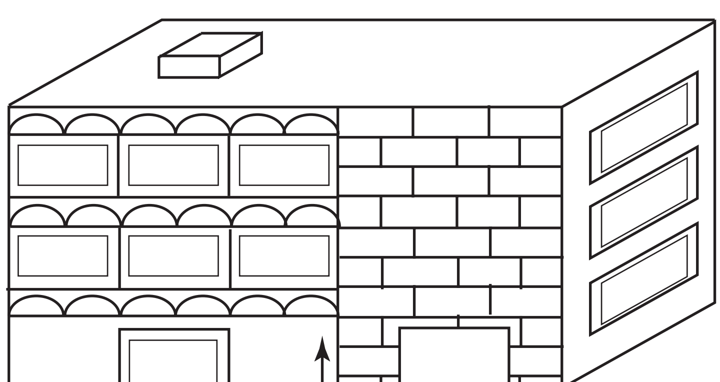
Los cuerpos geométricos, como el cubo y los paralelepípedos, son de forma tridimensional. Esto quiere decir que tienen volumen, que ocupan un espacio real. El volumen de cualquier objeto se puede percibir de diferentes formas; una de ellas es a través del dibujo, al representar las tres dimensiones en un plano. ¿Has intentado alguna vez reproducir la figura de una casa o de un edificio? ¿Te gustaría aprender a realizarlo?

Observa el video; en él reconocerás el procedimiento para desarrollar el trazo y armado de diferentes paralelepípedos y cubos, así como la forma de combinarlos para poder construir una maqueta. Comenta con tus compañeros(as) los aspectos que te hayan parecido más interesantes como los aportes que enriquecen tus conocimientos.

Lee y analiza con tus compañeros(as) de grupo el siguiente desarrollo.

1. El dibujo muestra un edificio del cual se desea construir una maqueta. En él identificamos tres de sus caras: la frontal, la lateral derecha y la superior.

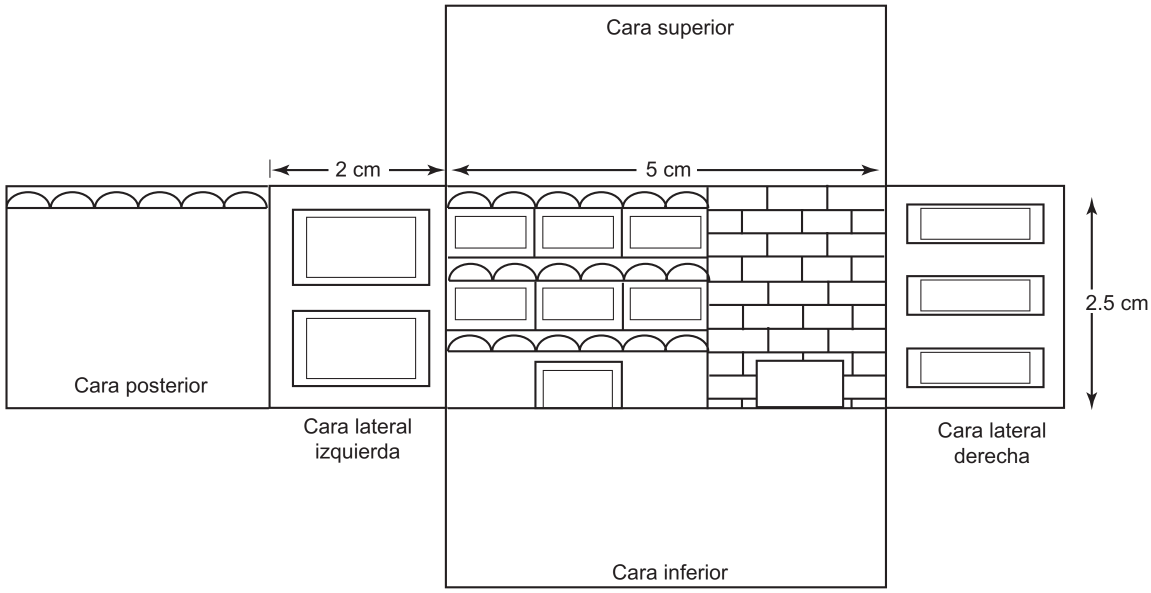
Cara superior



Cara lateral derecha (C.L.D.)

Cara frontal (C.F.)

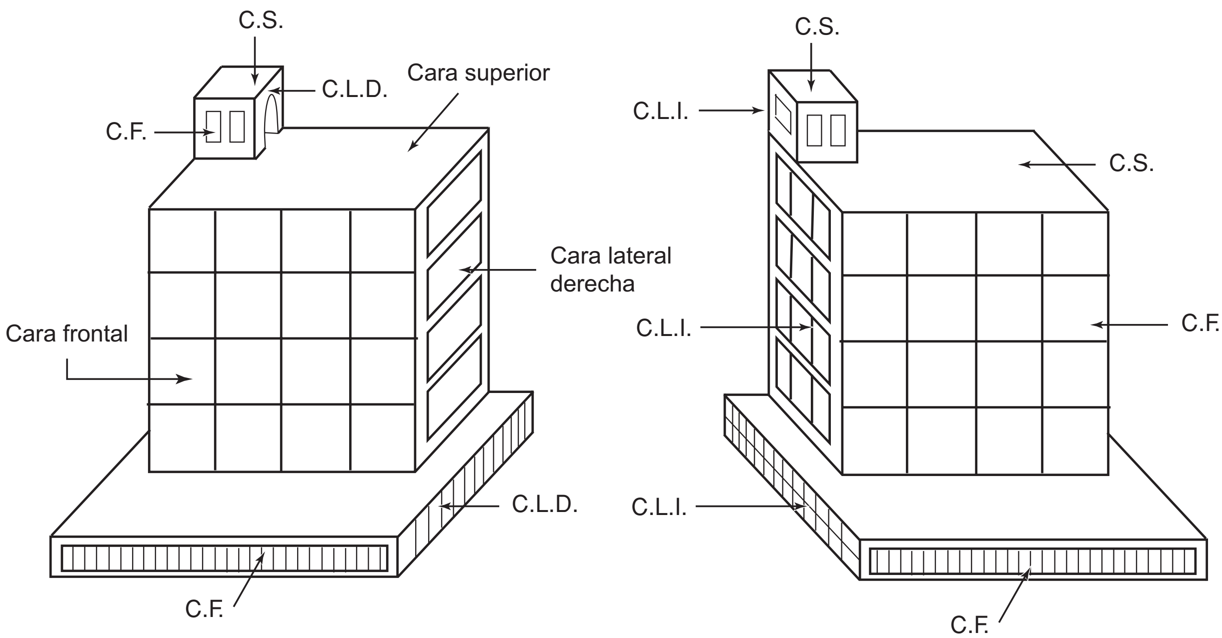
2. Para reproducir un modelo del edificio se realiza el trazo plano que ilustre todas sus caras. Es importante determinar las medidas según la escala que se desee emplear.

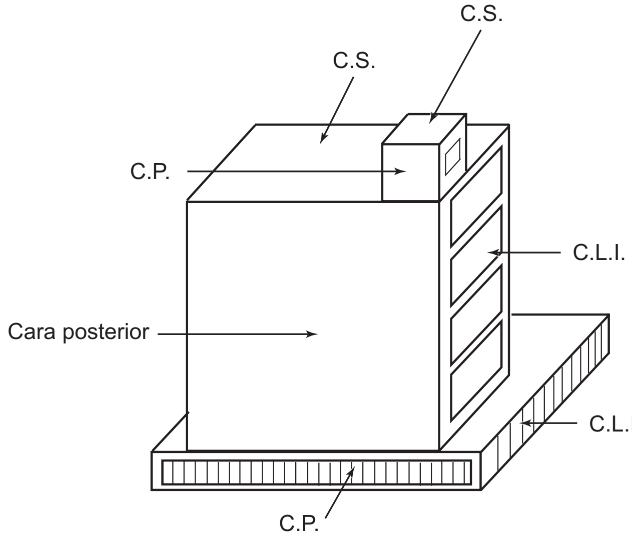


Estos ejercicios prácticos para determinar las caras de un cuerpo permiten el desarrollo de la imaginación espacial, lo cual es muy útil en la resolución de problemas geométricos y en la construcción de diversos objetos.

3. Comprueba tus destrezas realizando un dibujo del edificio que muestra la cara posterior y la cara lateral izquierda, es decir como si lo miraras desde atrás.

Con tu equipo de trabajo observa y analiza los siguientes dibujos que muestran vistas de un edificio desde diferentes ángulos. Identifica sus caras y lo que distingue cada una de ellas.





Para realizar los desarrollos planos de los cuerpos que componen el edificio considera:

a) La base tiene forma de prisma rectangular. Puedes usar las medidas: 5 cm de ancho de frente, 4 cm de fondo y 0.5 cm de alto.

b) El cuerpo del edificio es un prisma cuadrangular de 3.5 cm de alto y 3 cm de arista de la base.

c) Sobre el edificio hay una forma cúbica de 1 cm de arista.

Efectúa los desarrollos planos de cada cuerpo. Identifica cada una de las caras.

Usa los desarrollos planos realizados en el ejercicio anterior. Ármalos y ensambla la maqueta correspondiente.

Compara tu maqueta con la realizada por tus compañeros(as).

53 CON EL CONTORNO Y LA ALTURA

150-1

Área lateral del cubo y del paralelepípedo recto
Obtención del área lateral de cubos y paralelepípedos rectos

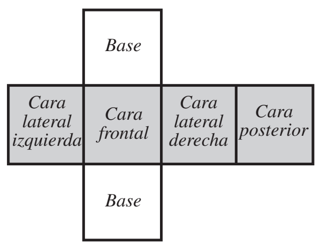
Los conocimientos geométricos y de medición que ya posees te permiten calcular muy fácilmente el área lateral de un cubo y de un prisma recto o paralelepípedo recto, puesto que las caras laterales de estos sólidos son cuadrados o rectángulos.

Un procedimiento puede ser: hallar el área de cada cara lateral y luego sumar. En esta sesión sólo se pretende que encuentres procedimientos más rápidos y sencillos, gracias a las regularidades de estos sólidos.

Con tus compañeros(as) de grupo analiza y realiza los procedimientos.

1. Área lateral del cubo.

Para comprender mejor el significado de área lateral analiza un desarrollo plano del cubo. El área sombreada corresponde a las caras laterales.

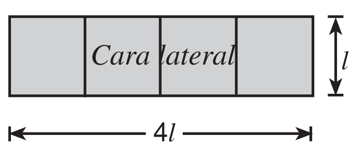


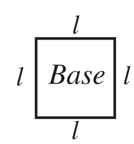
Si el lado del cubo mide l unidades.

El área lateral es $l \times l + l \times l + l \times l + l \times l$

$$4\ l \times l = 4\, l^2$$

Otra forma de calcular el área lateral es considerarla como un rectángulo cuya base mide 4 l unidades y altura l.



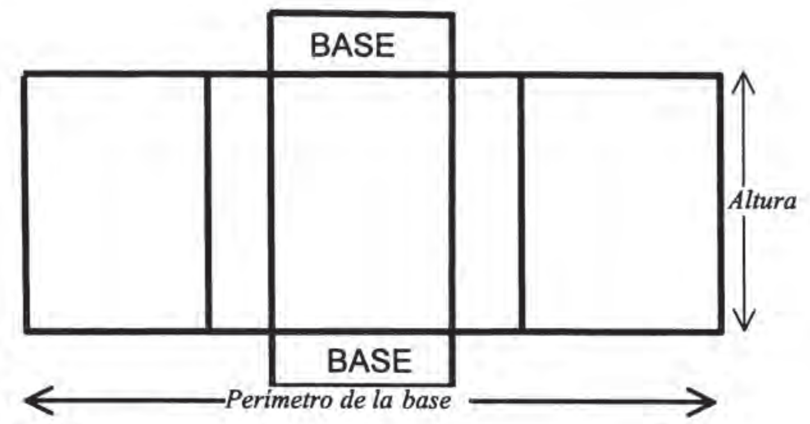


Área $4l \times l$

En general el área lateral del cubo

$$\text{A lateral} = \text{perímetro de la base} \times \text{altura}$$

2. Esta expresión es válida para cualquier prisma recto:



Área lateral = perímetro de la base $\times$ altura.

$$A = P \times h.$$

Observa el video, el cual te aclarará algunas cuestiones acerca del área lateral de los paralelepípedos rectos. Comenta con tus compañeros(as) aquellos aspectos que hayas encontrado más interesantes.

Trabaja con tus compañeros(as) de equipo.

Un prisma recto tiene como dimensiones 8 cm, 6 cm y 4 cm.

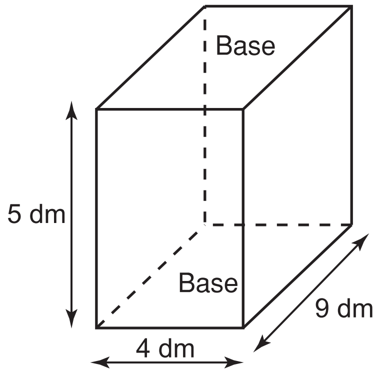
¿Qué cara escogerías como base para que el área lateral sea la mayor posible?

¿Cuál es el área lateral en este caso?

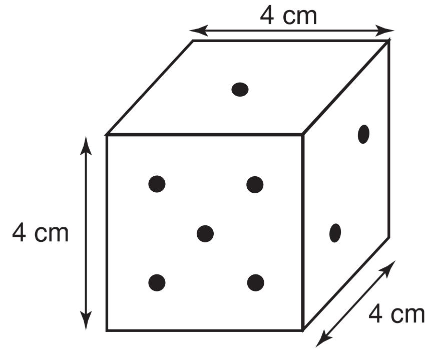
Haz un modelo del prisma para ilustrar tu respuesta.

Compara tus respuestas con las de otros compañeros(as).

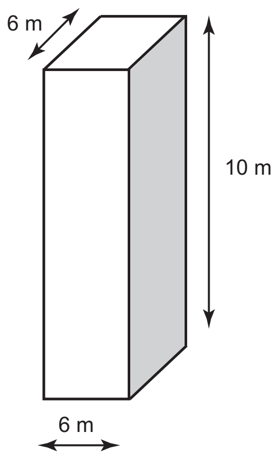
En forma individual, encuentra el área lateral de los siguientes prismas.



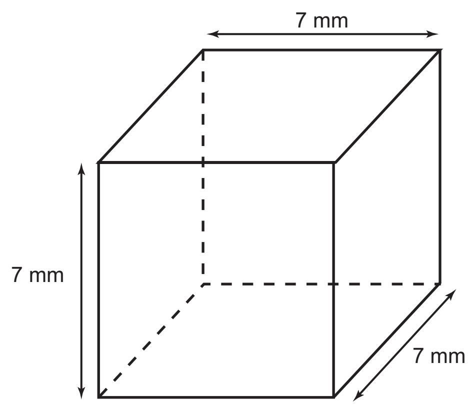
1. Paralelepípedo recto
de base rectangular



2. Dado



3. Paralelepípedo recto
de base cuadrada



4. Cubo

Compara tus resultados con la clave, si no coinciden, rectifica tu procedimiento.

CLAVE

1. P = 26 dm h = 5dm A = 130 dm^2 2. P = 16 cm h = 4 cm A = 64 cm^2

3. P = 24 m h = 10 m A = 240 m^2 4. P = 28 mm h = 7 mm A = 196 mm^2

54 RAZONAR, ANALIZAR Y REFLEXIONAR SON ACCIONES PRESENTES EN EL DOMINIO DE LAS MATEMÁTICAS

151-1 Repaso parcial
Integración de los conocimientos adquiridos

Dominar las matemáticas no quiere decir saber hacer las operaciones básicas ni mucho menos aprenderse de memoria todos los conceptos, sino saber razonar, analizar y reflexionar para elaborar estrategias de solución a los problemas que se nos presenten.

La geometría se vuelve palpable y objetiva a través del estudio de los sólidos; por ello su conocimiento es importante. Esta sesión corresponde a un repaso parcial de los temas del núcleo. Con esto se pretende que aclares y reafirmes o retomes aquellos temas que aún no entiendes.

Observa con atención el video para que recuerdes lo estudiado en las primeras sesiones del núcleo. Al finalizar, comenta con tus compañeros(as) y tu profesor(a) si tienes alguna duda.

Con tu grupo de trabajo resuelve:

1. Los sólidos estudiados en este núcleo fueron clasificados en dos categorías: cuerpos de revolución y poliedros. ¿Qué características tiene cada uno de ellos?

2 ¿Cuáles cuerpos de revolución conoces? Dibuja algunos objetos que tengan estas formas.

3 ¿Qué caracteriza a los poliedros regulares?

¿Cuál es el más sencillo de estos sólidos?

Investiga sobre sólidos de la naturaleza que presenten formas de poliedros regulares.

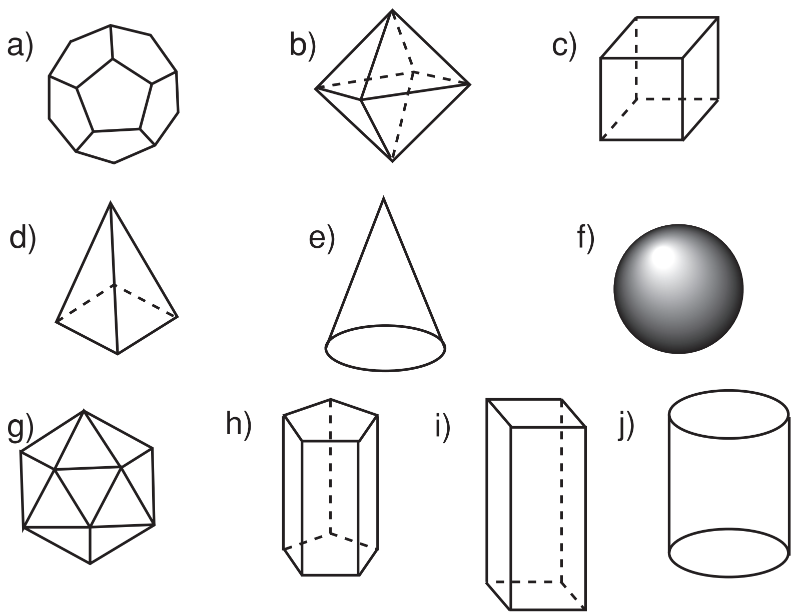
4. ¿Cuáles poliedros irregulares conoces?

¿Qué diferencia un prisma de una pirámide?

Averigua acerca de famosas pirámides construidas por el ser humano.

Hay entre los poliedros regulares alguno al que puedas llamar pirámide? Explica.

5. Haz los dibujos a continuación en tu cuaderno. Busca en la lista la mejor definición para cada uno de ellos y escríbela al lado del dibujo correspondiente. Si encuentras necesario especifica y complétala. Ponle nombres a los sólidos.



Tiene cuatro caras iguales en forma de triángulo equilátero.

Tiene seis caras iguales en forma de cuadrado.

Tiene ocho caras iguales que son triángulos equiláteros.

Tiene doce caras iguales en forma de pentágonos regulares.

Tiene veinte caras iguales que son triángulos equiláteros.

Tiene dos bases iguales y sus caras laterales rectangulares.

Tiene una sola base y según su forma es el nombre que recibe.

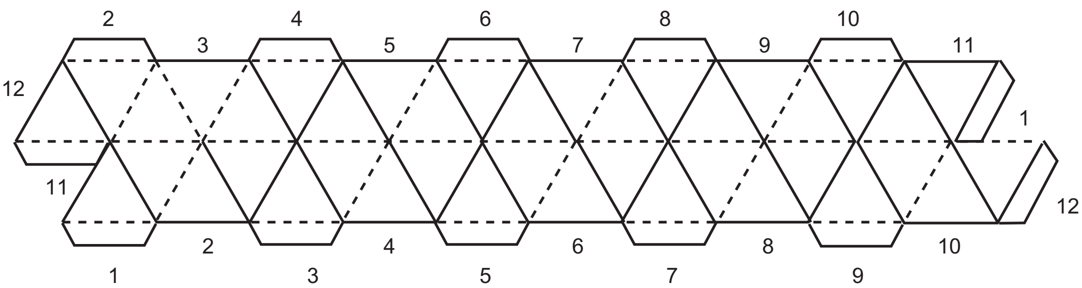
Tiene dos bases circulares.

Tiene una sola base circular.

Cuerpo redondo que se forma por la revolución completa de un círculo que gira en torno a su diámetro.

Haz una construcción de tetraedros interesante, aunque no sencilla.

Dibuja en cartulina 40 triángulos equiláteros de 4 o 5 cm de lado, dispuestos como en la figura. Recorta y dobla por las líneas del trazo continuo hacia adelante y por las líneas de trazo de rayas hacia atrás. Las pestañas son para pegar los lados señalados con el mismo número. Marca los trazos con una punta fuerte para que la cartulina doble fácilmente.



¿Cómo describirías el objeto que has construido? Compáralo con el trabajo de tus compañeros(as).

55 UNA EN OTRO

152-1 Volumen y capacidad
Establecimiento de la noción de volumen y capacidad

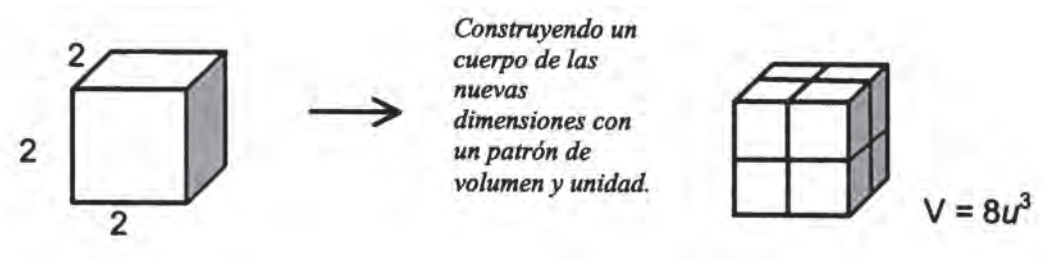
Seguramente has escuchado la frase: «la presa está a su máxima capacidad»; es decir, la cantidad de agua es justo el límite que la presa puede contener de acuerdo con sus dimensiones. Seguro ya te habrás dado cuenta que hablamos de los conceptos de volumen y capacidad.

Con tus compañeros(as) de grupo lee y afianza conocimientos que seguramente ya has construido en grados anteriores.

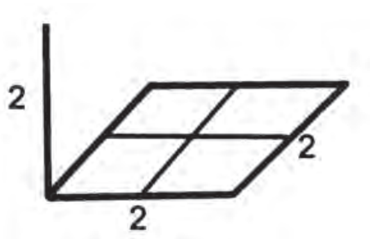
VOLUMEN Y CAPACIDAD

Todos los cuerpos ocupan un lugar en el espacio y la magnitud asociada a este hecho se llama volumen, la cual es susceptible de ser medida.

Ya has aprendido a calcular el volumen que ocupan cuerpos regulares, por ejemplo el volumen de un cubo:

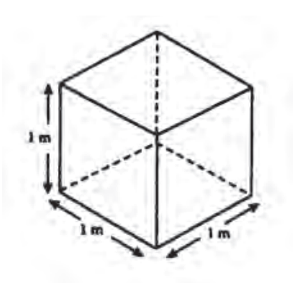


También lo sabes calcular atendiendo a la magnitud de de sus aristas.



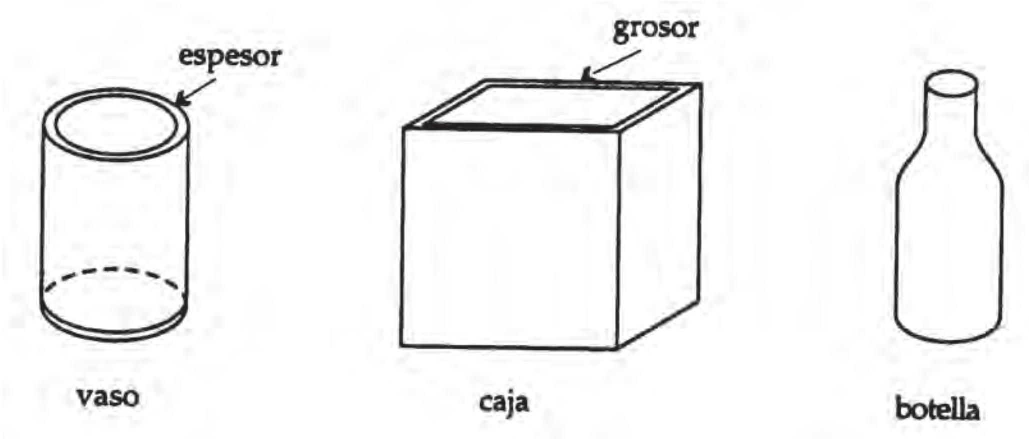
V = Área de la base × altura
$V = 2 \times 2 \times 2 = 8u^3$

La unidad fundamental para la medida de volumen es el metro cúbico: m^3. Un buen modelo de metro cúbico es un cubo que tiene un metro de ancho, uno de largo y uno de altura.



Luce como la figura aunque su dimensión real es imposible dibujar en esta hoja.

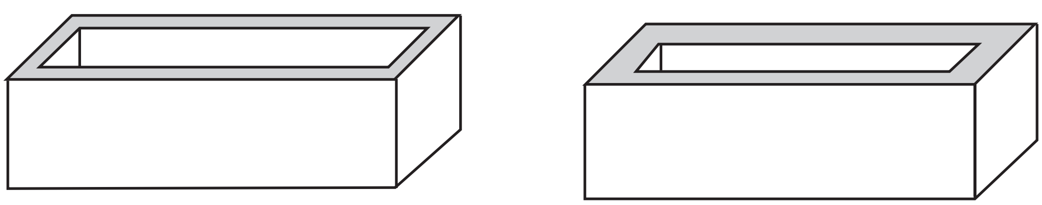
Ahora bien, existen cuerpos que tienen un vacío o hueco —por ejemplo, una caja, una botella, un vaso, una tina, etc.— pero ese espacio no es el mismo que ocupa el objeto o el cuerpo, porque tiene en sí un espesor o grosor; obsérvense los siguientes dibujos:



De esta forma, un cuerpo vacío o hueco tiene un espacio interior que también se puede medir. A este espacio interior se le llama **capacidad**.

Por lo tanto, la capacidad es una magnitud que equivale al volumen interior de los cuerpos huecos. La unidad fundamental de capacidad es el litro (*l*).

Continuando la reflexión sobre volumen y capacidad de un cuerpo, es posible establecer una estrecha relación entre ellas, por lo que muchas veces se confunden entre sí estos conceptos. Véanse ahora las siguientes cajas que son iguales en cuanto a tamaño:



Obsérvese que las dos cajas tienen el mismo volumen, pero sus capacidades son diferentes, porque tienen diferente grosor.

Observa otro ejemplo:

Supóngase que el vaso anterior tiene 3 mm de espesor; si se determinara su volumen y su capacidad, ¿serían iguales? Por supuesto que no, porque la capacidad siempre será menor respecto al volumen del cuerpo. Se entiende como volumen del cuerpo al espacio que ocupa.

Ahora bien, muchas veces la capacidad de dos recipientes es la misma; por ejemplo: un garrafón de un litro y una botella de un litro. Por lo tanto, y de acuerdo con todo lo anterior, se puede concluir que:

1. El **volumen** es el espacio que ocupa el cuerpo.

2. La **capacidad** es el volumen del espacio o hueco que tiene el cuerpo o recipiente.

3. La **capacidad** de un recipiente siempre será **menor que su volumen**.

4. La capacidad de un cuerpo geométrico hace mención a la cantidad de líquido que contiene un recipiente y esta cantidad está determinada por las **características geométricas del cuerpo**.

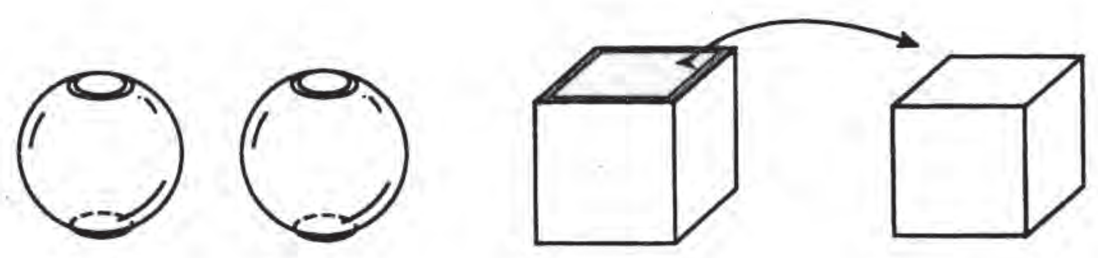
5. La unidad fundamental de capacidad es el litro (*l*).

6. La unidad fundamental de volumen es el m^3.

Observa el video, el cual te aclara la relación entre los conceptos de volumen y capacidad. Comenta con tus compañeros(as) los aspectos relevantes.

Con tus compañeros(as) de grupo.

De acuerdo con los siguientes cuerpos, contesta las preguntas que a continuación aparecen:



Esfera 1
Grosor 1.5 mm

Esfera 2
Grosor 3 mm

Cubo 1
Capacidad = 2 000 ℓ

Cubo 2
Volumen = 2 m^3

a) Con respecto a las esferas, ¿cuál tiene mayor capacidad? ¿Por qué?

b) Si las esferas son del mismo tamaño, ¿cómo son sus volúmenes? ¿Por qué?

c) Con respecto a los cubos, ¿cuál tiene mayor volumen? ¿Por qué?

d) ¿El volumen del cubo 2 será igual a la capacidad del cubo 1? ¿Por qué?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros(as). Si tienes dudas, pregunta al profesor(a).

En forma individual, contesta las siguientes preguntas, en tu cuaderno.

1. ¿Todos los cuerpos u objetos que existen tienen capacidad? ¿Por qué?

2. ¿Cuál es la unidad fundamental de capacidad?

3. ¿Cómo se llama al volumen del hueco interno de un cuerpo?

4. Tienes dos recipientes iguales en cuanto a tamaño: uno de ellos tiene una capacidad de 1 000 litros y el otro de 800. ¿Qué es lo que ocasiona que no tenga la misma capacidad? ¿Por qué?

5. Define el concepto de capacidad.

Compara tus resultados con los de la clave. Si tienes errores, corrígelos.

CLAVE

1. No, porque no todos tienen un hueco interior. 2. El litro (2). 3. Capacidad. 4. El espacio o grosor porque, a mayor grosor, menor capacidad y viceversa. 5. Es una magnitud que equivale al volumen interior de un cuerpo.

56 PARTICULARIDADES TRIDIMENSIONALES

153-1

Propiedades del volumen
Conocimiento de las propiedades del volumen

Si consideras que en tu entorno hay una infinidad de cuerpos, te darás cuenta de lo importante que es incrementar tus conocimientos relacionados con el volumen.

Con tu grupo de trabajo sigue la lectura y el análisis del texto:

PROPIEDADES DEL VOLUMEN

Siempre que haces referencia a un sólido y se requiere medirlo, es necesario considerar la cantidad de espacio que ocupa. Conviene recordar que para medir las dimensiones de un cuerpo usamos unidades correspondientes.

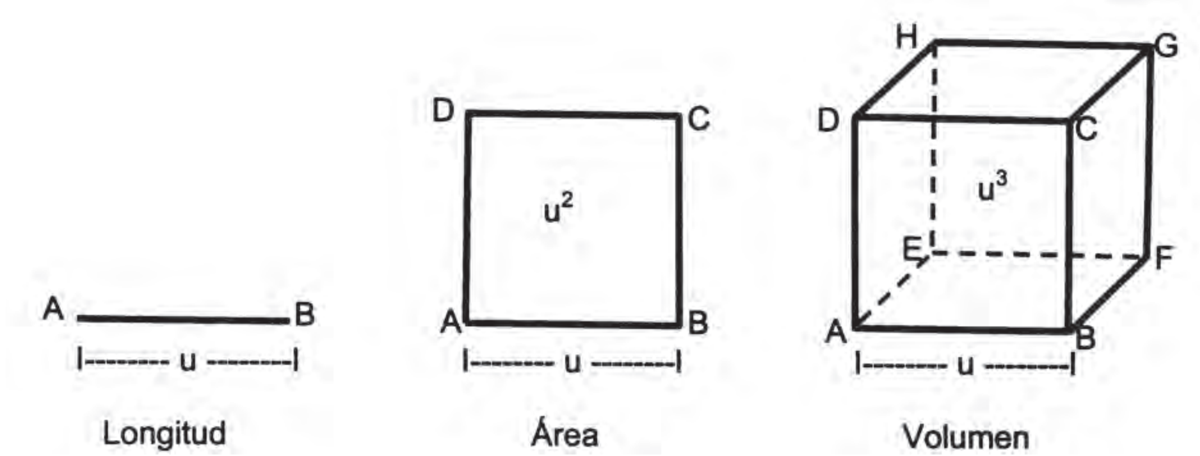
- Para medir longitudes usamos unidades de longitud y su patrón será la longitud de un segmento de una unidad.

- Para medir superficies usamos unidades de área, un patrón puede ser un cuadrado de una unidad de lado, cuya área es una unidad cuadrada.

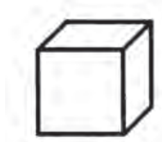
- Para medir volúmenes usamos unidades cúbicas. Un patrón puede ser el volumen de un cubo de una unidad de arista.

Es importante tener en cuenta que un sólido o cuerpo geométrico es tridimensional por tener altura, largo y ancho. Por lo tanto, el volumen se mide por medio de unidades cúbicas.

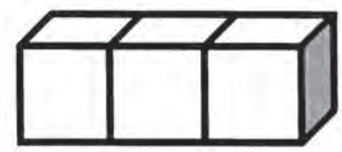
Ejemplos:



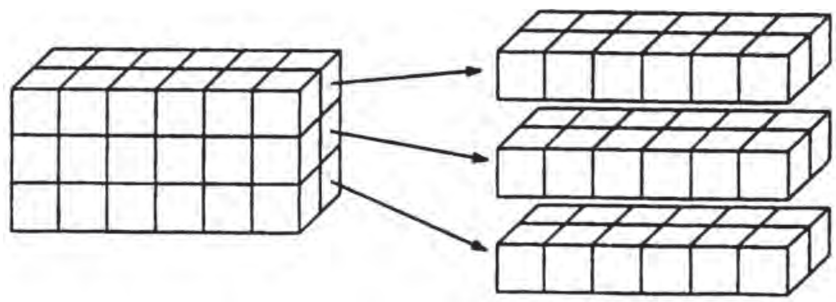
Si como patrón de medida se usa un cubo cuya arista mide u, como este que a continuación se presenta, su volumen es de una unidad cúbica u^3.



a) El volumen del cuerpo que aparece a la derecha es de tres unidades cúbicas ($3u^3$).



b) El siguiente cuerpo tiene 3 pisos. Cada piso tiene 2 hileras con 6 cubos cada una; entonces, en cada piso hay *2 × 6 = 12 cubos*. Como son 3 pisos de 12 cubos cada uno, el cuerpo contiene *3 × 12 = 36 cubos.* Por lo cual el volumen de este cuerpo es de 36 unidades cúbicas (**36 u^3**).



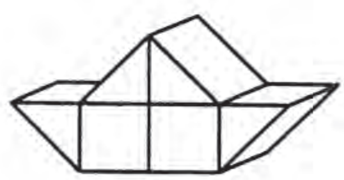
En el primer ejemplo (a), el volumen se obtuvo por conteo, es decir, en forma directa; mientras, en el segundo (b), se procedió de manera indirecta pues se tomó en cuenta que tiene 3 dimensiones, es decir, su anchura (2 hileras), su longitud (con 6 cubos) y su altura (de 3 pisos), de modo que $2 \times 6 \times 3 = 36\ u^3$.

Para mayor comprensión de lo que es el volumen, resulta conveniente conocer algunas de sus propiedades

Propiedades básicas del volumen

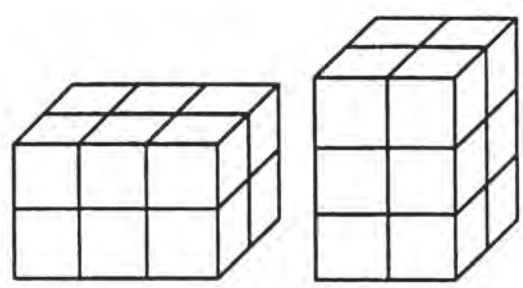
1. El volumen de un cuerpo se representa con un número y la unidad de medida.

$V = 4\ u^3$



2. Dos cuerpos, con las mismas dimensiones, tienen el mismo volumen.

$V = 12\ u^3$



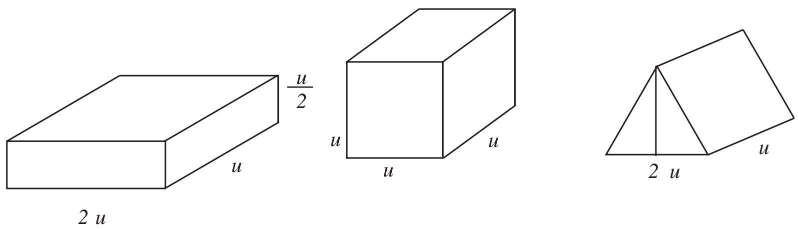
3. El volumen de la unión de dos cuerpos distintos es la suma de los volúmenes de esos cuerpos. $V = V_1 + V_2$

La aplicación de estas propiedades facilita la obtención del volumen de diferentes cuerpos.

Observa el video que te aclarará algunas propiedades del volumen, las cuales te permitirán calcular volúmenes con mayor facilidad. Discute los aspectos que encuentres más relevantes con tus compañeros(as).

Intégrate a un equipo de tres compañeros(as) para trabajar.

1. Observa las siguientes fichas:

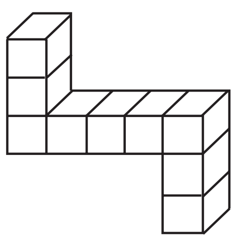


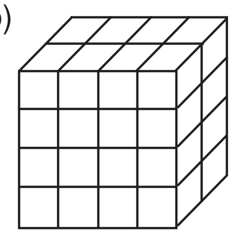
a) ¿Cuál es el volumen de cada una de ellas?

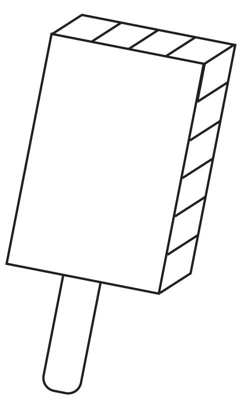
b) ¿Podría ser cada una un patrón de la unidad de volumen? ¿Por qué?

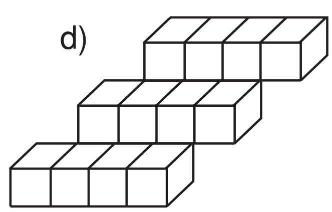
c) Si u = 1 cm, ¿cuánto mide el volumen de cada ficha?

2. Calcula el volumen de cada uno de los siguientes cuerpos.

a)


b)


c)


d)


Muestra tus resultados a los integrantes de otro grupo y corrige en caso de error.

Trabaja en forma individual y contesta las siguientes preguntas, que están basadas en el ejercicio anterior.

a) ¿Cómo son los volúmenes de los cuerpos **a** y **d**? ¿Por qué?

b) ¿Cuál de los cuatro cuerpos es el de mayor volumen?

c) Si con los cubos que forman cuerpos **a** y **b**, ensamblas uno solo, ¿cuántas unidades cúbicas mide su volumen?

d) ¿Cuál es la medida del volumen que resulta de la unión de los cuerpos **b**, **c** y **d**?

Compara tus respuestas con las de la clave que se te da. Si cometiste errores, corrígelos.

CLAVE

a) Igual, porque ambos miden 9 u^3; b) b; c) 41 u^3; d) 56 u^3.

57 DE MIL EN MIL

154-1

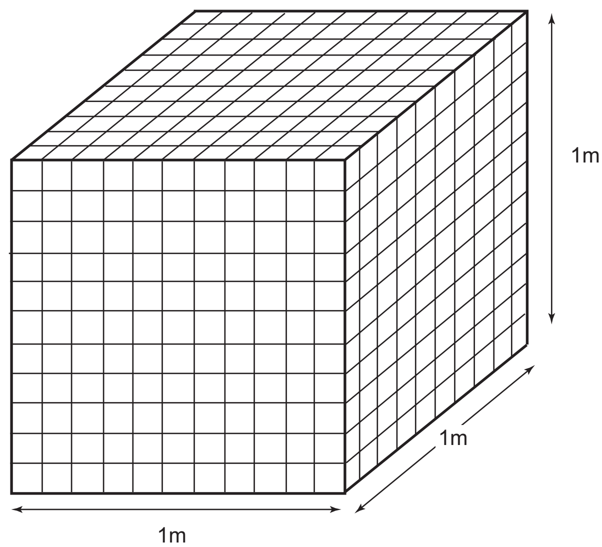
Medidas de volumen
Conocimiento de las unidades de volumen

Obtener el volumen de un sólido, contando los cúbicos que caben en él, es muy dispendioso. Por otra parte, si la unidad de medida es determinada arbitrariamente, existirá confusión al interpretar el resultado de la medición.

Con tu equipo de trabajo lee y sigue las reflexiones acerca de las unidades apropiadas para medir volúmenes. Estos conocimientos ya los tienes de tus años de estudio anteriores, ahora profundizarás en ellos.

MEDIDAS DE VOLUMEN

La unidad fundamental de medida para los volúmenes es el metro cúbico; se representa simbólicamente como **m³** y un patrón de él puede ser un cubo de un metro en cada arista. Obsérvese la siguiente figura, como representación de un patrón de un metro cúbico.



En este cubo el primer piso tiene 10 hileras de 10 cubos de 1 dm de lado, es decir, 100 cubos o 100 dm^3 por piso. Si en total contiene 10 pisos de 100 cubos, su volumen corresponde a 1 000 unidades cúbicas o decímetros cúbicos.

Por lo tanto se puede afirmar que:

$$\mathbf{1\ m^3 = 1\ 000\ dm^3}$$

Si se recuerda que los valores de las medidas de longitud aumentan y disminuyen en agrupamiento de 10 en 10, que los valores de las medidas de área aumentan o disminuyen en agrupamientos de 100 en 100, y que $10^3 = 10 \times 10 \times 10 = 1\ 000$, entonces resulta muy natural llegar a la conclusión de que el valor de las medidas de volumen aumenta o disminuye en agrupamientos de 1 000 en 1 000, o sea:

Cada unidad de volumen es 1 000 veces mayor que la inmediata inferior y 1 000 veces menor que la inmediata superior.

Para medir el volumen de cuerpos grandes se emplean los múltiplos del metro cúbico, que son los siguientes:

decámetro cúbico: $dam^3 = 1\,000\ m^3$

hectómetro cúbico: $hm^3 = 1\,000\ dam^3 = 1\,000\,000\ m^3$

kilómetro cúbico: $km^3 = 1\,000\ hm^3 = 1\,000\,000\ dam^3 = 1\,000\,000\,000\ m^3$

Cuando se trata de medir el volumen de cuerpos más pequeños que el metro cúbico, se emplean sus submúltiplos: el decímetro cúbico (dm^3), el centímetro cúbico (cm^3) y el milímetro cúbico (mm^3). Véase lo siguiente:

$m^3 = 1\,000\ dm^3 = 1\,000\,000\ cm^3 = 1\,000\,000\,000\ mm^3$

$dm^3 = 1\,000\ cm^3 = 1\,000\,000\ mm^3$

$cm^3 = 1\,000\ mm^3$

Al conocer la unidad de medida para los volúmenes (el metro cúbico), así como sus múltiplos y submúltiplos, se pueden calcular los volúmenes en forma indirecta a partir de las medidas de sus dimensiones (largo, ancho y alto).

Observa el video, el cual te aclarará el concepto de unidad fundamental para la medida del volumen, así como sus múltiplos y submúltiplos. Comenta con tus compañeros y compañeras los aspectos que encuentres más interesantes.

Con tu equipo de trabajo:

1. Elabora una maqueta sencilla que te permita explicar por qué las unidades de volumen aumentan o disminuyen de 1 000 en 1 000.

Puedes usar cubos como dados o fichas cúbicas, o elaborar algunos modelos en cartulina.

Continúa con tu equipo para que resuelvas en el cuaderno las siguientes preguntas.

Si $1\ m^3 = 1\,000\ dm^3$, ¿cuántos dm^3 se requieren para tener:

a) $\frac{1}{2}$ m^3 b) $\frac{1}{5}$ m^3 c) $\frac{3}{10}$ m^3 d) 2.5 m^3

Muestra tus respuestas a los compañeros(as) de otro equipo. Si hay errores en tu trabajo corrígelos.

De manera individual resuelve en tu cuaderno:

En una bodega cuyas dimensiones son 20 m de largo, 10 m de ancho y 6 m de alto, se almacenan cajas que ocupan 10 m del largo, 5 m de ancho y 3 m de alto. Explica por qué está menos de la mitad de la bodega llena. ¿Qué parte de ella está ocupada?

Compara tus resultados con los de otros compañeros(as). Si tienes dudas consulta con tu maestro(a).

58 ¿CUÁNTO CABE?

155-1

Medidas de capacidad
Conocimiento de las unidades de capacidad

En diversas situaciones de la vida diaria se realizan cálculos que requieren el conocimiento de las medidas de capacidad; ¿las has empleado?

Con los compañeros(as) de equipo lee y analiza.

MEDIDAS DE CAPACIDAD

En la vida diaria es muy frecuente la necesidad de medir la cantidad de líquido que cabe en un recipiente, o cuánto de él hay, así no esté lleno. En este caso la unidad fundamental para medir la capacidad es el litro (l).

Pero, ¿cómo sabes qué cantidad de líquido es un litro?

Para ello vamos a relacionar el volumen interior de un recipiente con la cantidad de líquido que éste puede contener.

Se ha definido:

> **A la capacidad de un recipiente cúbico cuya arista interior mide 10 cm se le llama** litro.

De acuerdo con lo anterior, dicho recipiente tiene un espacio interior de:

$$10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 1\,000 \text{ cm}^3$$

De lo anterior se concluye que, en condiciones normales, las expresiones **1 000 cm³** de agua y **1** l de agua representan la misma cantidad de agua.

$$\text{Así } 1\,000 \text{ cm}^3 = 1 \text{ dm}^3 = 1\ l$$

Para recipientes de mayor capacidad que el litro, se emplean sus múltiplos.

decalitro: dal = 10 l

hectolitro: hl = 10 dal = 100 l

kilolitro: kl = 10 hl = 100 dal = 1 000 l

Si se trata de un recipiente con menor capacidad que el litro, se utilizan los submúltiplos, que son el decilitro (dl) y el mililitro (ml):

1 l = 10 dl = 100 cl = 1 000 ml

1 dl = 10 cl = 100 ml

1 cl = 10 ml

El conocimiento de las unidades de medición para los líquidos (el litro, sus múltiplos y submúltiplos) tienen una aplicación práctica en infinidad de cálculos.

Observa el video, el cual te aclarará conceptos relativos a la manera como se ha definido una unidad fundamental de las medidas de capacidad, así como sus múltiplos y submúltiplos. Comenta con tus compañeros(as) los aspectos que consideres más relevantes sobre este tema.

Con tus compañeros(as) de equipo:

1. Elabora en cartulina un modelo de recipiente cúbico, cuyas medidas sean de 10 cm de aristas. Pega sus aristas muy bien, de tal manera que te sirva de recipiente patrón que puede contener un l de agua.

2. Consigue recipientes de l, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ como envases de gaseosa u otros.

3. Utiliza tu recipiente modelo que te permitirá comparar las capacidades de los recipientes disponibles.

4. Busca un recipiente que tenga indicada la capacidad, como teteros (biberones) o recipientes de medidas de cocina. En ellos está el equivalente en litros o fracciones y en cm^3. Úsalos para medir la capacidad de otros recipientes.

Comparte tus hallazgos con otros compañeros(as).

Continúa con tu equipo de trabajo y resuelve las siguientes cuestiones en tu cuaderno.

a) De un bote que contenía 10.5 l de alcohol, se han vendido 9.6 l. ¿Cuántos centilitros de alcohol quedan en el bote?

b) Una botella que contiene loción se ha llenado hasta la tercera parte de su capacidad con 40 ml. ¿Con cuántos **cl** más quedará llena al máximo de su capacidad?

Revisa tus resultados con los integrantes de otro equipo. Si no coinciden, rectifica y corrige si es necesario.

Trabaja individualmente en tu cuaderno y resuelve las siguientes preguntas:

a) En un recipiente había 12.5 l de agua de colonia. Después de 2 días quedan 4 dm solamente. ¿Cuántos litros de agua de colonia se han extraído del recipiente?

b) José necesita 48 l de agua destilada. En la tienda solamente la surten en envases de 1 500 cl. ¿Cuántos envases debe adquirir para tener los 48 l?

Compara tus respuestas con las de la clave.

Si no coinciden, rectifica lo que sea necesario

CLAVE

a) 8.5 l b) 4 aunque uno de ellos sólo contenga 3 l.

59

METAMORFOSIS ENTRE MEDIDAS

156-1

Conversión entre las unidades de volumen y de capacidad
Realizar conversiones de volumen y capacidad

¿Eres curioso y observador a la vez? Entonces te habrás dado cuenta de que existen diferentes formas para medir el volumen que ocupa la materia. Por ejemplo, el recibo de agua trae la medida del consumo en m^3, el envase de un refresco o de una jeringa marca su capacidad en ml, la leche y el aceite se mide en litros. Pero ¿cómo transformar una medida en otra? ¡No te preocupes!, sólo enciende la televisión y...

Observa con mucha atención el video, porque ahí te explicarán el por qué y cómo lograr estas conversiones.

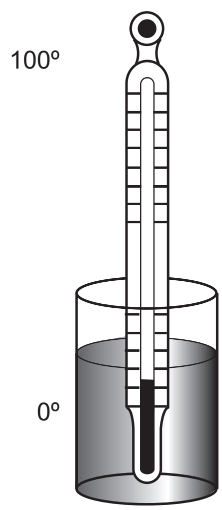
Al finalizar comenta con tus compañeros(as) lo que has aprendido.

Con tu grupo de trabajo lee y analiza.

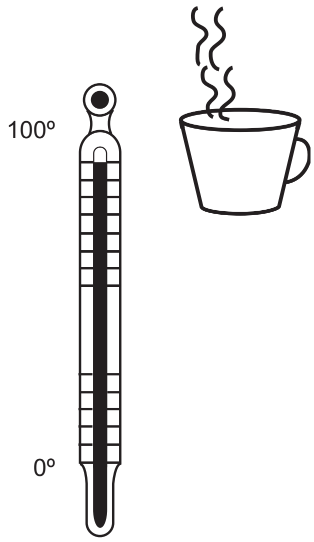
CONVERSIÓN ENTRE LAS UNIDADES DE VOLUMEN Y CAPACIDAD

¿Alguna vez se han preguntado como funcionan los termómetros de mercurio?

Su funcionamiento se basa en la dilatación que sufre el mercurio por el calor de los cuerpos con los que se pone en contacto.



Al ponerse en contacto con un cuerpo frío, el mercurio se contrae y ocupa menor espacio (disminuye su volumen).



Al ponerse en contacto con un cuerpo caliente, el mercurio se dilata y ocupa mayor espacio (aumenta su volumen).

Recuérdese que la unidad de volumen es el metro cúbico (m^3) y se refiere al espacio ocupado por un cuerpo. Generalmente cuando se habla de volúmenes se piensa en cuerpos sólidos, como un ladrillo, una mesa, un libro o una barra de plata. Pero cuando el espacio interior de un cuerpo es ocupado por un líquido, se prefiere hablar de la capacidad del cuerpo, más que de su volumen, como la capacidad de un tanque de gasolina, de una alberca, de una tina, de un envase de refresco, de un bote de pintura, de una jeringa, etc. La unidad de capacidad es el litro (l).

Ahora se verán las equivalencias entre las unidades de volumen y las unidades de capacidad; es importante recordar que un litro es la capacidad de líquido que cabe en un decímetro cúbico.

Analiza estos ejemplos.

1. ¿Cuántos litros de capacidad tendrá una piscina cuyo volumen es de 210 m^3.

Debes tener claro que 1 m^3 = 1 000 l

Así si x es la capacidad en litros: 210 m^3 = x l.

$$\frac{1000\ l}{x} = \frac{1\,m^3}{210\,m^3}$$

$$1m^3\ x = 1000\ l \times 210\,m^3$$

$$x = \frac{1000\ l \times 210\,m^3}{1\,m^3} = 210\,000\ l$$

La piscina tienen una capacidad de 210 000 l.

2. Un médico veterinario le dijo a Joel, su ayudante, que le aplicara a una vaca 5 cm^3 de un medicamento. Si la jeringa está graduada en mililitros, ¿cuántos de estos deberá aplicar?

Solución:

Si un dm^3 equivale a un litro, entonces un cm^3 (milésima parte del dm^3) equivale a la milésima parte de un litro, es decir, un mililitro.

$$1\ cm^3 = 1\ ml$$
$$5\ cm^3 = x$$

$$x = \frac{5\ cm^3\ (1\ ml)}{1\ cm^3};\ x = 5\ ml$$

por lo tanto: 5 cm^3 = 5 ml

Respuesta: Joel aplicará 5 ml del medicamento.

3. A través de un ducto se transporta gasolina a razón de 20 m^3 por minuto; ¿cuántos kilolitros transporta en una hora?

Solución:

Primero debe hallarse el total de m^3 de gasolina que transporta el ducto en una hora.

Se sabe que 1 hora = 60 min pero, si transporta 20 m^3 en 1 minuto,

Entonces: $\dfrac{20\ m^3}{x} = \dfrac{1\ min}{60\ min};\ x = \dfrac{20\ m^3\ (60\ min)}{1\ min};\quad x = 1\ 200\ m^3$

Durante una hora transportará 1 200 m^3 de gasolina. Habrá que convertir este volumen a la medida de capacidad pedida.

Si 1 m^3 = 1 000 litros y 1 000 l = 1 kilolitro (kl)
1 m^3 = 1 kl

Entonces se tienen que: $\dfrac{1\ m^3}{1\ 200\ m^3} = \dfrac{1\ kl}{x};\ x = 1\ 200\ kl$

Por lo tanto, durante una hora el gasoducto transporta 1 200 kl de gasolina.

Tomando en cuenta los problemas anteriores, analizarás que para efectuar conversiones entre las unidades de volumen y las unidades de capacidad, es necesario multiplicar la unidad dada por el equivalente deseado. Observa y analiza los ejemplos del siguiente cuadro:

Conversión pedida	Unidad equivalente	Operación	Resultado
a) 5 m^3 a litros	1 m^3 a 1 000 l	5 $\times$ 1000	5 000 l
b) 800 l a m^3	1l = 0.001 m^3	800 $\times$ 0.001	0.8 m^3
c) 75 dm^3 a l	1 dm^3 = 1 l	75 $\times$ 1	75 l
d) 100 ml a cm^3	1 ml = 1 cm^3	100 $\times$ 1	100 cm^3
e) 3 l a cm^3	1 l = 1 000 ml 1 l =1 000 cm^3	3 $\times$ 1 000	3 000 cm^3

Con tu compañero(a) resuelve en tu cuaderno los siguientes problemas.

1. En una campaña de vacunación contra la rabia, se pretende vacunar aproximadamente 35 000 animales entre perros y gatos. Si cada aplicación requiere un promedio de 2 ml por animal, ¿cuántos dm^3 de vacuna se necesitan preparar para la campaña? No te olvides de que 1 l = 1 000 ml.

Compara tus resultados con el de otros grupos; si hay dudas, consulta con tu profesor.

Con tu compañero(a) completa el cuadro de conversión de unidades de capacidad y volumen.

Conversión pedida	Unidad equivalente	Operación	Resultado
1.29 cm^3 a l			
2.3 hl a m^3			
3.380 cm^3 a ml			

Compara tu ejercicio con el de tus compañeros(as) y verifica el proceso nuevamente; en caso de haber diferencia, clarifica tus dudas.

60 RESUÉLVELOS TÚ MISMO

158-1 Problemas de volumen y capacidad

Si te quedaras encerrado en un elevador, ¿podrías calcular aproximadamente la cantidad de aire que se encuentra en ese espacio cerrado y el tiempo que éste duraría? ¿No?, entonces por ningún motivo te pierdas el siguiente video, porque ¡podría salvar tu vida!

Observa con mucha atención el video, porque en él encontrarás ayuda para resolver estos y otros problemas en donde estén involucrados el volumen y la capacidad.

Resuelve en tu cuaderno con un compañero(a) los siguientes problemas:

1. ¿Qué volumen ocupará un edificio que tiene como dimensiones 12 m de frente por 7 m de fondo y 15 m de altura?

2. Una fábrica de zapatos de Bucaramanga va a enviar a Bogotá un pedido que consiste en dos camiones llenos de cajas de calzado. Si cada par de zapatos va en cajas de $30 \times 12 \times 10$ cm y éstas a su vez se guardan en cajas cuadradas más grandes que tienen 60 cm de arista:

a) ¿Qué volumen ocupa cada caja de zapatos?

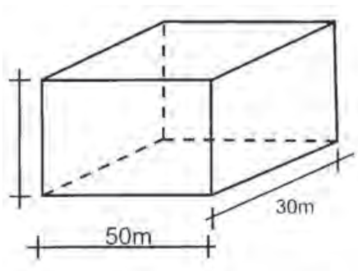
b) ¿Qué capacidad tienen las cajas grandes?

c) ¿Cuántas cajas de zapatos caben en cajas grandes?

Comprueba tus operaciones con la calculadora y compara tus resultados con otros compañeros(as), si tienes dudas, pregunta al profesor(a).

En tu cuaderno resuelve en forma individual los siguientes problemas que se te plantean. Utiliza las ayudas para las respuestas.

1. ¿Qué profundidad tendrá una presa con 50 m de longitud y 30 m de altura si puede almacenar 13 500 m^3 de agua?

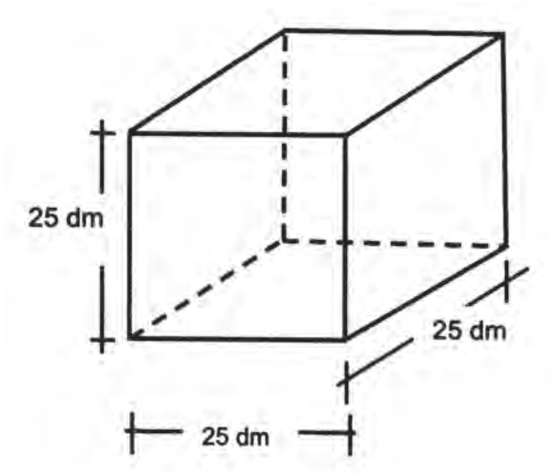


Primero calcula el área de la base A.

Con el dato del área calcula la profundidad (h) de la presa. Recuerda cuál es el inverso de la multiplicación y que:

V = 13 500 m^3

2. ¿Cuántos litros de aceite caben en un recipiente de forma cúbica, si el recipiente tiene por arista 25 dm.



Compara tus respuestas con las de la clave y corrige en caso necesario.

CLAVE

1. A = 1 500 m^2 h = 9 m **2.** v = 15 625 *l*

61 COMPRENDER MÁS QUE RECORDAR ES... DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

159-1 Repaso parcial
Integración de los conocimientos adquiridos

Ha llegado una vez más el momento de hacer un alto para repasar los temas vistos y resolver las dudas.

Observa el video; en él se hará una reseña de los temas que tratan de volumen y capacidad; anota las dudas que tengas y al finalizar el programa consúltalas con tu profesor(a).

Reúnete con dos compañeros(as) y efectúa los ejercicios que se proporcionan.

Contesta en tu cuaderno.

1. a) ¿Cómo llamamos al espacio que ocupa un cuerpo y en qué unidades se mide?

b) ¿Cómo nos referimos a la cantidad de líquido que contiene un recipiente y en qué unidades se mide?

c) ¿Cuáles son las dimensiones de un sólido o cuerpo geométrico?

d) ¿Qué obtienes al multiplicar las medidas largo ancho, y alto de una sólido?

Continúa trabajando en equipo y completa los siguientes cuadros en tu cuaderno.

2.

	UNIDADES DE VOLUMEN		
	Nombre	**Símbolo**	**Equivalencia en m^3**
Múltiplos	Kilómetro cúbico		
	Hectómetro cúbico		
	Decámetro cúbico		
	Metro cúbico		
Submúltiplos	Decímetro cúbico		
	Centímetro cúbico		
	Milímetro cúbico		

3.

UNIDADES DE CAPACIDAD

	Nombre	**Símbolo**	**Equivalencia en m^3**
Múltiplos	Kilolitro		
	Hectolitro		
	Decalitro		
	Litro		
Submúltiplos	Decilitro		
	Centilitro		
	Mililitro		

4. Escribe sus equivalentes:

1 m^3 en l ; 1 dm^3 en l ; 1 cm^3 en ml.

Compara tus ejercicios con los de otro equipo y si hay errores corrige.

Individualmente resuelve los siguientes ejercicios.

5. Efectúa las siguientes conversiones.

a) 3 km^3 en m^3

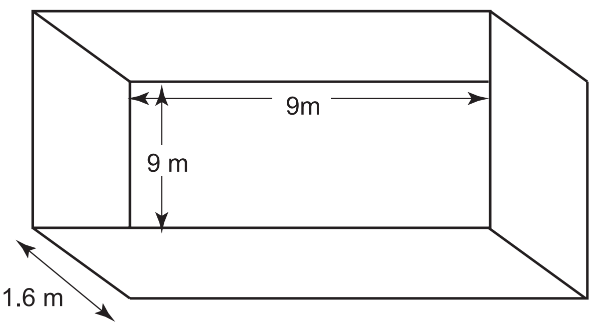
b) 5.6 dam^3 en dm^3

c) 8 967 mm^3 en cm^3

d) 45 dl en ml

e) 29.48 hl en kl

f) expresa la capacidad de la alberca en m^3 y en litros.



Compara tus respuestas con las de la clave y corrige en caso de error.

CLAVE

1. a) Volumen, cúbicas; b) Capacidad, litros; c) Largo, ancho, alto; d) Volumen **2.** Unidades de volumen: km^3, 1 000 000 000 m^3; hm^3; 1 000 000 m^3; dam^3, 1 000 m^3; dm^3, 0.001 m^3; cm^3, 0.000 001 m^3; mm^3, 0.000 000 001 m^3. **3.** Unidades de capacidad: U, 1 000 l; 100 l; dal; 10 l; dl; 0.1 l; cl, 0.01 l; ml, 0.001 l. **4.** Volumen - Capacidad: 1 m^3 = 1 000 l; 1 dm^3 = 1 l; 1 cm^3 = 1 ml. **5.** a) 3 000 000 000; b) 5 600 000; c) 8.967; d) 4 500; e) 0.02948; f) 72 m3 = 72 000 l.

62

160-1

¡DEMUESTRA QUÉ SABES!

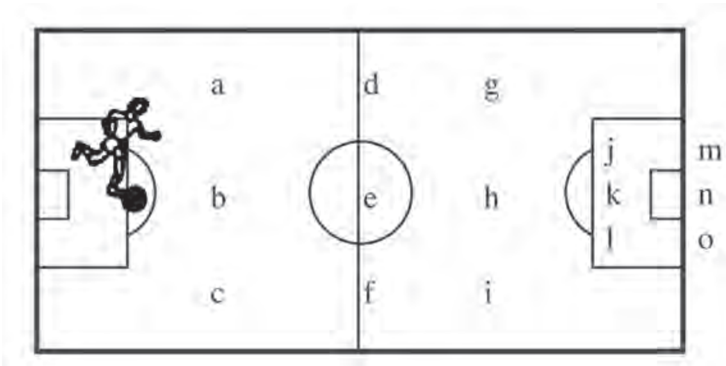
Demostración del aprendizaje logrado
Evaluación personal de los avances logrados

En esta sesión demostrarás lo que has asimilado en relación con los temas de geometría como son: los sólidos, el volumen y la capacidad.

Ten presente que trabajarás individualmente, en forma simultánea, con el video y el texto.

Observa el video en el cual se hablará sobre algunas aplicaciones de los temas de geometría vistos en el núcleo. También se darán instrucciones para resolver la primera parte de la evaluación.

I. TIRO A GOL

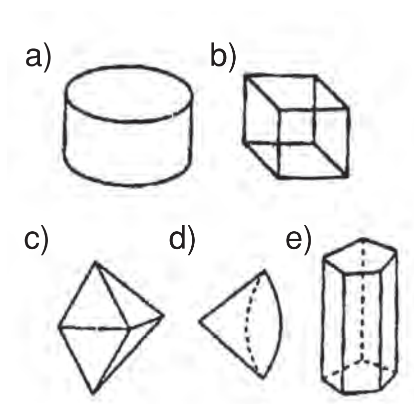


Compara los pases que diste para el tiro a gol, con la trayectoria que aparece en el video.

Si tus cinco pases fueron correctos, anotaste un gol; si no fue así, hubo pases que no pudiste hacer y, por lo tanto, no culminaste tu jugada con el gol.

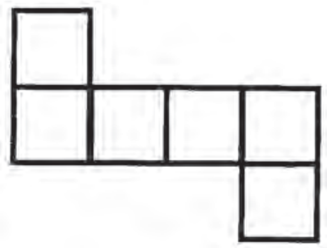
II. De la lista que se da, elige el nombre de cada uno de los siguientes sólidos y escribe en el paréntesis la letra que corresponda a la figura correcta. Copia la lista en tu cuaderno para contestar.

Prisma pentagonal..................... ( )
Cono .... ( )
Prisma octagonal....................... ( )
Cilindro .... ( )
Icosaedro .... ( )
Octaedro .... ( )
Pirámide triangular .... ( )
Prisma rectangular..................... ( )
Tetraedro.................................... ( )
Hexaedro .... ( )

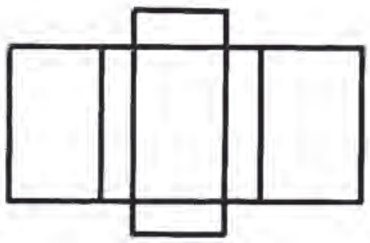


III. Escribe el nombre del cuerpo geométrico al que corresponde cada uno de los siguientes desarrollos.

f)



g)



IV. Expresa la medida de los siguientes productos en las unidades que se te piden.

h) Un recipiente o tina almacena 500 *l* de agua en dm^3

i) Un envase de refresco contiene 325 ml en cm^3

j) Un tanque tiene una capacidad de 0.020 m^3 en *l*

V. Resuelve el siguiente problema.

¿Cuál es el volumen de un libro que mide 25.4 cm de largo, 17,5 cm de ancho y 1 cm de grosor?

k) ¿Qué operación se debe hacer?

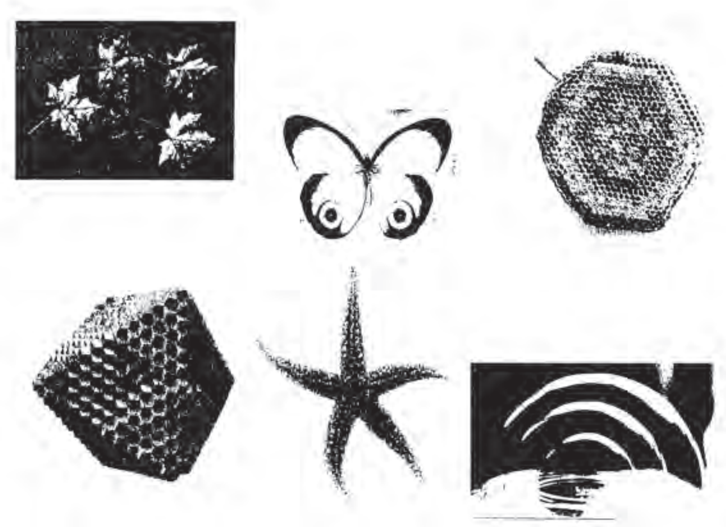
l) ¿Cuál será su volumen aproximadamente?

m) ¿Qué volumen tiene en realidad? Haz una estimación.

Al terminar, espera las indicaciones del profesor(a) para conocer la forma en que te evaluará.

Núcleo Básico 5

PARALELOGRAMOS, TRIÁNGULOS Y CÍRCULOS



El ser humano ha encontrado en la naturaleza la mayor fuente de inspiración
para la construcción de los «objetos» matemáticos,
en particular, de los «objetos» de la geometría...

En este núcleo se abordarán conceptos de mayor complejidad relativos a la geometría, cuya aplicación se cree inició con los egipcios y ha continuado hasta alcanzar, actualmente, grandes dimensiones en auxilio de disciplinas como la astronomía, la ingeniería, la arquitectura, etc.

Pero no sólo se puede hablar de la geometría por sí misma o como ciencia o conocimiento que apoya a otras ciencias, pues también en el arte pictórico y escénico pueden observarse fundamentos geométricos.

Aquí encontrarás procedimientos para realizar diversos trazos y calcular medidas, basándote en los conocimientos adquiridos en los años anteriores. Asimismo, observarás algunos cuerpos desde diferentes ángulos y conocerás cómo se representan, por medio del dibujo; ello te introducirá al campo del dibujo técnico y te dará bases suficientes si te decides por carreras como arquitectura, ingeniería mecánica, ingeniería electrónica, astronomía, etc.

63 FIGURAS BÁSICAS

95-3

Triángulos, paralelogramos y círculos
A cerca de los conceptos de triángulo, rectángulo y círculo

Si observas a tu alrededor, ¿qué figuras geométricas encuentras?, ¿cuáles son más frecuentes?

Invita a dos compañeros(as) para conformar tu equipo de trabajo. Con ellos, discute y pón en claro conceptos que seguramente has trabajado hace mucho tiempo.

Las siguientes preguntas pueden ayudarte a organizar la discusión. En sus cuadernos hagan una síntesis de los aspectos que consideren relevantes.

a) ¿Qué significa la palabra polígono? Da ejemplos de polígonos que conozcas.

b) ¿Cuál es el polígono más sencillo que conoces? ¿Cuántos lados tiene?

c) ¿Qué características del triángulo te permiten hacer una clasificación de ellos?

d) Un polígono de cuatro lados puede presentar diferentes regularidades. Si todos sus lados son de diferente tamaño, ¿cómo lo llamas?

e) Si todos sus lados son de igual longitud, ¿de qué figura se trata? Y si además sus ángulos interiores son de igual medida, ¿cómo lo llamas?

f) Dibuja cuadriláteros que sean paralelogramos.

g) ¿Cuándo un paralelogramo tiene sus lados de igual medida? Haz dibujos.

h) ¿Puede un paralelogramo tener sus cuatro lados de diferente medida? Haz dibujos.

Con tu equipo, encuentra un nombre para el polígono descrito a continuación y haz un dibujo que ilustre tu respuesta.

a) Triángulos que tienen sus lados de igual medida.

b) Triángulos cuyos ángulos interiores son menores que 90°, cada uno.

c) Paralelogramo cuyos lados son de igual medida, y ninguno de sus ángulos, interiores es recto.

d) Rombo cuyos ángulos interiores son de igual medida.

e) Figuras que tienen cuatro ángulos interiores y cada uno mide 90°.

Observa el video y comenta con tus compañeros(as) lo novedoso que encuentres en él.

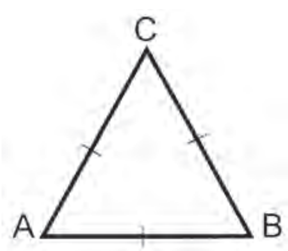
Invita a tus compañeros(as) a leer el siguiente texto.

TRIÁNGULOS, PARALELOGRAMOS Y CÍRCULOS

En este núcleo se van a estudiar las propiedades y criterios de congruencia de los triángulos, las propiedades de los paralelogramos, así como algunas características del círculo; para ello, es necesario que puedas definirlos y encontrar regularidades y características que permitan algunas clasificaciones.

Triángulo. Es todo polígono de tres lados. Según la medida de sus lados se pueden clasificar en:

a) **Triángulos equiláteros:** Son aquellos que tienen sus tres lados congruentes, esto es, tienen la misma medida.



De la figura se observa que:

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$

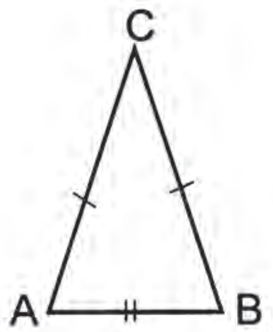
$\overline{AC} \cong \overline{AB}$

$\overline{BC} \cong \overline{AC}$

Recuérdese que la congruencia es la relación que existe entre figuras, segmentos o ángulos de igual forma y medida.

La manera de representarla es mediante el símbolo $\cong$.

b) **Triángulo isósceles:** Es el que tiene dos lados congruentes.

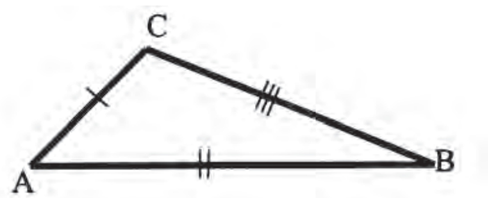


De la figura se observa que:

$\overline{AC} \cong \overline{BC}$

$\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$

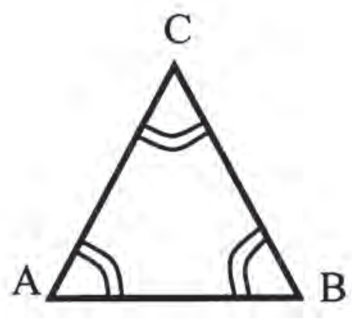
c) **Triángulo escaleno:** Es aquel que no tiene lados congruentes.



De la figura se observa que ningún lado es congruente con otro.

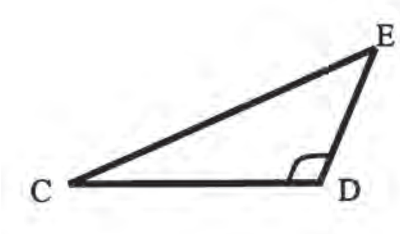
Otra clasificación de los triángulos es de acuerdo con la medida de sus ángulos interiores:

a) **Triángulo acutángulo:** Es aquel cuyos ángulos son agudos (menores de 90º).



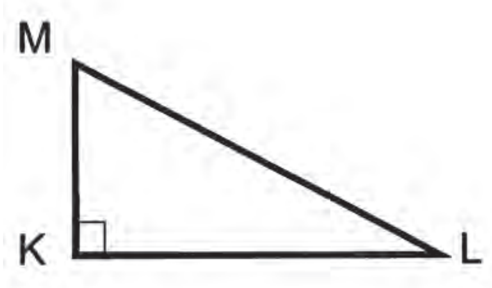
$\sphericalangle$ A, $\sphericalangle$ B y $\sphericalangle$ C son menores de 90º

b) **Triángulo obtusángulo**: Es aquel que tiene un ángulo obtuso (mayor que 90º y menor que 180º).



$\sphericalangle$ D es obtuso

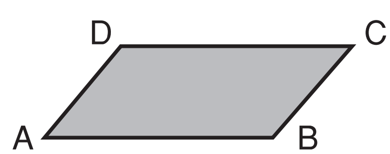
c) **Triángulo rectángulo**: Es el que tiene un ángulo recto (de ahí su nombre).



$\sphericalangle$ K es recto, mide 90º

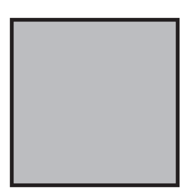
De los cuadriláteros son interesantes aquellos que presentan lados paralelos.

Paralelogramos: Son cuadriláteros cuyos lados opuestos son paralelos, como los siguientes:

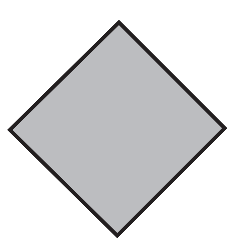


Romboide: los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son paralelos, así como $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$.

Rectángulo: sus cuatro ángulos interiores son rectos, por lo tanto son congruentes.



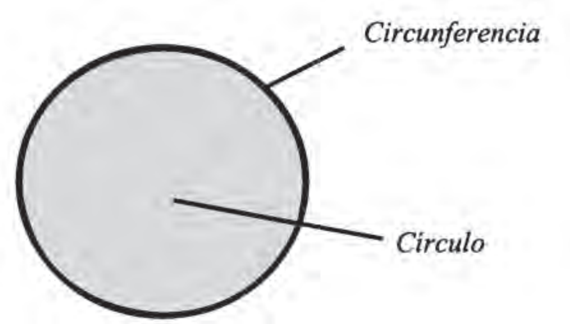
Cuadrado: sus lados son congruentes y paralelos y sus cuatro ángulos son rectos.



Rombo: al igual que el cuadrado, tiene sus cuatro lados congruentes y paralelos, pero sus ángulos no son rectos.

Por último, en lo que se refiere al círculo, también podemos conceptuarlo como un polígono. ¿De cuántos lados?

Círculo: Se puede describir como una figura plana limitada por una circunferencia.



En forma individual argumenta las respuestas que des a las preguntas.

1. ¿Un cuadrado también es un rectángulo? ¿Por qué?

2. ¿Todos los rectángulos también son cuadrados?

3. ¿Podría considerarse que los cuadrados también son rombos?

4. Si un romboide es un cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos, ¿podría considerarse que los rectángulos, los cuadrados y los rombos son romboides especiales?

CLAVE:

1. Sí porque es un paralelogramo cuyos ángulos interiores son rectos.

2. No, por ejemplo un rectángulo cuyos lados miden 3 y 4 cm, no es cuadrado.

3. Sí porque el cuadrado es un paralelogramo, cuyos lados tienen igual medida.

4. Sí, todos son paralelogramos.

64 ¡DESCUBRIENDO PROPIEDADES!

96-3

Congruencia de triángulos LLL
Criterios de la congruencia de triángulos LLL

Si la congruencia es la relación que existe entre figuras, segmentos o ángulos de igual forma, tamaño o medida, ¿qué objetos, en tu salón de clase, te permiten identificar figuras congruentes?

Invita a tres de tus compañeros(as) a realizar lo siguiente:

Taller

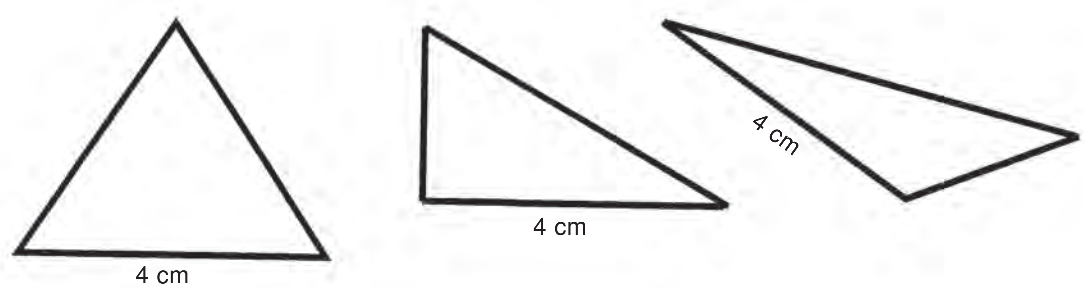
Traza triángulos con las condiciones dadas en a), b) y c). Recorta los modelos y compara, en cada caso, con los correspondientes que han hecho tus compañeros(as).

a) Triángulos que tengan un lado de 4 cm de longitud.

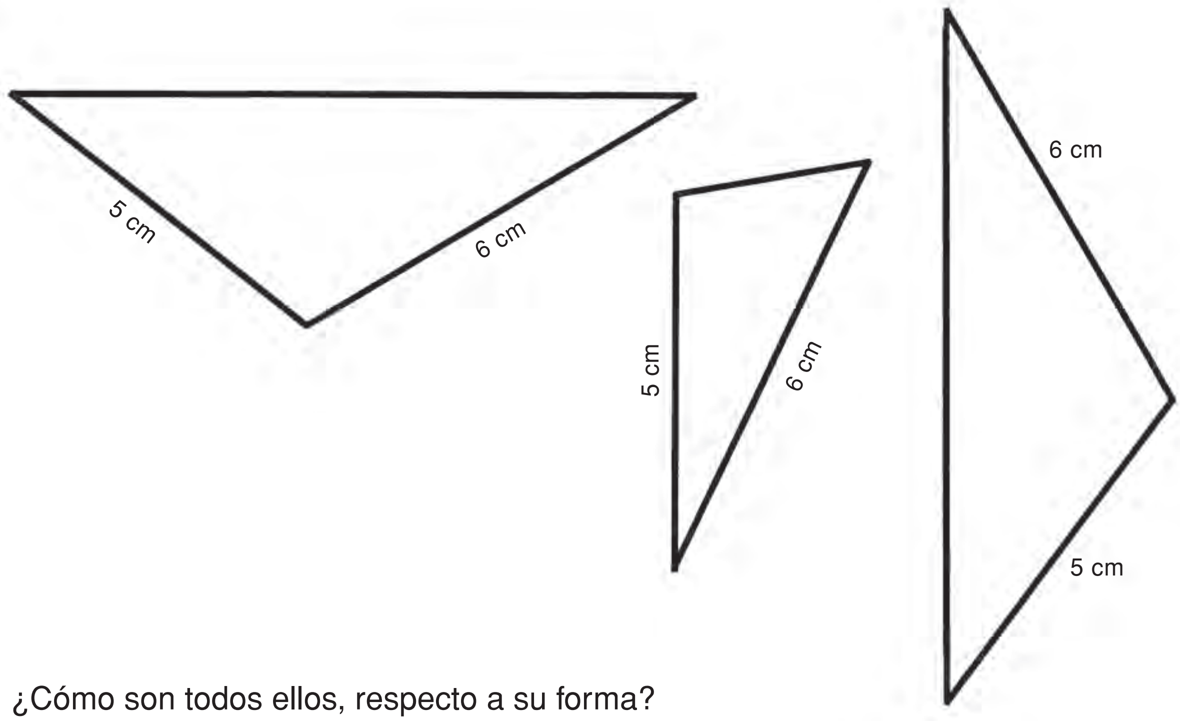
b) Triángulos que tengan lados de 6 cm y 5 cm de longitud.

c) Triángulos cuyos lados midan 8 cm, 6 cm y 4 cm.

¿Qué ocurre con los triángulos que tienen un lado de 4 cm?
¿Cumplen los siguientes triángulos con esa condición?
¿Se parecen los modelos de tus compañeros(as) a alguno de ellos?

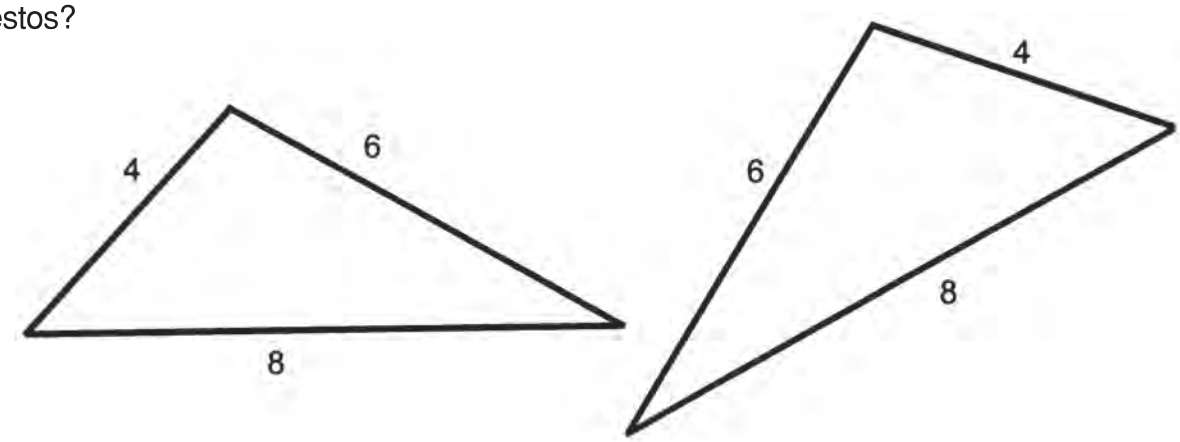


¿Qué ocurre con los modelos de triángulos cuyos lados miden 6 cm y 5 cm?, ¿cumplen los siguientes triángulos esta condición?



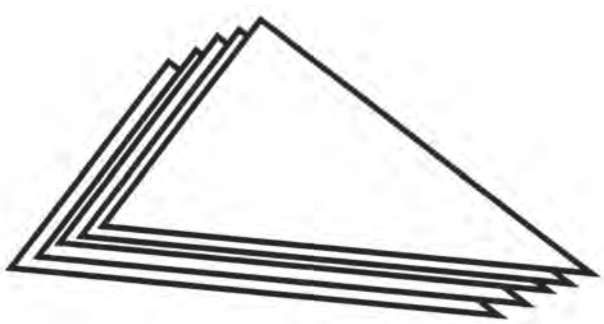
¿Cómo son todos ellos, respecto a su forma?

¿Cómo resultaron los modelos de triángulos con medidas 8 cm, 6 cm y 4 cm? ¿Son como estos?



¿Qué observas cuando comparas los modelos que han hecho con estas medidas? Si tratas de hacerlos coincidir, ¿qué observas?

¡Algo como esto!

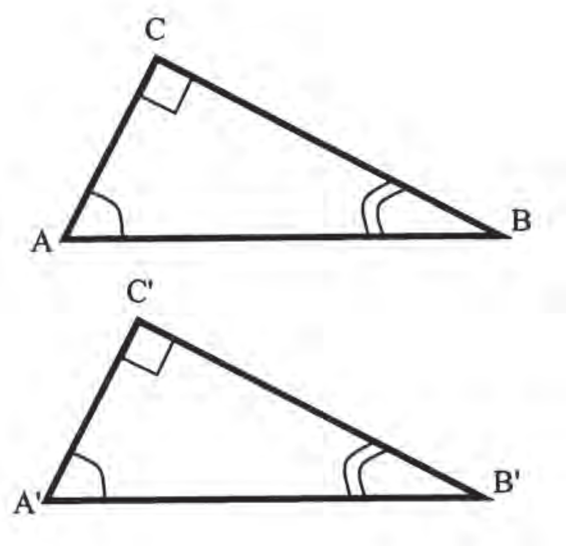


Lee con tus compañeros(as):

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS LLL

Al observar ciertas figuras se advierte que éstas quizá tengan la misma forma, pero no el mismo tamaño o medida; otras tal vez sean de la misma forma y el mismo tamaño, lo cual puede interpretarse de diferentes maneras. Al hacer referencia a figuras que tienen la misma forma y la misma medida se dice que son congruentes.

Obsérvese el siguiente ejemplo:



Al analizar los dos triángulos se puede ver que si se miden los lados del triángulo ABC y los del A'B'C', resultarán congruentes, lo cual se representa de la siguiente forma:

$$\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$$
$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$$
$$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$

Asimismo, se tiene que los ángulos A y A', B y B' así como C y C' son congruentes, lo cual se representa así:

$$\measuredangle A \cong \measuredangle A'$$
$$\measuredangle B \cong \measuredangle B'$$
$$\measuredangle C \cong \measuredangle C'$$

Debido a que los lados y ángulos interiores de estos triángulos son congruentes, se dice que el ABC es congruente con el A’B’C’; lo cual se representa como:

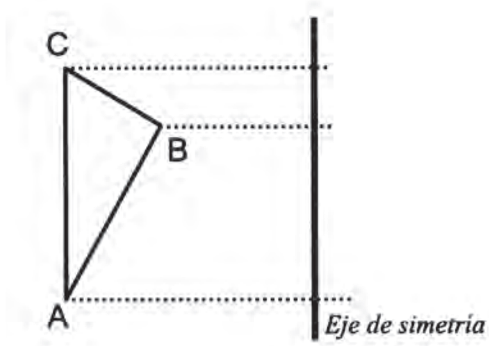
$$\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$$

Cuando se cumplen estas condiciones se dice que dos triángulos son congruentes, si tienen respectivamente congruentes sus lados y sus ángulos, ya que existe una correspondencia uno a uno entre sus lados y ángulos.

Si dos triángulos tienen sus tres lados congruentes, los dos triángulos son congruentes. Esto se representa como LLL.

Continúa trabajando con tus compañeros(as) para realizar las siguientes construcciones en sus cuadernos.

1. Usa tus conocimientos de simetría axial y encuentra el simétrico del triángulo ABC.

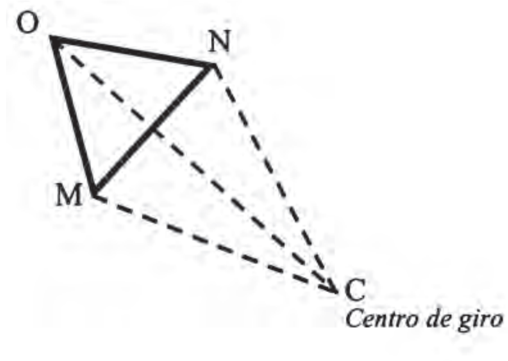


¿Cómo son los triángulos ABC y A’B’C’?
Si se miden los lados de los triángulos, ¿cómo resultan ser?
¿Qué ocurre con las medidas de los ángulos correspondientes?

2. Con un giro de 70º, encuentra el simétrico del ΔMNO, usa tus conocimientos de simetría central.

Mide los lados y ángulos de la figura simétrica ΔM'N'O' y compáralos con los del triángulo MNO.

¿Qué obtienes? ¿Cómo son ΔMNO y ΔM'N'O'?

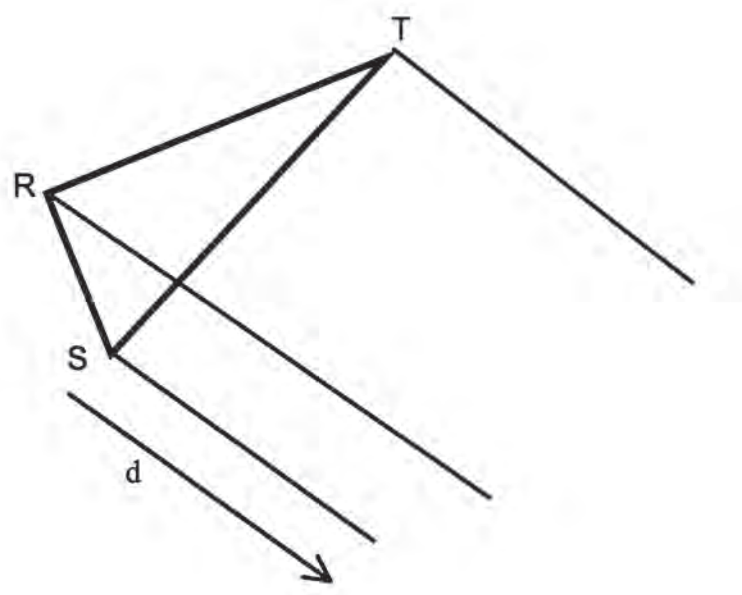


3. Podrás expresar como conclusión de tus hallazgos en 1 y 2 que:

Δ ABC $\cong \Delta$ A'B'C'	Δ MNO $\cong \Delta$ M'N'O'

4. Otra transformación geométrica que conoces es la traslación.

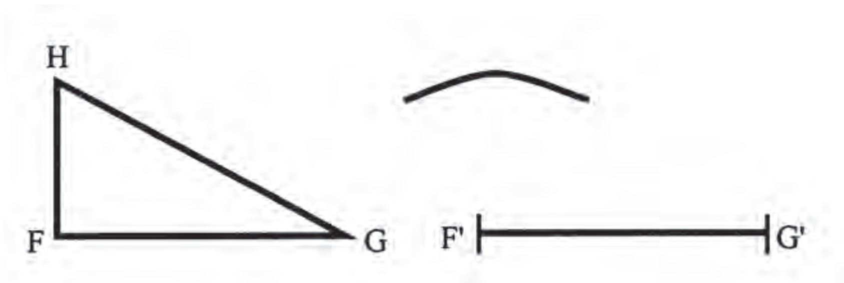
Si se tiene el ΔRST y una directriz (d) cuya amplitud es de 4 cm, por ejemplo, encuentra el triángulo R'S'T' trasladado.



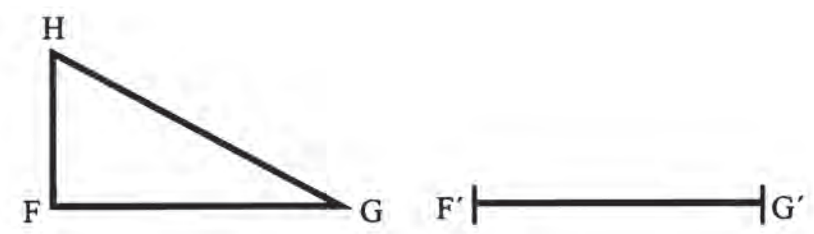
Compara las figuras RST y R'S'T'. ¿Son congruentes? ¿Por qué?

5. Sabes usar tus instrumentos geométricos. Con su ayuda haz la siguiente construcción:

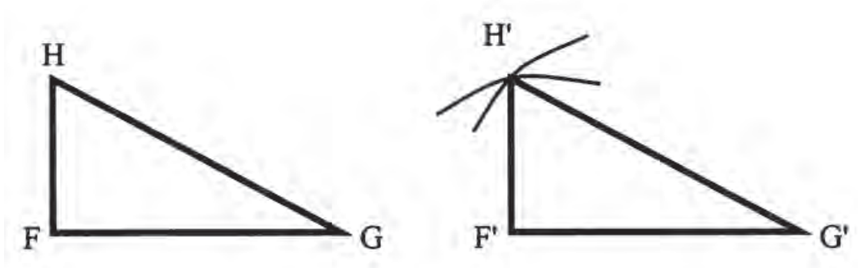
Dibuja un triángulo como FGH. Traza un segmento $\overline{F'G'}$ congruente con $\overline{FG}$.



Toma como centro el punto **F'** y con una abertura de compás congruente a $\overline{FH}$, traza un arco.



Con centro en **G'** y con una abertura de compás congruente con $\overline{GH}$, traza otro arco que interseque al primero, siendo este punto **H'**, el cual se une con los extremos del segmento F'G'.



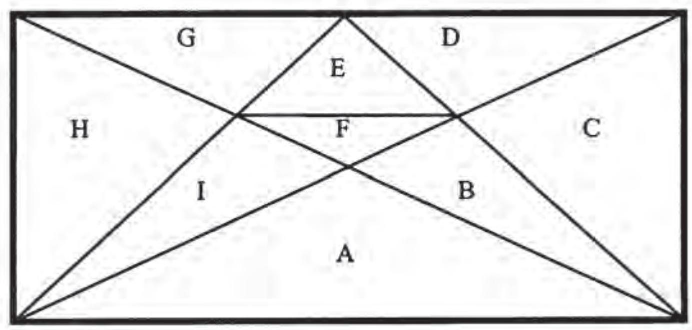
¿Cómo resultan los triángulos FGH y F'G'H'?
Puede expresar este hecho con la expresión:

Δ FGH $\cong \Delta$ F'G'H'

Observa el video. Comenta con tus compañeros(as) cuánto sabías sobre congruencia de triángulos a través del trabajo realizado y cómo te ayudó esto para comprender fácilmente el contenido del video.

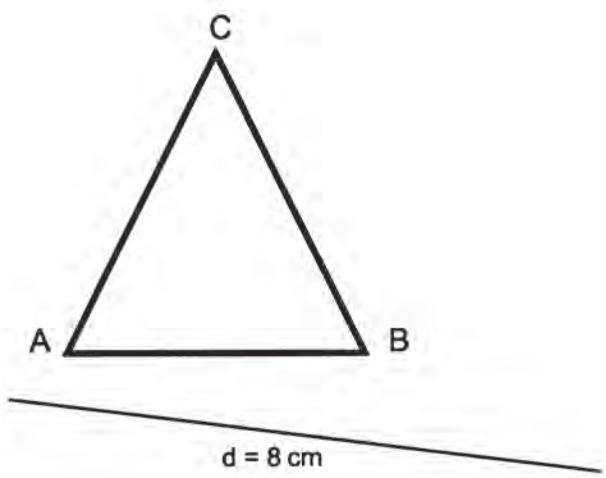
Trabaja con un compañero(a).

En la siguiente figura indica los triángulos que sean congruentes; para ello, tienes que medirlos.

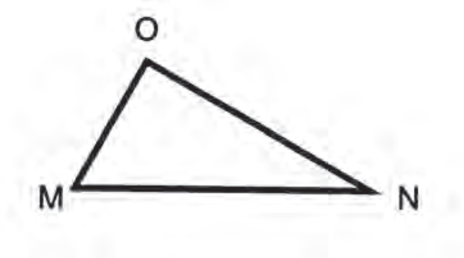


Individualmente traza un triángulo que sea congruente con cada triángulo que se tiene; para ello lee las indicaciones. Trabaja en tu cuaderno.

1. Por traslación y cuando la longitud de la directriz es de 8 cm.

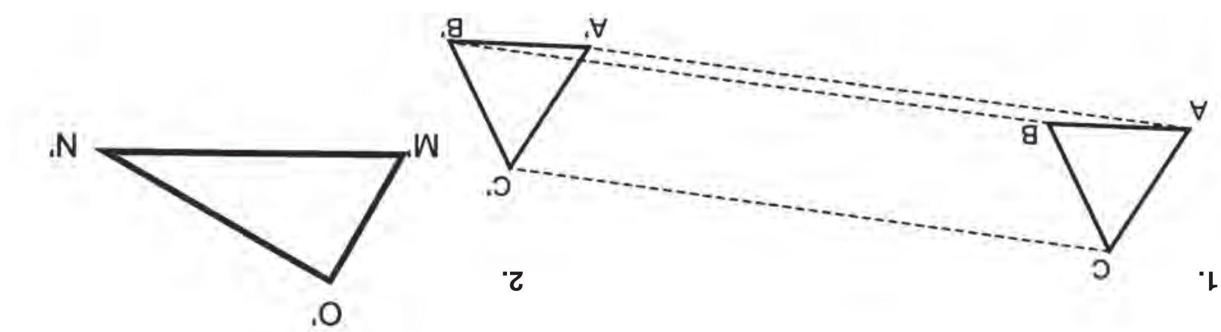


2. Por trazos geométricos.



Compara tus trazos con la clave, si hay errores corrige.

CLAVE:



65

97-3

¡EL DOBLE UNO!

Congruencia de triángulos LAL
Criterios de congruencia de triángulos LAL

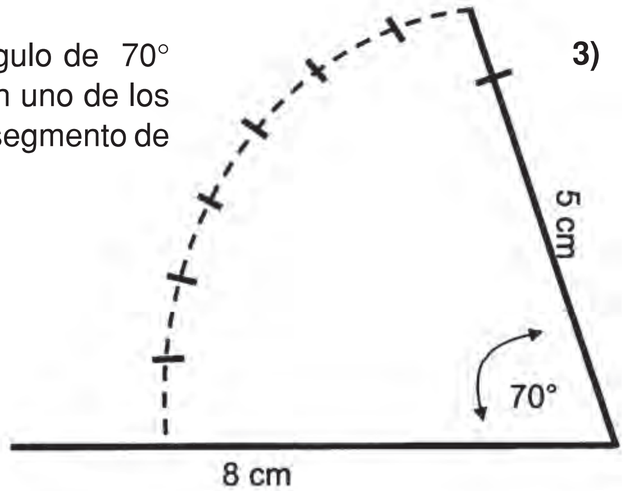
Invita a tres o más de tus compañeros(as) a realizar la siguiente construcción.

Dibuja, en una hoja, un triángulo en el que dos de sus lados midan 5 cm y 8 cm respectivamente, y el ángulo entre ellos mida 70°.

Para el procedimiento las indicaciones pueden ser las siguientes:

1) Traza un segmento de 8 cm.

2) Señala un ángulo de 70° con vértice en uno de los extremos del segmento de 8 cm.



3) Traza el segmento con abertura de 70°. Sobre él traza el lado de 5 cm.

Completa el triángulo trazando el tercer lado. Recorta el modelo que has construido.

Mide el tercer lado. ¿Cuánto mide?

Compara esa medida en los modelos que han construido tus compañeros(as). ¿Qué observas?

Compara tu modelo de triángulo con los de tus compañeros. ¿Cómo son estos modelos?

Qué opinas de la siguiente proposición:

Triángulos que tienen dos de sus lados de las mismas medidas y el ángulo entre esos lados también tiene la misma medida son congruentes.

¿Consideras que la construcción que has hecho con tus compañeros(as) es una comprobación de esta proposición? Discute tus conclusiones con ellos(as).

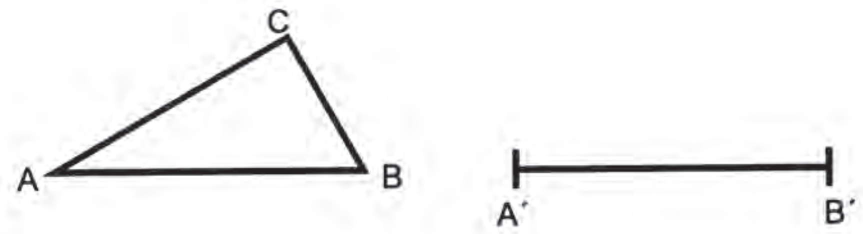
Haz la siguiente lectura con tus compañeros(as). Realiza las construcciones sugeridas, en tu cuaderno.

CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS LAL

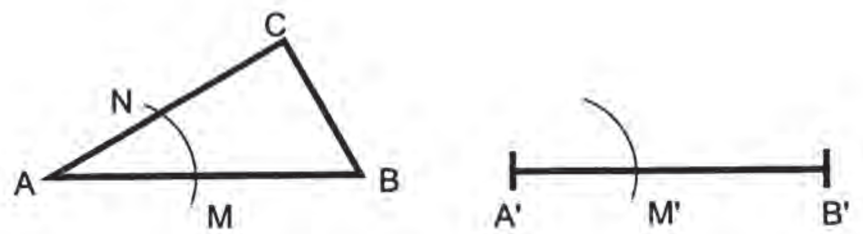
Otro criterio de congruencia que se presenta en los triángulos es cuando dos triángulos tienen congruentes dos lados y el ángulo comprendido entre ellos, esto se representa como LAL.

A continuación se muestra el procedimiento para la construcción de dos triángulos congruentes, de acuerdo con el criterio LAL.

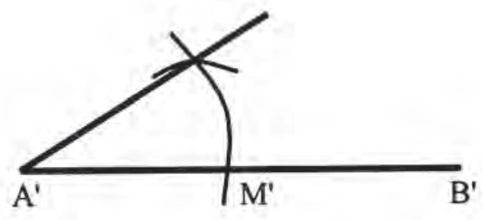
Si se tiene el triángulo ABC, para obtener otro congruente a él, se toma como referencia el ángulo A. Para ello se traza un segmento A’B’ congruente al segmento AB.



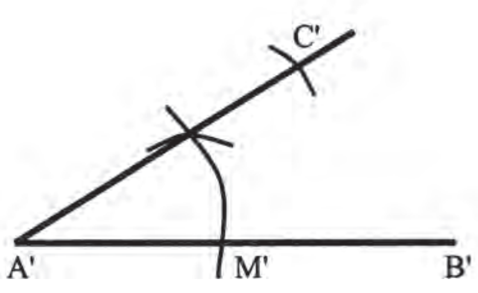
Con una abertura cualquiera del compás se trazan dos arcos haciendo centro en **A** y **A’** con lo que se obtienen los puntos **M, N** y **M’.**



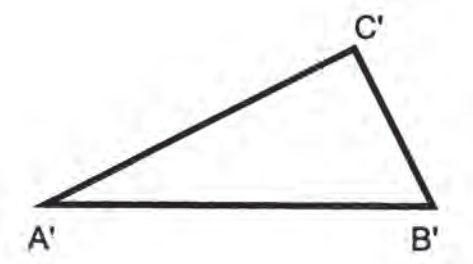
Con centro en **M’** y con una abertura de compás congruente con el arco MN, se traza otro arco que interseque al del $\overline{A'B'}$ y después se une este punto con el extremo **A’.**



Se hace centro en **A’** y con una abertura de compás congruente a $\overline{AC}$ se marca el punto **C’.**

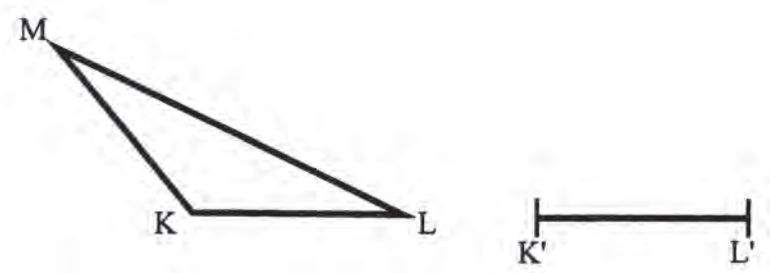


Se unen **C’** con **B’** para formar el Δ A’B’C’, el cual resulta ser congruente con el Δ ABC.

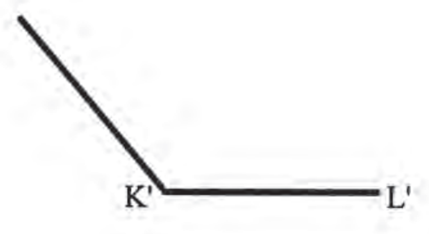


Otro procedimiento para trazar triángulos congruentes entre sí, de acuerdo con este tipo de congruencia, es el siguiente:

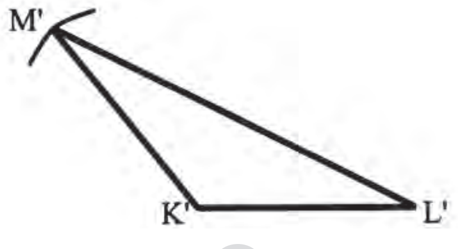
Dado el triángulo KLM, se traza un segmento K’L’ congruente al segmento KL.



Se mide con transportador el $\measuredangle$ K y se traza el $\measuredangle$ K’.



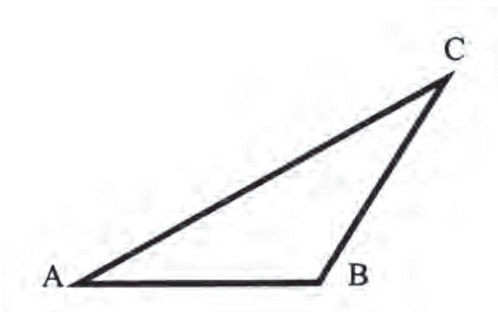
Se hace centro en **K’** y con una abertura de compás congruente a $\overline{KM}$ se marca el punto M’. Después se unen los puntos **L’** y **M’** para formar el triángulo K’L’M’, que resulta congruente con el Δ KLM.



Con base en estos dos procedimientos mostrados se tiene que dos triángulos son congruentes si tienen congruentes un ángulo y los lados que forman dicho ángulo.

Observa el video. Comenta con tus compañeros(as) su contenido. Seguramente la construcción que hiciste al comienzo te ha ayudado a comprender mejor el criterio de congruencia LAL.

Sigue con tu compañero(a) de trabajo y traza en tu cuaderno un triángulo congruente empleando únicamente compás y escuadras.



Compara tu triángulo con el de otros compañeros(as). ¿Cómo resultan ser todos ellos?

En forma individual comprueba que cuando conoces la longitud de dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido entre ellos el triángulo está determinado. Explica y compara tus argumentos con los de tus compañeros(as).

66 SIEMPRE IGUALES

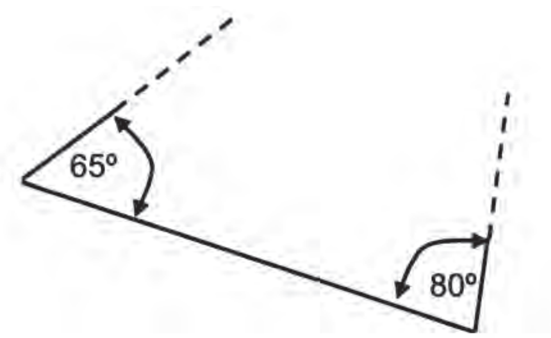
98-3

Congruencia de triángulos ALA
Criterios de congruencia de triángulos ALA

Como ya has visto, para trazar un triángulo congruente a otro se necesita conocer todas las medidas de los lados y ángulos. Para ello es suficiente conocer dos ángulos y el lado comprendido entre ellos o también las medidas de sus tres lados.

Invita a un compañero(a) para analizar si dos triángulos son o no congruentes cuando tienen dos ángulos congruentes y el lado común a ellos también de igual medida.

Puedes hacer una comprobación haciendo construcciones con los siguientes datos:



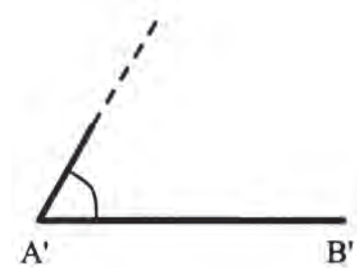
¿Resultan los triángulos construidos a partir de estos datos, congruentes?

¿Crees que este es otro criterio para la congruencia de triángulos?

Con tus compañeros(as) de trabajo, analiza el siguiente procedimiento para trazar triángulos congruentes, dada la longitud de un lado y las medidas de dos ángulos adyacentes.

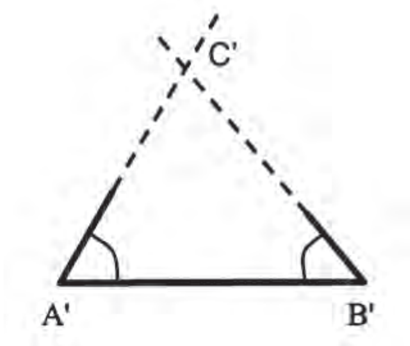
1. Se traza el segmento $\overline{A'B'}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$.

2. Se mide con el transportador $\measuredangle$ A y se traza $\measuredangle$ A' de modo que $\measuredangle A \cong \measuredangle A'$.



3. Se mide $\measuredangle$ B y se traza $\measuredangle$ B' tal que $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$.

4. Se prolongan los rayos que parten de **A’** y **B’** hasta que se corten; ese punto de intersección representa a **C’.**



Así se obtiene el Δ A’B’C’.

Comparando los triángulos ABC y A’B’C’, se tiene que:

$$\measuredangle A \cong \measuredangle A', \quad \overline{AB} \cong \overline{A'B'}, \quad \measuredangle B \cong \measuredangle B'$$

Al medir los lados y ángulos restantes se tiene que:

$$\measuredangle C \cong \measuredangle C', \quad \overline{AC} \cong \overline{A'C'}, \quad y \quad \overline{BC} \cong \overline{B'C'}$$

Por lo tanto, al Δ ABC $\cong$ Δ A’B’C’.

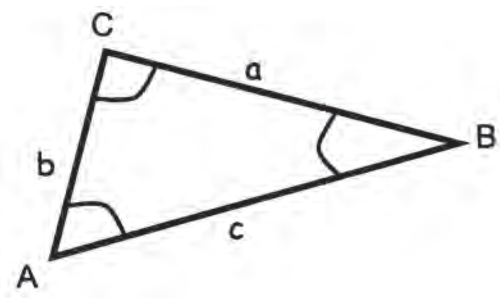
Así se tiene que:

Dos triángulos son congruentes si tienen un lado congruente adyacente a dos ángulos congruentes.

Observa el video que te mostrará la forma de trazar un triángulo congruente con otro, si se conocen dos ángulos y el lado comprendido entre ellos. Al terminar, comenta con tus compañeros(as) los aportes que has recibido al conocimiento que ya tenías.

Invita a dos compañeros(as) para trabajar en grupo:

1. Una vez que tienes un triángulo particular como el de la figura puedes decir cuánto mide cada uno de sus lados a, b y c y cada uno de sus ángulos ∢ A, ∢ B, ∢ C.

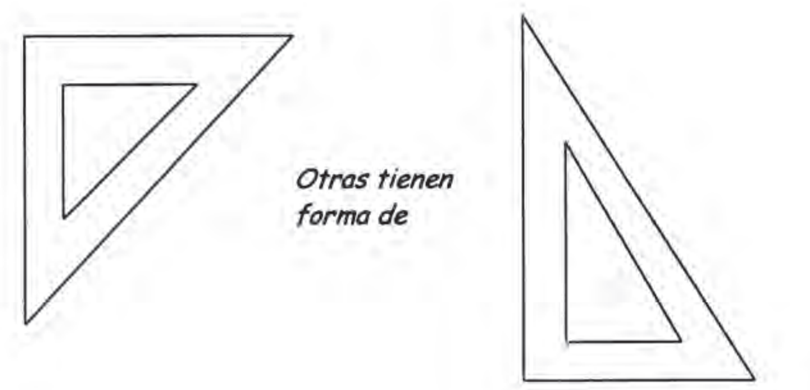


Escribe en tu cuaderno con cuáles elementos del triángulo puedes construir otros congruentes con él.

2. Uno de los criterios de congruencia de triángulos es: triángulos cuyos tres lados son congruentes.

Una pregunta que podemos intentar solucionar es: ¿Son congruentes triángulos cuyos ángulos son congruentes?

Una sugerencia para encontrar respuestas a esta pregunta puede ser la comparación de escuadras. Acuérdate que hay escuadras cuya forma es de:



Triángulo isósceles *Triángulo escaleno*

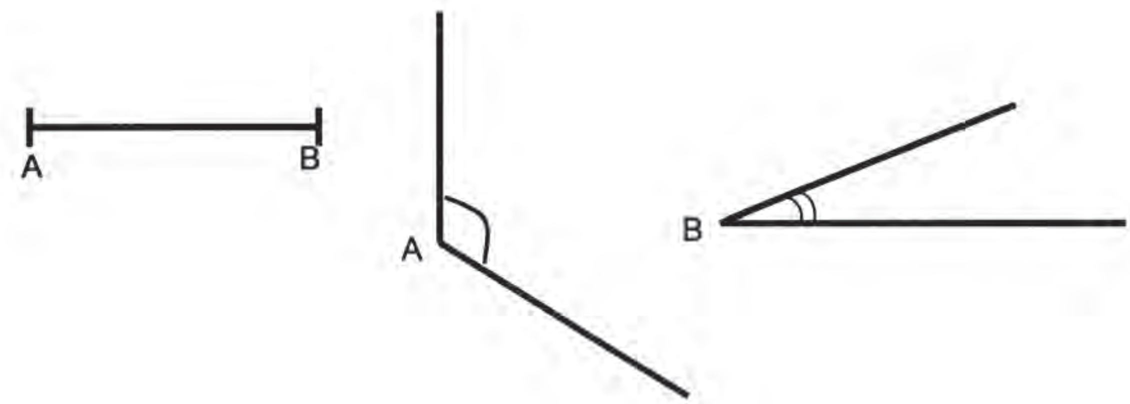
¿Son todas las escuadras de la misma forma y tamaño?
¿Cuánto miden cada uno de los ángulos de una escuadra de forma de triángulo isósceles?
¿Cuánto mide cada uno de los ángulos de una escuadra de forma de triángulo escaleno?
¿Cuál es tu respuesta a la pregunta de este ejercicio?
¿Cómo le explicas a un compañero(a) que **triángulos cuyos ángulos son congruentes, no son necesariamente triángulos congruentes?**

Compara tus conclusiones con las que han encontrado otros grupos de compañeros(as).

Con tus compañeros(as) de grupo, expliquen un procedimiento para trazar triángulos con ángulos congruentes. Por ejemplo, triángulos cuyos ángulos midan: 60º, 80º y 40º, corten y comparen sus modelos. ¿Son estos congruentes?

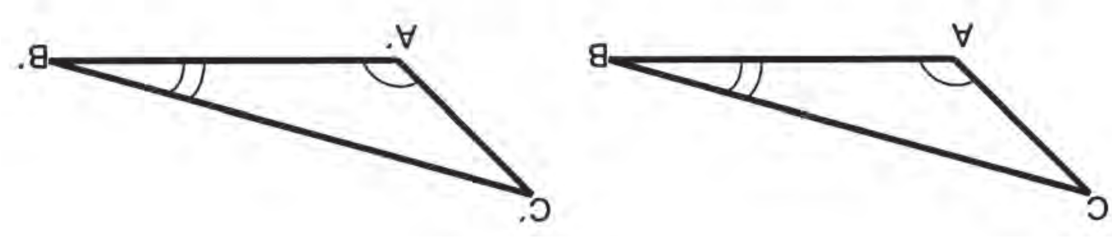
Hazlo en tu cuaderno.

Construye en tu cuaderno individualmente dos triángulos congruentes con los datos que se dan.



Compara tus triángulos con los de la clave, si no son congruentes, consulta con tu profesor.

CLAVE:



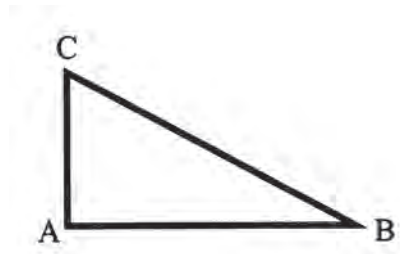
$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

67 SUMAN LO MISMO

99-3

Propiedades de los triángulos I
Conocimiento de las propiedades de los triángulos

Invita a que cada uno de tus compañeros(as) de grupo dibuje un triángulo cualquiera. Luego midan cada uno de los ángulos y obtengan la suma de los ángulos internos.



$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = ?$$

¿Cómo son estos resultados en cada caso?

¿Depende la forma y el tamaño del triángulo de la medida de sus ángulos internos?

¿Hay algún modelo de estos triángulos que tenga dos ángulos rectos?

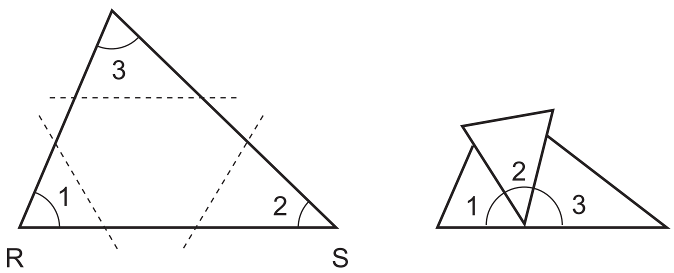
Para contestar las preguntas anteriores, observa el video que también te mostrará algunas de las propiedades de los triángulos. Al terminar comenta tus dudas con tus compañeros(as) y tu profesor(a).

Ahora hagan en grupo la siguiente lectura y también las construcciones sugeridas.

PROPIEDADES DE LOS TRIÁNGULOS I

El triángulo es una figura geométrica muy común; además, es muy importante para el estudio de las matemáticas. Por lo tanto requiere que se haga un exhaustivo análisis de sus características.

Se sabe que todo triángulo tiene tres ángulos internos, pero ¿cuánto suman las medidas de éstos? Si se recorta un triángulo en tres partes, de modo que cada una contenga un ángulo interno, y se suman haciendo coincidir los vértices, resulta la figura siguiente. Compruébenlo con alguno de los modelos que han hecho.

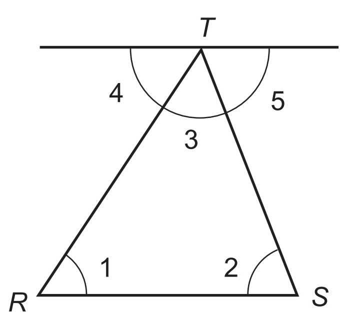


Nótese que al unir los tres ángulos forman un ángulo colineal; es decir, un ángulo de 180º.

Por consiguiente, la suma de los ángulos internos del triángulo RST es 180º.

Ahora se plantea la siguiente interrogante: ¿se cumple esa condición en todo triángulo? Para contestarla es necesario realizar una demostración que generalice esta propiedad como la siguiente:

Se conoce que los ángulos	Se desea demostrar que
1, 2 y 3 son internos del Δ RST	$1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 180^\circ$



Para esta demostración se necesita trazar una paralela al lado RS que pase por el vértice T; con ello se forman los ángulos 4 y 5.

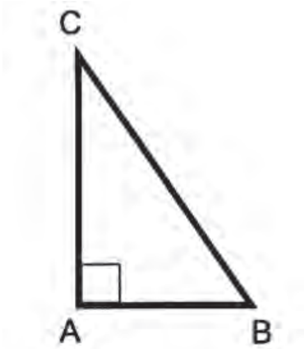
RAZONAMIENTO	
Afirmaciones	**Razones**
1. $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 5 = 180°$	1. Porque forman un ángulo colineal o llano.
2. $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4$ y $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 5$	2. Porque son ángulos alternos internos entre paralelas.
3. $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 180°$	3. Al sustituir en la afirmación a $\sphericalangle 4$ y $\sphericalangle 5$ por sus equivalentes ($\sphericalangle 1$ y $\sphericalangle 3$)

Con esto queda demostrada la propiedad 1:

La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es igual a 180º.

De la afirmación anterior se pueden inferir otras:

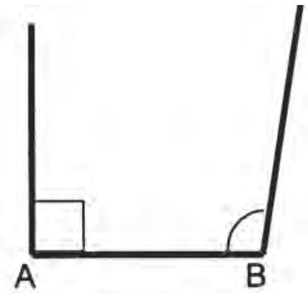
a) Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo *suman 90º; es decir, son complementarios.*



$\sphericalangle$ A es recto = 90°.
$\sphericalangle$ B y $\sphericalangle$ C son agudos.
$\sphericalangle$ B + $\sphericalangle$ C = 90°.

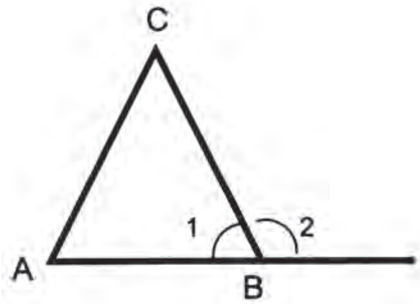
Compruébenlo para el caso de una de sus escuadras.

b) Un triángulo sólo puede tener un ángulo recto o un ángulo obtuso.



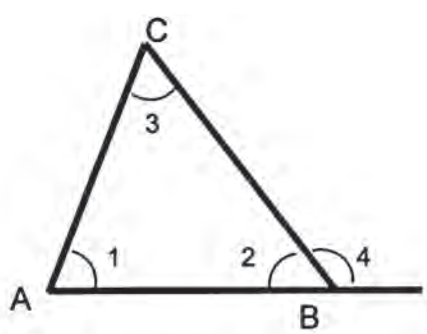
Los lados de los ángulos rectos u obtusos no se intersecan. Por tanto no se forma un triángulo.

c) En un triángulo, un ángulo interno y su externo adyacente *suman 180º; es decir, son suplementarios.*



$\sphericalangle$ 1 es interno del $\triangle$ABC.
$\sphericalangle$ 2 es externo adyacente de $\sphericalangle$ 1.
$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 180°$.

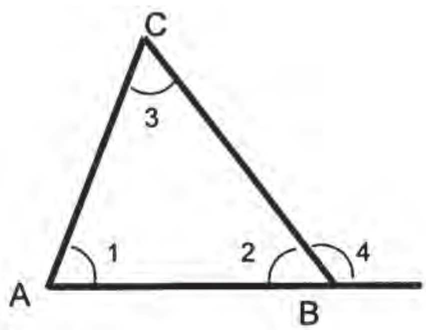
d) Todo ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos internos no adyacentes a él.



Los ángulos 1 y 3 son internos no adyacentes al ángulo externo 4.

$\sphericalangle 4 = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 3$

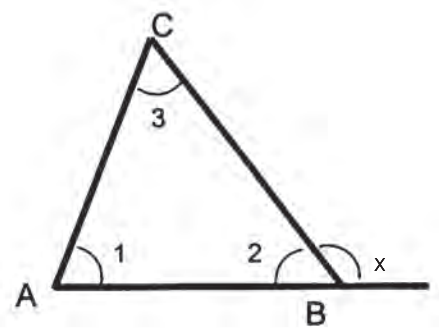
e) En todo triángulo cualquier ángulo externo es mayor que un ángulo interno no adyacente a él.



$\sphericalangle$ 1 y $\sphericalangle$ 3 son internos no adyacentes al ángulo externo 4.

$\sphericalangle 4 > \sphericalangle 1$
$\sphericalangle 4 > \sphericalangle 3$

Continúa trabajando en equipo para escribir las razones de cada afirmación lo que permite construir una demostración:



Se conoce que:
$\sphericalangle 1$, $\sphericalangle 2$ y $\sphericalangle 3$ son los ángulos internos en el $\triangle ABC$.
$\sphericalangle x$ es externo adyacente al $\sphericalangle 2$.

Se quiere demostrar que:
$\sphericalangle x = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 3$

RAZONAMIENTO

¿Cuál es la razón para afirmar que $\sphericalangle x + \sphericalangle 2 = 180°$?

¿Por qué puede afirmarse que $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 = 180°$?

¿Por qué se puede decir que $\sphericalangle x + \sphericalangle 2 = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3$

¿Por qué se puede plantear la siguiente igualdad?

$$\sphericalangle x + \sphericalangle 2 - \sphericalangle 2 = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 - \sphericalangle 2\ ?$$

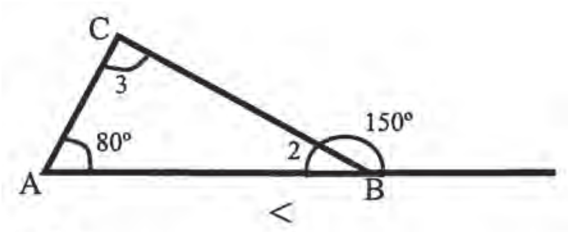
Cómo explicas entonces que

$$\sphericalangle x = \sphericalangle 1 + \sphericalangle 3$$

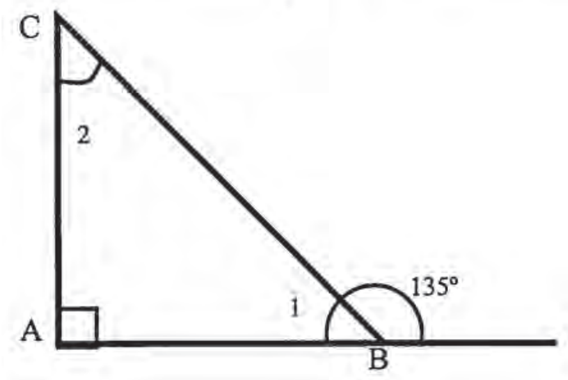
Estás de acuerdo en que esta última igualdad se puede expresar como: «En un triángulo el ángulo externo x es igual a la suma de los dos ángulos internos no adyacentes a él».

Discute la demostración con tu profesor(a) y tus compañeros(as). Si hay algo que no comprendas pídele a tu profesor(a) que te ayude.

Según las siguientes figuras, encuentra individualmente las medidas de los ángulos que se piden. Explica tu procedimiento en tu cuaderno.



a) ∢ 2 =
b) ∢ 3 =



c) ∢ 2 =
d) ∢ 1 =

Compara tus resultados con los de la clave; si son diferentes, consulta con tu profesor(a).

CLAVE:

a) 30º, b) 70º, c) 45º, d) 45º.

68
100-3

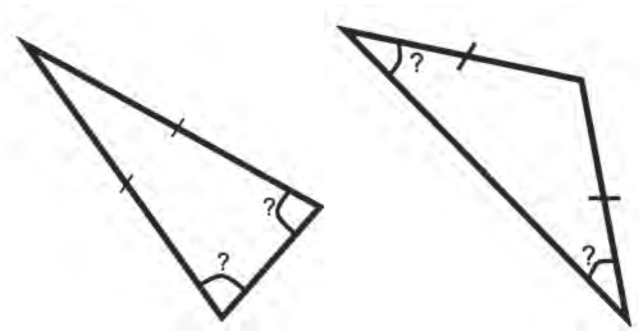
LOS GRANDES DE FRENTE

Propiedades de los triángulos II
Conocimiento de las propiedades de los triángulos

En esta sesión continuarás analizando y descubriendo propiedades de los triángulos. El tema anterior permitió conocer una propiedad muy importante respecto a la suma de los ángulos internos del triángulo. Ahora se tendrán en cuenta tanto los ángulos como los lados.

1. Con tus compañeros(as) de grupo, dibuja y recorta modelos de **triángulos isósceles,** es decir aquellos que tienen dos lados congruentes o de igual longitud.

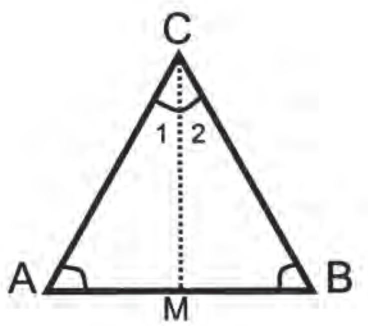
¿Cómo son los ángulos opuestos a los lados congruentes?



Mide esos ángulos en tus modelos y los de tus compañeros(as).

¿Cuál es tu hipótesis?

Analiza cómo tu hipótesis puede comprobarse para los triángulos particulares que han construido. Pero ¿es cierta para todo triángulo isósceles? Te invitamos a construir una demostración.



En el triángulo isósceles ABC

$$\overline{AC} \cong \overline{BC}$$

entonces

$\sphericalangle A = \sphericalangle B$

Se ha trazado $\overline{CM}$, como bisectriz del $\sphericalangle C$.

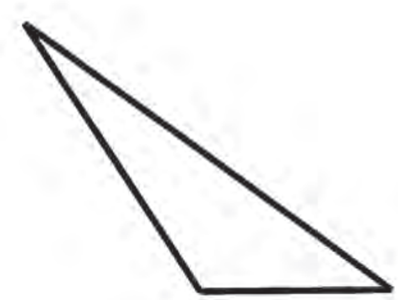
Qué afirmamos	**Por qué (razones)**
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$	Porque son los lados congruentes del triángulo isósceles dado.
$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$	Porque la bisectriz $\overline{CM}$ divide el ángulo en C ($\sphericalangle C$) en dos ángulos de igual medida.

$\overline{CM} \cong \overline{CM}$	Es el lado común a los dos triángulos ACM y BCM.
$\Delta ACM \cong \Delta BCM$	Son triángulos congruentes porque tienen dos lados congruentes y el ángulo entre ellos de igual medida (LAL).
$\measuredangle A = \measuredangle B$	Porque son ángulos homólogos de triángulos congruentes.

Se ha demostrado que:

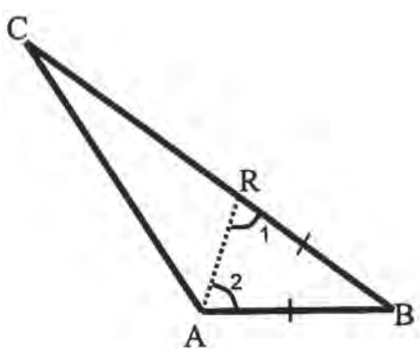
Los ángulos opuestos a los lados congruentes de un triángulo isósceles son iguales.

2. Ahora nos planteamos otra pregunta respecto a un **triángulo escaleno:** ¿Sucederá que en todo triángulo escaleno al lado mayor se opone el ángulo mayor y al lado menor se opone el ángulo menor?



Traza varios modelos de triángulos escalenos y verifica en ellos la hipótesis de la pregunta.

Para generalizar esta propiedad sigue el siguiente análisis.



Si $\overline{BC} > \overline{AB}$ en el triángulo ABC entonces $\measuredangle A > \measuredangle C$. Se hace un trazo auxiliar: se localiza el punto R, de tal manera que $\overline{AB} \cong \overline{BR}$.

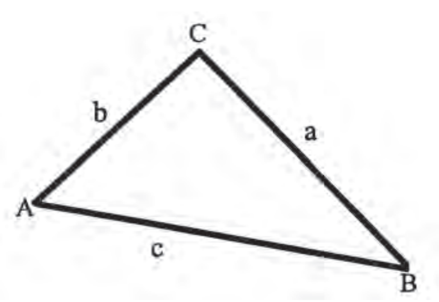
Se une A con R para formar el triángulo isósceles ABR.

Afirmamos	Por esta razón
$\overline{AB} \cong \overline{BR}$	Son lados de igual longitud del (ABR) isósceles, como resultado del trazo auxiliar.
$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$	Porque son ángulos adyacentes a los lados de igual medida de un triángulo isósceles.
$\sphericalangle 1 > \sphericalangle C$	$\sphericalangle 1$ es ángulo exterior y $\sphericalangle C$ no es adyacente a él en el ΔARC.
$\sphericalangle 2 > \sphericalangle C$	Se sustituye en la afirmación anterior $\sphericalangle 1$ por su equivalente $\sphericalangle 2$.
$\sphericalangle A > \sphericalangle 2$	Porque el $\sphericalangle 2$ es una parte del $\sphericalangle A$.
$\sphericalangle A > \sphericalangle C$	Porque se puede ampliar la propiedad transitiva así: $\sphericalangle 2 > \sphericalangle C$ y $\sphericalangle A > \sphericalangle 2$ entonces $\sphericalangle A > \sphericalangle C$

De esta manera se demuestra la siguiente propiedad.

En todo triángulo escaleno el mayor lado se opone al mayor ángulo.

3. Una propiedad muy interesante que muestra las relaciones entre las longitudes de los lados de cualquier triángulo vamos a visualizarla para un triángulo particular como el siguiente.



En el Δ ABC

El lado b = 3 cm
El lado a = 4 cm
El lado c = 5 cm

Observa las siguientes relaciones:

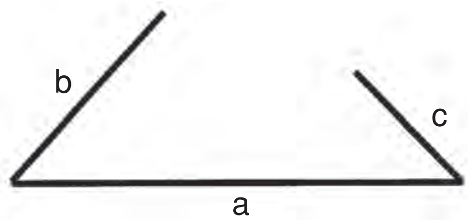
$a < b + c$ $\quad$ $a > c - b$
$4 < 3 + 5$ $\quad$ $4 > 5 - 3$

$b < a + c$ $\quad$ $b > c - a$
$3 < 4 + 5$ $\quad$ $3 > 5 - 4$

$c < b + a$ $\quad$ $c > a - b$
$5 < 3 + 4$ $\quad$ $5 > 4 - 3$

Es decir que en nuestro triángulo la longitud de uno de sus lados es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados y que a su vez la longitud de su lado es mayor que la diferencia entre las longitudes de los otros dos lados.

Analiza qué ocurre cuando queremos construir un triángulo cuyos lados miden 6 cm, 3 cm y 2 cm.



¡No se puede construir! En este caso:

a no es menor que $b + c$
a no es mayor que $b - c$

Este contraejemplo nos valida la siguiente propiedad:

En todo triángulo se cumple que cualquier lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Observa con interés el video que muestra propiedades de los triángulos que ya has verificado. Comenta con tus compañeros(as) las ideas que consideres más importantes.

Continúa trabajando con tu equipo para resolver los siguientes ejercicios.

1. En un triángulo rectángulo que también es isósceles, ¿cuánto mide cada uno de sus otros dos ángulos?

2. ¿Puede tener un triángulo equilátero un ángulo de 70°? ¿Por qué? Explica.

3. Dibuja un triángulo cualquiera. Mide sus ángulos y sus lados y verifica.

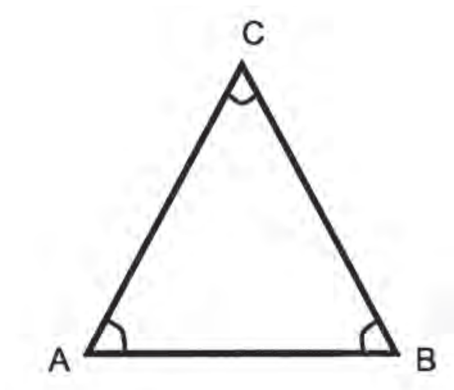
a) Al lado mayor se opone el ángulo mayor.

b) Al lado menor se opone el ángulo menor.

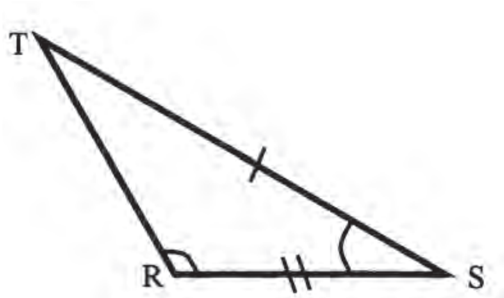
c) La suma de la longitud de dos de sus lados es mayor que la longitud del otro lado.

d) La diferencia de las longitudes de dos de sus lados es menor que la longitud del tercer lado.

Observa las figuras y los datos que se dan en cada una y completa individualmente los siguientes razonamientos.



a) Si $\measuredangle$ A = $\measuredangle$ B, entonces
¿cómo son AC y BC?
¿Cómo es el $\triangle$ABC?



b) Si ST > RS, entonces
¿qué relación puedes establecer entre $\measuredangle$ R y $\measuredangle$ T?

Compara tus respuestas con las de la clave; si no coinciden trata de encontrar la falla y consulta con tu profesor(a).

CLAVE:

a) Si ∢ A = ∢ B, entonces AC > BC son iguales, por lo tanto, △ABC es **isósceles**. b) Si ST > RS entonces ∢ R es **mayor** que ∢ T.

69 ¡EL ROMPECABEZAS DESTACADO!

101-3

Teorema de Pitágoras
Justificación del teorema de Pitágoras

En todo triángulo se cumple una importante propiedad que se conoce con el nombre de **Teorema de Pitágoras.**

Con tu grupo de trabajo haz la siguiente construcción.

Dibuja un triángulo rectángulo cuyos catetos midan 6 cm y 8 cm respectivamente.

¿Cuánto mide el otro lado (hipotenusa) del triángulo?

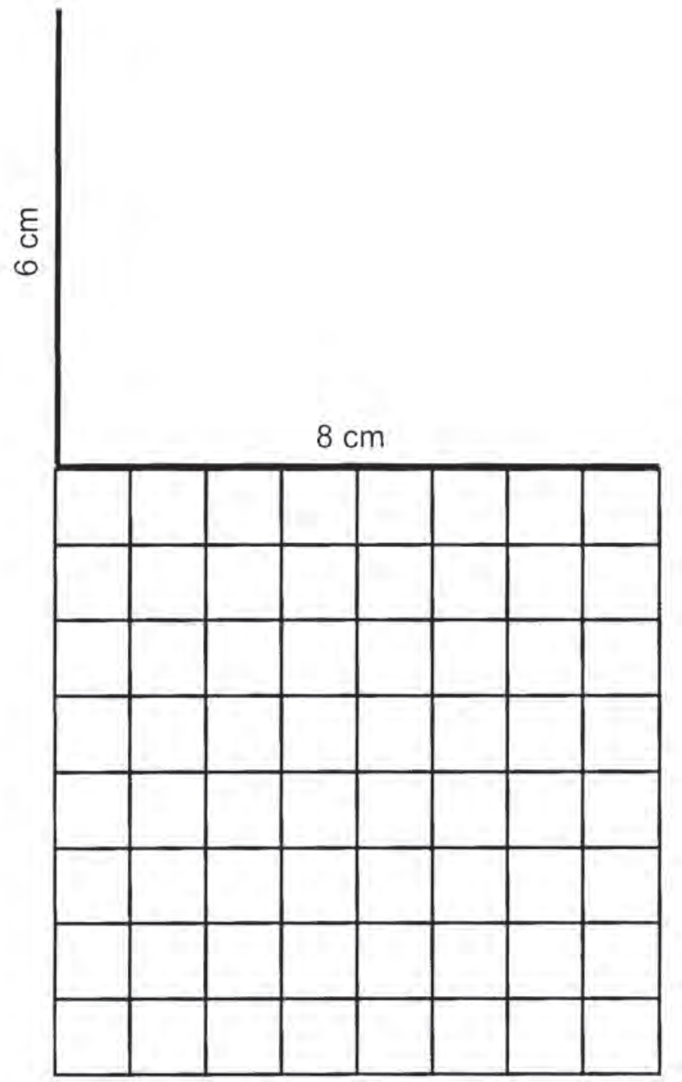
Construye en papel cuadriculado un cuadrado sobre cada uno de los lados del triángulo.

Si señalas la cuadrícula en cm te permite expresar el área de cada cuadrado.

Suma el área de los cuadrados construidos sobre los catetos y compara esta suma con el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

¿Cómo resulta esta comparación?

¿Crees que se mantendrá esta relación para cualquier triángulo rectángulo?



Comparte tus hallazgos con los encontrados en otros grupos.

Observa con interés el video, mediante el cual conocerás una relación muy interesante entre las medidas de los lados de cualquier triángulo rectángulo. Al terminar, comenta con tus compañeros(as) y profesor(a) las ideas más importantes.

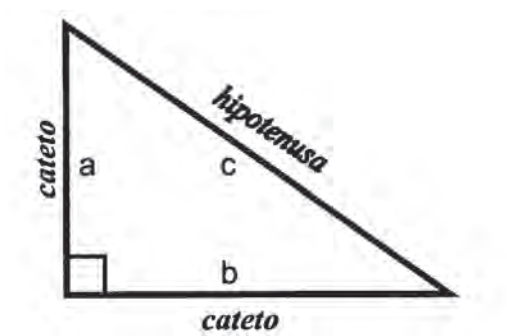
Invita a tu grupo para hacer la siguiente lectura y a la vez realiza las construcciones sugeridas.

TEOREMA DE PITÁGORAS

Pitágoras fue un filósofo nacido en Samos hacia el siglo VI a.C., sus obras fueron fundamentales para las matemáticas, aunque también muy importantes sus aportes en el campo de la filosofía. Autor de famosos legados, entre ellos el teorema que lleva su nombre.

El teorema de Pitágoras establece la relación que existe entre las medidas de los lados de los triángulos rectángulos:

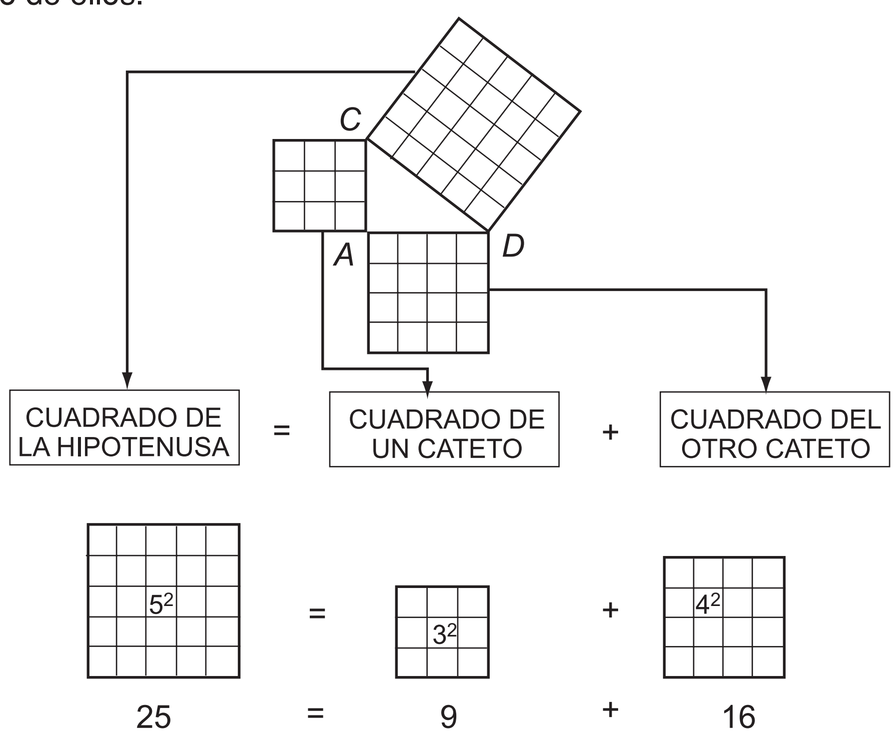
En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Existen diferentes formas de comprobar este teorema; la más sencilla es por equivalencia de áreas, como la que realizaste al comenzar esta sesión.

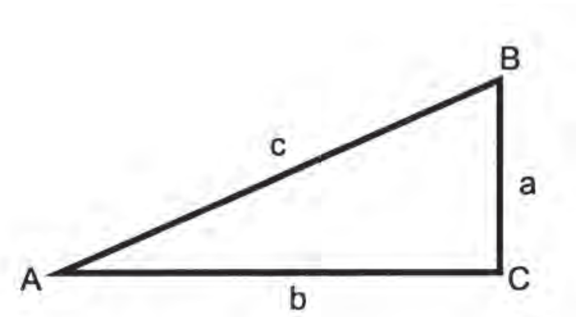
En el triángulo rectángulo ABC cuyos lados miden 3, 4 y 5 unidades, se dibuja un cuadrado sobre cada uno de ellos.



Observa que el cuadrado de la medida del lado mayor (hipotenusa) es equivalente a la suma de los cuadrados de las medidas de los lados menores (catetos).

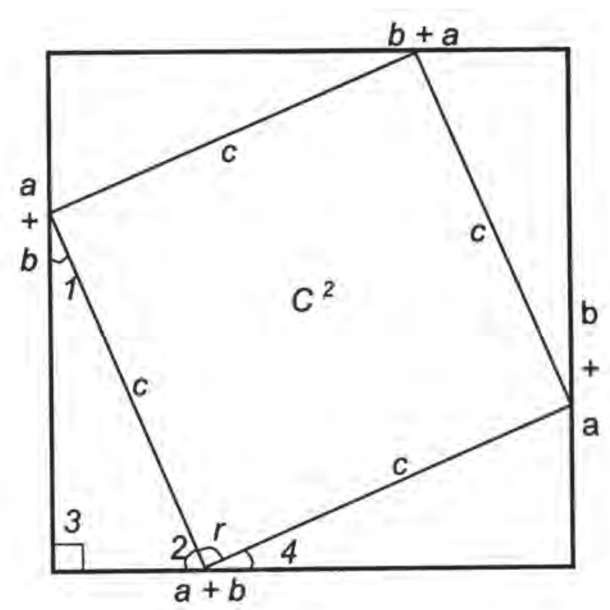
Se ha comprobado el teorema para dos triángulos particulares. Ahora se demostrará para todo triángulo rectángulo:

Sea el triángulo rectángulo ABC con **a** y **b** catetos y **c** la hipotenusa.



Hay que demostrar que $a^2 + b^2 = c^2$.

Se traza un cuadrado con una longitud **a + b** en cada uno de sus lados, y en su interior cuatro triángulos rectángulos congruentes cuyos catetos sean **a** y **b** y una hipotenusa la longitud **c**.



Los ángulos 1 y 2 suman 90º por ser ángulos de un triángulo rectángulo:

$\measuredangle 1 + \measuredangle 2 = 90^\circ$

Los ángulos 2, 4 y **r** suman 180º por formar un ángulo colineal o llano:

$\sphericalangle 2 + \sphericalangle r + \sphericalangle 4 = 180^{\circ}$

Los ángulos 1 y 4 son iguales por ser homólogos:

$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 4$ y como $\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 = 90^{\circ}$, entonces $\sphericalangle 4 + \sphericalangle 2 = 90^{\circ}$, por lo tanto $\sphericalangle r = 90^{\circ}$.

Esto sucede con los cuatro ángulos del cuadrilátero; entonces es un cuadrado. Dado que el todo es igual a la suma de sus partes, se tiene:

$$\underbrace{(a+b)^2}_{\substack{\text{Área del cuadrado}\\ \text{con lado } a\,+\,b}} = \underbrace{c^2}_{\substack{\text{Área del cuadrado}\\ \text{con lado } c}} + \underbrace{4\left[\frac{a\,b}{2}\right]}_{\substack{\text{Área de los}\\ \text{4 triángulos}}}$$

y como $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, entonces:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 4\left[\frac{ab}{2}\right]$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

Restando a ambos miembros 2ab, se tiene:

$$a^2 + 2ab - 2ab + b^2 = c^2 + 2ab - 2ab$$

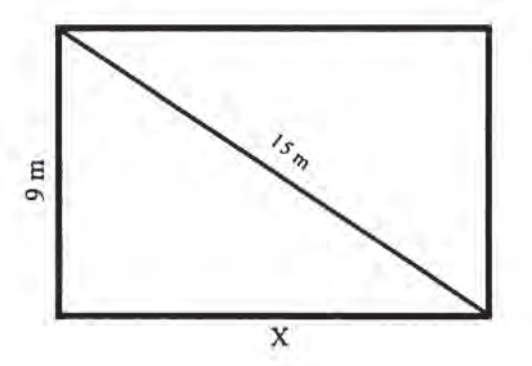
$$a^2 + b^2 = c^2$$

que es lo que se quería demostrar.

Si en un triángulo rectángulo se sabe la medida de dos de sus lados, la medida del tercero se obtendrá al aplicar este teorema.

Con tus compañeros(as), resuelve en tu cuaderno.

La diagonal de un terreno rectangular mide 15 m y de ancho mide 9 m; ¿cuánto medirá el largo del terreno?



Compara tu resultado con el de otros grupos.

Aplica el teorema de Pitágoras para realizar individualmente en tu cuaderno los siguientes problemas.

a) La base de un triángulo isósceles mide 36 cm y su altura 24 cm; ¿cuánto mide uno de sus lados iguales?

b) Calcula la altura de una pared donde ha sido recargada una escalera de 6 m de largo que llega hasta lo alto de ésta. Se sabe que la distancia entre la escalera y la pared es de 1.90 m.

Coteja tus resultados con la clave siguiente. Si tienes dudas, trata de resolverlas. Recuerda que de los errores se aprende bastante en cuanto descubrimos la manera de corregirlos.

CLAVE:

a) Cada uno de los lados iguales mide 30 cm. b) La altura de la pared es 5.69 m.

70

SIEMPRE PARALELOS

102-3

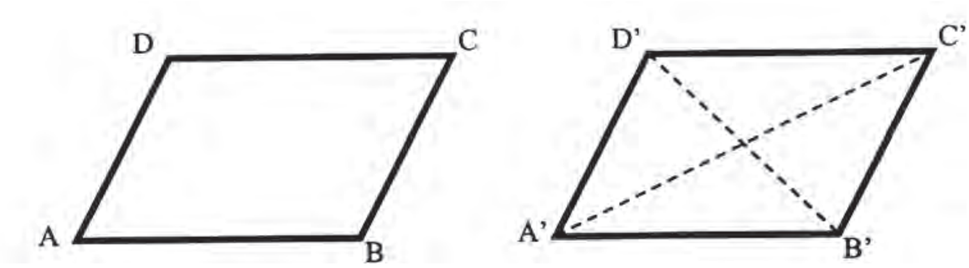
Propiedades de los paralelogramos
Conocimiento de las propiedades de los paralelogramos

El cuadrado, el rectángulo, el rombo y el romboide son cuadriláteros de diferente forma; sin embargo, tienen una característica común: sus lados opuestos son paralelos. Por ello se llaman paralelogramos. En esta sesión estudiarás sus principales propiedades.

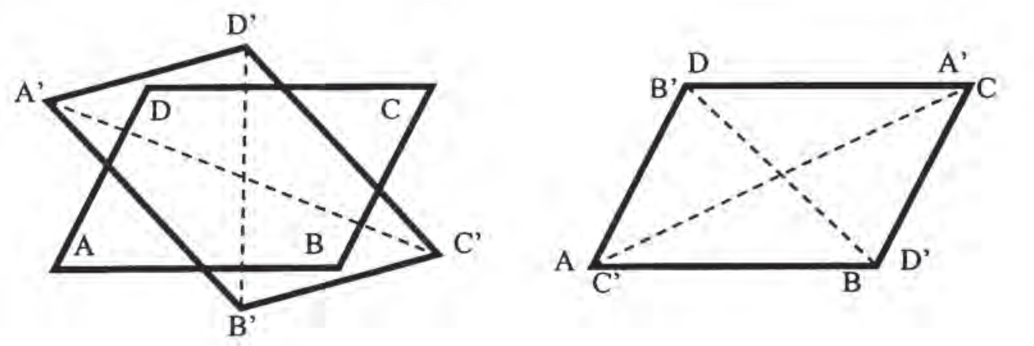
Observa el video, que te mostrará algunas de las propiedades de los paralelogramos. Al terminar, intercambia opiniones sobre el tema con tus compañeros(as) de grupo.

Con tus compañeros(as) comprueba algunas de las propiedades de los paralelogramos.

1. Construye dos modelos de paralelogramos como los de la figura, que sean congruentes.



En uno de ellos traza las diagonales y recórtalo para que lo superpongas y haciendo centro de rotación en el punto de corte de las diagonales, hagas un giro de 180°.



Observa cómo los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes con los lados $\overline{C'D'}$ y $\overline{A'B'}$ del segundo paralelogramo. Esto es:

$$\overline{AB} \cong \overline{C'D'} \quad y \quad \overline{CD} \cong \overline{A'B'}$$

y que también:

$$\overline{AD} \cong \overline{C'B'} \quad y \quad \overline{BC} \cong \overline{D'A'}$$

Se puede entonces concluir que:

Los lados opuestos del paralelogramo son congruentes.

Ahora, respecto a los ángulos se puede notar que

$$\sphericalangle A \cong \sphericalangle C' \quad y \quad \sphericalangle B \cong \sphericalangle D$$

Pero como se trata de dos paralelogramos congruentes sabemos que

$$\sphericalangle C' \cong \sphericalangle C \quad y \quad \sphericalangle D' \cong \sphericalangle D$$

Este hecho nos permite afirmar que:

$$\sphericalangle A \cong \sphericalangle C \quad y \quad \sphericalangle B \cong \sphericalangle D$$

Además sabemos que $\sphericalangle A$ es opuesto a $\sphericalangle C$ y que $\sphericalangle B$ es opuesto a $\sphericalangle D$.

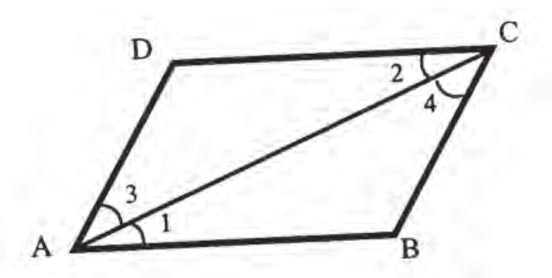
Es decir que:

Los ángulos opuestos de un paralelogramo son congruentes.

y, al generalizar estas dos afirmaciones concluimos que:

Los lados y los ángulos opuestos de todo paralelogramo son congruentes entre sí.

El anterior hecho es una comprobación de la propiedad de los paralelogramos que también se puede demostrar así:



Si $\overline{AC}$ es una diagonal del paralelogramo ABCD, trazada como ayuda, entonces $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ y $\measuredangle B \cong \measuredangle D$.

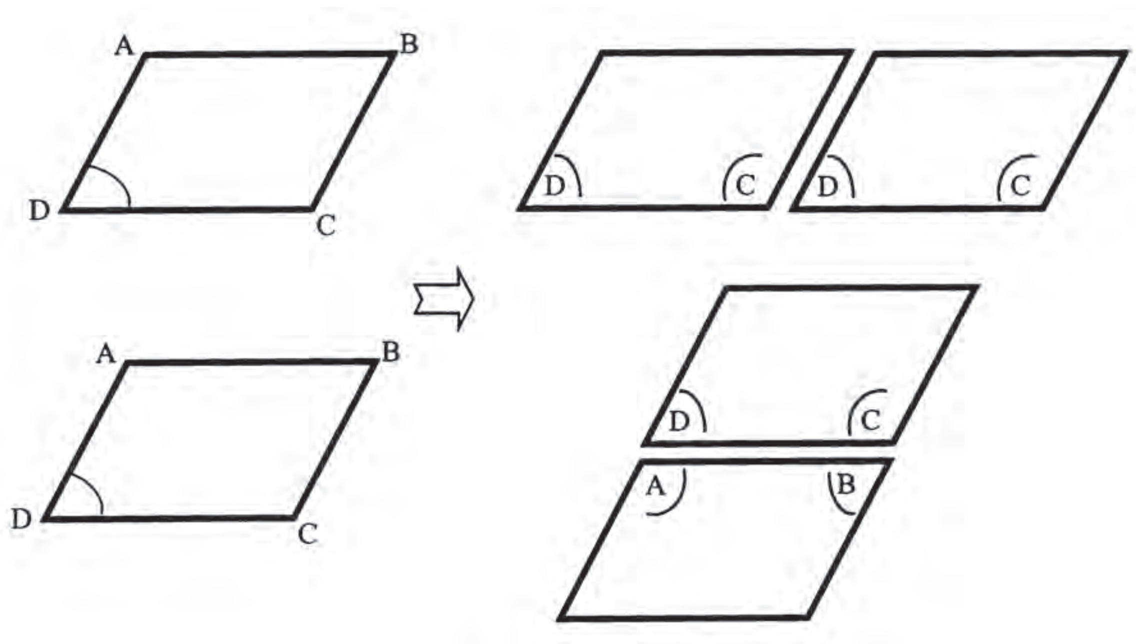
Analiza las afirmaciones y las razones que se dan para ello:

Afirmamos	**Por esta razón**
$\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$	Porque son ángulos alternos internos entre paralelas $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$
$\measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$	También por la razón anterior ya que
$\overline{AD} \cong \overline{AC}$	Porque todo segmento es congruente con él mismo.
$\Delta ABC \cong \Delta ADC$	Estos dos triángulos son congruentes porque tienen un lado y los dos ángulos adyacentes congruentes.
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ $\measuredangle B \cong \measuredangle D$	Porque son elementos homólogos de triángulos congruentes.

De esta manera se demuestra que: en todo paralelogramo los lados y los ángulos opuestos son congruentes.

2. ¿Qué podemos decir de los ángulos consecutivos en un paralelogramo?

Si usas los modelos de paralelogramos congruentes y los colocas convenientemente como indican las figuras, puedes contestar la pregunta:



¿Qué ángulo forman ∢ C y ∢ D, o, ∢ A y ∢ D, o, ∢ C y ∢ B?

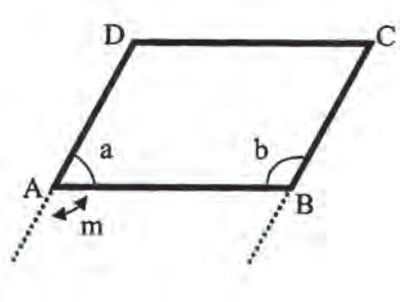
¡Forman un ángulo colineal o llano!

Los ángulos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios; es decir, sus medidas suman 180º.

Mira qué fácil resulta demostrar la anterior propiedad:

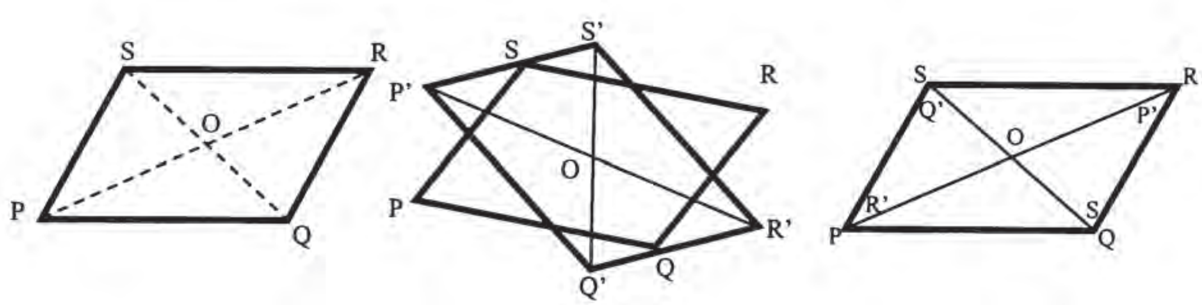
Si ABCD es un paralelogramo, entonces ∢ a + ∢ b = 180º.

Prolongamos los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ como trazos auxiliares.

Afirmamos		**Por esta razón**
	$\sphericalangle a + \sphericalangle m = 180^\circ$	Porque forman un ángulo llano.
	$\sphericalangle m = \sphericalangle b$	Porque son ángulos alternos entre paralelas $\overline{AD} \,//\, \overline{BC}$.
	$\sphericalangle a + \sphericalangle b = 180^\circ$	Si se sustituye $\sphericalangle m$ por $\sphericalangle b$, que son iguales.

3. Otra propiedad de los paralelogramos tiene que ver con la forma en que se cortan las diagonales.

Vuelve a efectuar una rotación de 180º con dos paralelogramos congruentes, tomando



como centro el punto **O** (donde se cruzan las diagonales).
Nota que las diagonales de los paralelogramos PQRS y P'Q'R'S' se superponen. Por lo tanto:

$$\overline{PO} \cong \overline{OR'}\ ;\ \overline{QO} \cong \overline{OS'}$$

Pero también sabemos que

$$\overline{OR'} \cong \overline{OR}\ ;\ \overline{OS'} \cong \overline{OS}$$

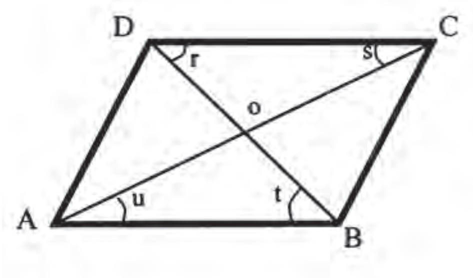
entonces, reemplazando:

$$\overline{PO} \cong \overline{OR}\ ;\ \overline{QO} \cong \overline{OS}$$

Por lo tanto se puede decir que:

En todo paralelogramo las diagonales se dividen mutuamente en partes iguales.

Esta propiedad también se puede demostrar con base en la congruencia de triángulos.

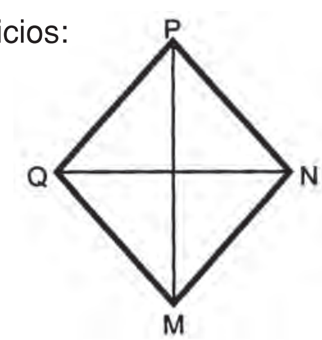


Si $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$ son diagonales del paralelogramo ABCD, entonces $\overline{AO} \cong \overline{OC}$ y $\overline{DO} \cong \overline{OB}$

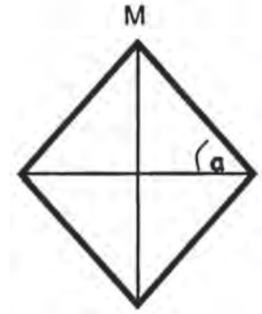
Afirmamos	**Por esta razón**
$\measuredangle u = \measuredangle s$	Porque son ángulos alternos internos entre paralelas.
$\overline{AB} \cong \overline{DC}$	Porque son lados opuestos de un paralelogramo.
$\measuredangle t = \measuredangle r$	Porque son ángulos alternos internos entre paralelos.
$\Delta AOB \cong \Delta DOC$	Porque son triángulos congruentes por tener un lado y los ángulos adyacentes congruentes.
$\overline{AO} \cong \overline{OC}$ y $\overline{DO} \cong \overline{OB}$	Son elementos homólogos de triángulos congruentes.

Y esto último es lo que se quería demostrar.

Con tus compañeros(as) de equipo resuelve los ejercicios:

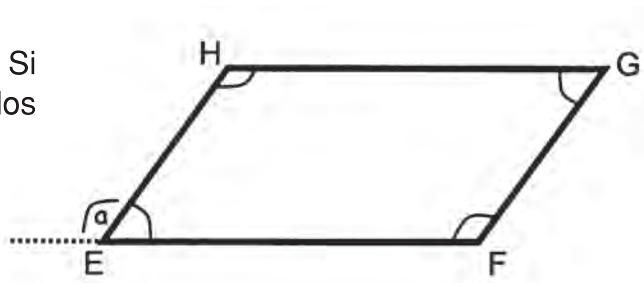


1. Si las diagonales de un rombo miden 60 y 80 cm, ¿cuánto miden sus lados y cuánto su perímetro?



2. Si el ángulo *a* en un rombo mide 45°, ¿por qué puedes asegurar que este rombo es un cuadrado?

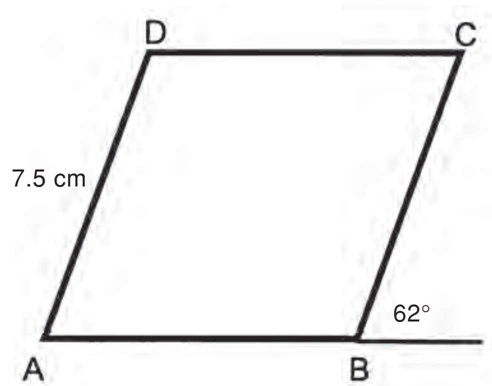
3. La figura EFGH es un paralelogramo. Si a = 110°, ¿cuánto mide cada uno de los ángulos ∢ E , ∢ H, ∢ G, ∢ F?



Compara tus resultados con los de otro grupo.

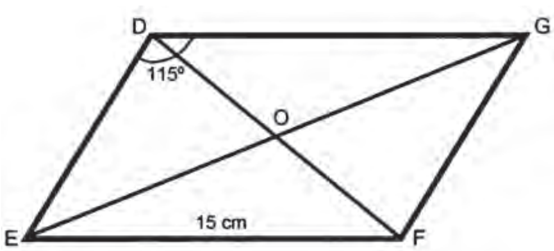
Considera las propiedades de los paralelogramos para calcular individualmente el valor de los lados y los ángulos que se piden. Hazlo en tu cuaderno.

a) ABCD es un paralelogramo cuyo perímetro es 35 cm. ¿Cuánto mide?



1. $\overline{AB}$
2. $\overline{BC}$
3. $\overline{CD}$
4. ∢ DAB
5. ∢ ABC
6. ∢ BCD
7. ∢ CDA

b) En el paralelogramo DEFG el ∢ D = 115°.



1. ¿Cuánto mide el ∢ E?
2. ¿Cuánto suman ángulos consecutivos, como ∢ F y ∢ G?
3. ¿Cómo son los ángulos opuestos?
4. Si DO = 3.6 cm, ¿cuánto mide $\overline{OF}$.
   Si EO = 5.2 cm, ¿cuánto mide $\overline{OG}$.

Compara tus respuestas con la clave. Si tienes dudas consulta.

CLAVE:

a) 1. AB = 10 cm; 2. BC = 7.5 cm; 3. CD = 10 cm; 4. ∢ DB = 62°; 5. ∢ ABC= 118°;
6. ∢ BCD = 62°; 7. ∢ CDA = 118°.

b) 1. 65° ; 2. 180° ; 3. iguales; 4. 3.6 cm, 5.2 cm.

71

104-3

A LA MISMA DISTANCIA

Aplicación de las propiedades de los paralelogramos
Ejercicios de aplicación

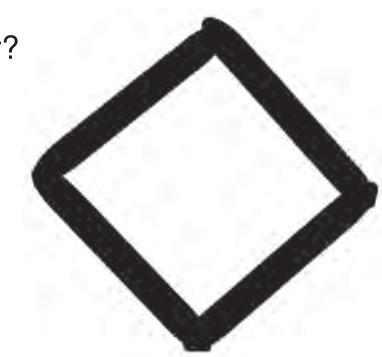
Ahora que ya conoces las propiedades de los paralelogramos, te será más fácil resolver problemas geométricos.

Observa en el video algunas aplicaciones de estas propiedades. Comenta en tu grupo cuál fue la idea principal expresada en él.

Trabaja con tus compañeros(as) de grupo, para construir cuadriláteros paralelogramos.

1. Con cuatro palos de igual longitud (de balso, como los de paletas) y cuatro chinches para unirlos en los extremos arma un paralelogramo.

- ¿Cuántos de estos paralelogramos puedes construir?
- ¿Cómo llamarías estos cuadriláteros? ¿Por qué?
- ¿Puedes en algún momento tener un cuadrado?
- ¿Consideras que podría decirse que un cuadrado también es un rombo? ¿Por qué?



- ¿Cómo es el perímetro de todos los paralelogramos que puedes armar en este ejercicio?

2. Ahora elige dos palos de igual longitud y otros dos también de igual longitud, pero diferentes a la primer pareja.

- ¿Cuántas figuras diferentes puedes armar?
- ¿Cómo llamas a cada una de estas figuras?

- ¿Puedes en algún momento armar un rectángulo?, ¿bajo qué condición?
- ¿Qué magnitud es común a todos los cuadriláteros que puedes ensamblar, en este caso?
- ¿Por qué puedes considerar al rectángulo como un romboide?
- ¿Son todos los romboides también rectángulos?

Discute tus respuestas con otros grupos. Si no hay acuerdos consulten con su profesor(a).

72 LÍNEAS EN UNA CURVA PERFECTA

105-3

Rectas y segmentos en el círculo
Identificación de las rectas y segmentos en el círculo

El círculo es una figura asociada a muchos de los objetos que nos rodean: en las ruedas de un carro, en la forma de una pelota, en una moneda, en la base de un vaso y en otros más.

Observa el video. Seguramente muchas ideas expuestas ya las conoces. Atiende a los conceptos nuevos.

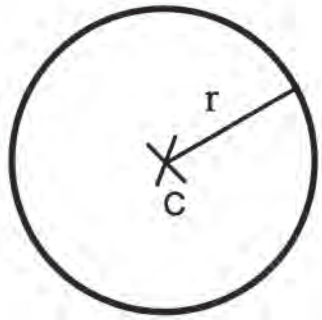
Con un compañero(a) de grupo lee, comenta y analiza:

RECTAS Y SEGMENTOS RELACIONADOS CON EL CÍRCULO

La utilización de objetos de forma circular en la vida cotidiana tiene su origen en la antigüedad. A los babilonios se les atribuye la invención de la rueda y quizá debido a esto se dedicaron a estudiar las propiedades de la circunferencia.

Es importante precisar conceptos a cerca del círculo y de la circunferencia.

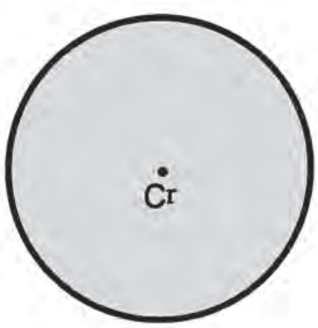
¿Cómo dibujas una circunferencia? ¿Qué hace que tu dibujo sea una circunferencia?



Sean el punto C y la distancia **r**, entonces los puntos que equidistan de C forman una línea que es la circunferencia.

Así se puede definir la circunferencia.

Se llama circunferencia al conjunto de puntos que equidistan de otro punto llamado centro.

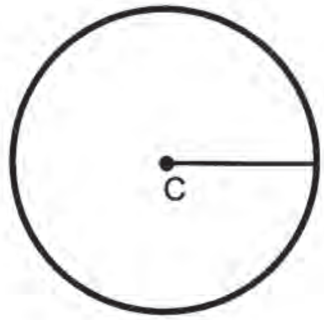


El círculo es el conjunto de puntos que integran la parte interior de la circunferencia; esto es, la parte que está sombreada en la figura. Y se define:

El círculo es el conjunto de puntos limitados por la circunferencia.

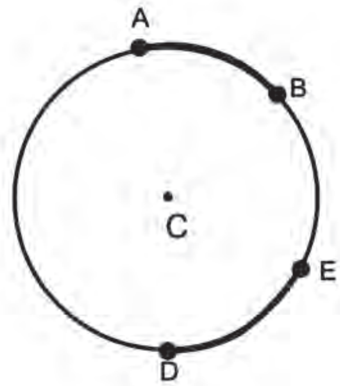
Algunos segmentos o líneas relacionados con el círculo son:

1. **Radio.** Es el segmento de recta que une el centro con un punto de la circunferencia.

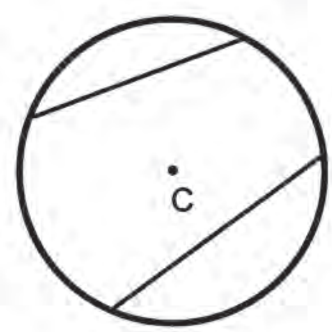


2. **Arco.** Es una parte de la circunferencia; se denota con sus dos puntos extremos y el símbolo.

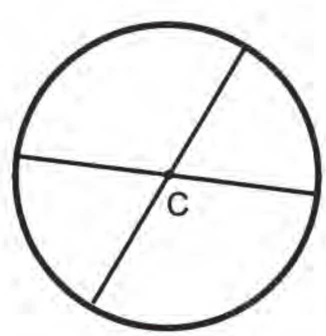
$\overset{\frown}{AB}$ Se lee "arco a be"
$\overset{\frown}{AD}$ Se lee "arco de e"



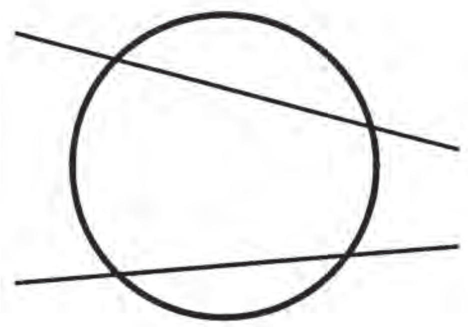
3. **Cuerda.** Es el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.



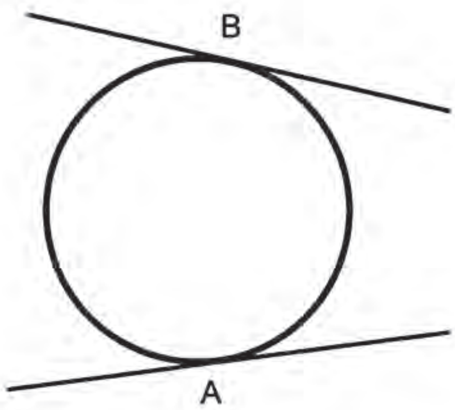
4. **Diámetro.** Es la cuerda que pasa por el centro del círculo. Dos radios son iguales a un diámetro.



5. **Secante.** Es cualquier recta que interseca a la circunferencia en dos de sus puntos.

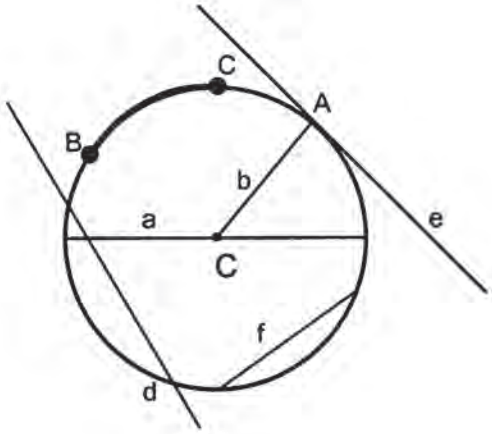


6. **Tangente.** Es la recta que toca a la circunferencia en uno de sus puntos. Tal lugar geométrico recibe el nombre de punto de tangencia.



Las líneas del círculo guardan ciertas relaciones entre sí. Algunas de ellas se verán en temas posteriores.

Con un compañero(a), observa el dibujo y contesta en tu cuaderno:



1. ¿Cómo se denota el centro del círculo?

2. ¿Cómo se llama el segmento de recta que une el centro del círculo con un punto de la circunferencia? ¿Con qué letra se denota en el dibujo?

3. ¿Cómo se llama el segmento que une dos puntos de la circunferencia? ¿Con qué letra se señala?

4. ¿Qué nombre recibe la cuerda de mayor longitud en una circunferencia? ¿Puede una de estas cuerdas no pasar por el punto C?

5. ¿Por qué una recta secante a la circunferencia determina una cuerda? Explica.

6. ¿Qué recta en el dibujo es tangente a la circunferencia? ¿Cuántos puntos de la circunferencia están sobre esa recta?

7. ¿Qué significa «arco de circunferencia»?

Compara tus respuestas con las dadas por otros compañeros(as).

Individualmente trabaja en tu cuaderno.

1. ¿Qué condición debe cumplir una cuerda en un círculo para que sea eje de simetría de la figura? ¿Por qué?

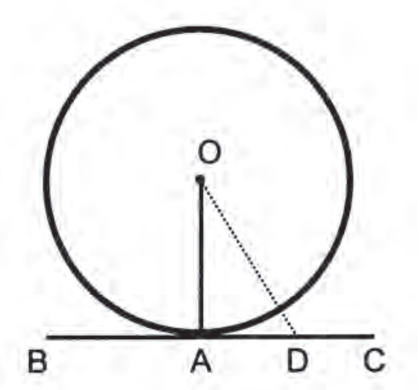
2. Si nos referimos a la circunferencia como la línea cuyos puntos equidistan de un punto considerado como centro, ¿qué condición debe cumplir un punto cualquiera que esté en el círculo?

73	**LUGAR COMÚN**
106-3	**Propiedad del radio y la tangente** **Conocimiento de la propiedad del radio y la tangente**

En esta sesión analizarás una relación importante entre el radio de una circunferencia y la recta tangente a ella.

Con tus compañeros(as) lee y analiza.

La tangente a una circunferencia es la recta que sólo tiene un punto en común con ella. Este punto se llama punto de tangencia: A.



A pertenece a la circunferencia porque $\overline{OA}$ es el radio, y es el único punto de la recta $\overline{BC}$ que pertenece a la circunferencia.

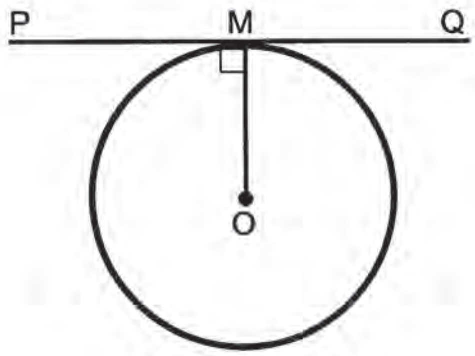
Fíjate que cualquier otro punto de la recta $\overline{BC}$, como D distará del centro más de un radio $OD > OA$. Se tiene entonces que la distancia más corta del centro a la recta es precisamente el radio, así que podemos asegurar que:

La tangente de una circunferencia es perpendicular al radio, si éste se traza desde el punto de tangencia.

Las rectas perpendiculares son aquellas que al cortarse entre sí forman cuatro ángulos de 90°. Observando el dibujo anterior se puede afirmar que:

$$\sphericalangle OAC = 90° \quad y \quad \sphericalangle OAB = 90°$$

Si a un círculo se le traza un radio **OM** y sobre el punto **M** se traza una perpendicular al radio, se puede afirmar que la línea trazada es tangente al círculo en el punto **M**, (punto de tangencia) gracias a la propiedad anterior.



Si $\overline{OM}$ es el radio y $\overline{PQ}$ es perpendicular al radio, entonces $\overline{PQ}$ es tangente del círculo, en donde **M** es su punto de tangencia.

Esto quiere decir además que desde el punto de tangencia se puede trazar sólo un radio.

Con tus compañeros(as) observa el video y comenta los aspectos que te parezcan más interesantes.

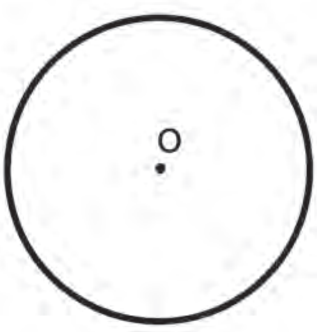
PROPIEDAD DEL RADIO Y LA TANGENTE

Reúnete en equipo y trabaja en tu cuaderno.

1. Describe un procedimiento para trazar una recta tangente a una circunferencia dada.

2. Si el punto de tangencia en tu dibujo lo llamas M, ¿por qué puedes garantizar que si eliges cualquier otro punto N, la distancia del centro a N es mayor que la distancia del centro a M? Explica.

Individualmente utiliza un dibujo como el de la figura y haz las construcciones necesarias para resolver este problema. Te dicen que hay una recta que tiene dos puntos M y N diferentes y que además OM = ON radio de la circunferencia.



¿Podrá ser la recta $\overline{MN}$ tangente a la circunferencia?

¿Cómo será la distancia de O a la recta $\overline{MN}$, comparada con la longitud del radio?

¿Cómo llamarías a la recta $\overline{MN}$ en relación con la circunferencia?

74

107-3

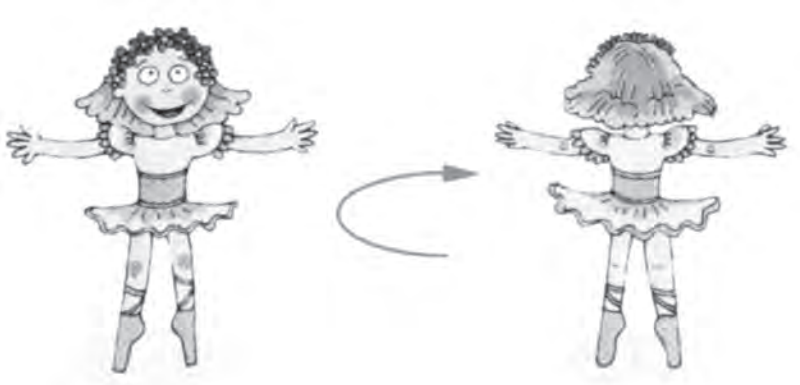
TODOS CON SU ARCO

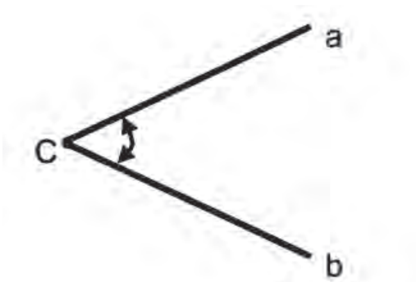
Ángulos en el círculo
Conocimiento de los ángulos en el círculo y sus medidas

Siempre que dos líneas se cortan se forma un ángulo, pero en ángulos relacionados con el círculo, ¿cómo medirlos por medio de los arcos?

Observa el video en donde verás cómo relacionar ángulos en el círculo.

Recrea el concepto que tienes acerca de qué es un ángulo. En los primeros años escolares seguramente lo relacionaste con la amplitud de un giro:





Y, posteriormente lo representaste sobre un hoja de papel como la abertura entre dos semirrectas a y b, con origen en el punto C, considerado como el vértice del ángulo.

También se puede definirse como el conjunto de puntos comprendido entre dos líneas que se cortan en un punto, en donde las líneas son los lados del ángulo y el punto en que se cortan, el vértice. Un ángulo se denota con el símbolo $\sphericalangle$ y también,

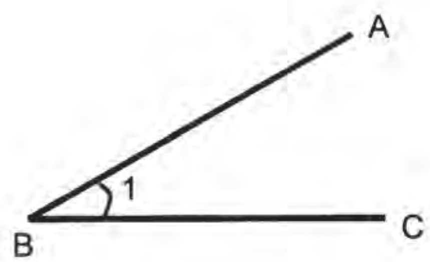
1. Con la letra del vértice.

2. Con la letra o número que está dentro de los dos lados del ángulo.

3. Con tres letras, una para cada lado y otra para el vértice del ángulo, poniéndose la letra asignada al vértice entre las otras dos.

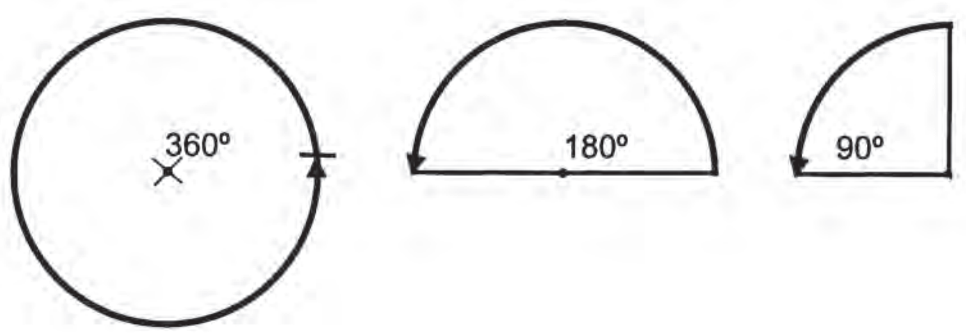
Ejemplo:

El ángulo se denota como:



∢ B
∢ 1
o ∢ ABC

La cultura babilónica dividió la circunferencia en 360 partes iguales llamadas grados, medida que sigue siendo utilizada en la actualidad. Por lo tanto, la circunferencia es un arco que mide una vuelta completa y su valor es 360°; la mitad de la circunferencia mide 180° y la cuarta parte 90°, etc.



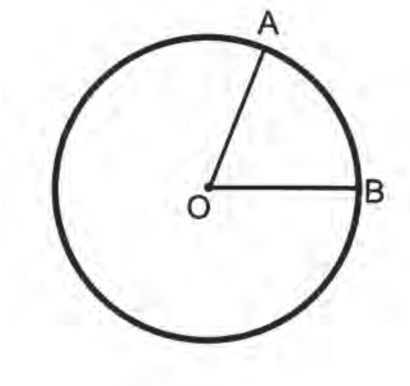
Trabaja con tu equipo

Dentro del círculo se pueden considerar diferentes ángulos, según sea la posición de sus lados.

Ángulo central: Es el formado por dos radios del círculo. Su vértice es el centro del círculo.

La medida de un ángulo central es igual a la medida —en grados— del arco que comprenden sus lados.

Ejemplo:

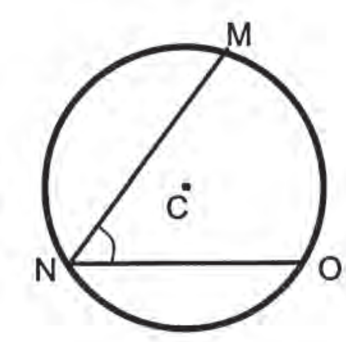


Si $\overset{\frown}{AB} = 80°$
Entonces $\measuredangle$ AOB = 80°

Por lo tanto, cualquier ángulo central AOB mide lo mismo que la medida en grados del arco que lo subtiende:

$$\measuredangle AOB = \overset{\frown}{AB}$$

Ángulo inscrito: Es aquel cuyo vértice es un punto de la circunferencia y sus lados dos cuerdas.



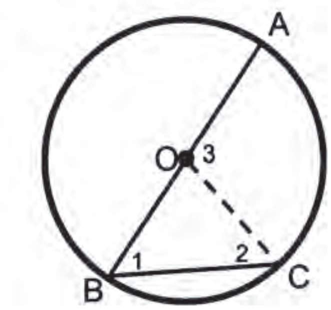
En el video se mostró que la medida del ángulo inscrito, como $\measuredangle$ MNO es la mitad de la medida del ángulo central $\measuredangle$ MCO. Así si $\measuredangle$ MCO = 90° entonces $\measuredangle$ MNO = 45°. ¿Estás convencido de este hecho? ¿Consideras que sería interesante poderlo demostrar?

Sigue el razonamiento según la situación planteada en el dibujo de la página que sigue.

El ángulo central es $\measuredangle$ AOC.

El ángulo inscrito es $\measuredangle$ ABC.

¿Cuál es el arco común a estos dos ángulos?



Observa que en el $\triangle BOC$, el $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$.

¿Sabes por qué son iguales estos ángulos?

¿Cómo son los lados $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$? ¿Por qué?

El $\triangle BOC$ es isósceles porque $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ son radios.

Ahora te darás cuenta que $\measuredangle 3 = \measuredangle 1 + \measuredangle 2$. Porque $\measuredangle 3$ es el ángulo exterior del $\triangle BOC$ y por tanto igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes.

$$\measuredangle 3 = \measuredangle 1 + \measuredangle 2$$

Pero $\measuredangle 1 = \measuredangle 2$, entonces lo podemos reemplazar

$$\measuredangle 3 = \measuredangle 1 + \measuredangle 1$$

$$\measuredangle 3 = 2 \measuredangle 1$$

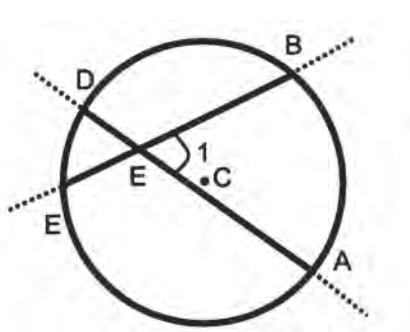
$$\frac{\measuredangle 3}{2} = \measuredangle 1$$

La mitad del ángulo central es igual al ángulo inscrito.

Ángulo interior: Es aquél cuyo vértice se encuentra en el interior del círculo.

Su medida es la mitad de la suma de la medida (en grados) de los arcos comprendidos entre sus lados y sus prolongaciones.

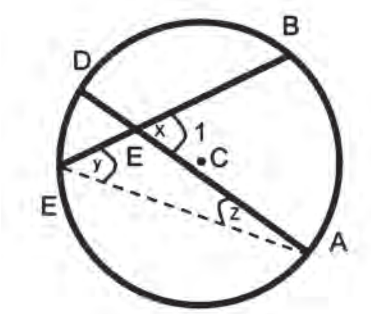
Ejemplo:



Si el ángulo central ACB que también se puede escribir como el correspondiente al arco así $\measuredangle ABC = \overset{\frown}{AB}$ mide 80° y el ángulo central $\measuredangle DCE$ o $\overset{\frown}{DE}$ mide 30° entonces el ángulo interior 1 o sea BOA mide

$$1 = \frac{80° + 30°}{2} = 55$$

Pero este hecho no lo hemos demostrado. Veamos cómo hacerlo:



Se considera el ΔEOA. En él $\measuredangle\, y + \measuredangle\, z = \measuredangle\, x$
Porque $\measuredangle$ x es externo

Pero si observas:

$\measuredangle\, y = \frac{1}{2}$ porque es el ángulo inscrito al

ángulo central $\measuredangle$ BCA $\measuredangle\, z = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$ porque es

el ángulo inscrito al ángulo central $\measuredangle$ DCE.

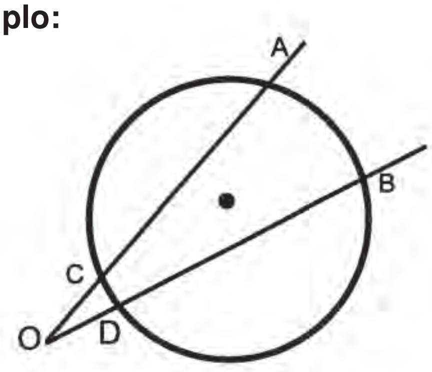
Así llegamos a que

$$\measuredangle\, x = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{BA} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$$

Ángulo exterior: Es aquel ángulo cuyo vértice se encuentra en el exterior del círculo.

Su medida es igual a la mitad de la diferencia de las medidas (en grados) de los arcos que comprenden sus lados y sus prolongaciones.

Ejemplo:



Si $\overset{\frown}{AB} = 85°$ y $\overset{\frown}{CD} = 25°$, entonces

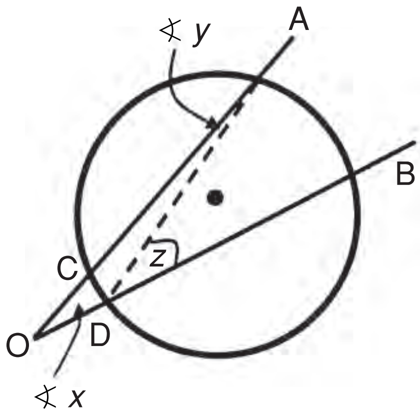
$$\measuredangle\, AOB = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

$$\measuredangle\, AOB = \frac{85° - 25°}{2}$$

$$\measuredangle\, AOB = 30°$$

Hecho que sólo nos convence si lo podemos demostrar.

Sigue la estrategia para hacerlo. Te daremos algunas ayudas para que seas tú quien complete la demostración.



El ángulo exterior es $\sphericalangle$ AOB

Se traza $\overline{AD}$ y se forma el ángulo inscrito $\sphericalangle$ ADB

En el ΔAOD se tiene que

$\sphericalangle z = \sphericalangle x + \sphericalangle y$ ¿Por qué?

Además se sabe que

$$\sphericalangle \text{ADB} = \sphericalangle z = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{\text{BA}} \qquad \text{¿Por qué?}$$

Y que

$$\sphericalangle \text{CAD} = \sphericalangle y = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{\text{CD}} \qquad \text{¿Por qué?}$$

Ahora traemos la igualdad

$$\sphericalangle z = \sphericalangle x + \sphericalangle y$$

De la que nos interesa encontrar una expresión para el ángulo exterior x

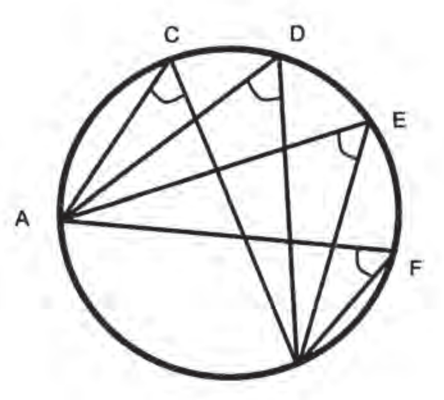
Reemplazando:

$$\sphericalangle x = \sphericalangle z - \sphericalangle y$$

$$\sphericalangle x = \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{\text{BA}} - \frac{1}{2}\,\overset{\frown}{\text{BA}}$$

Esta igualdad nos demuestra la expresión que permite encontrar el valor del ángulo exterior a una circunferencia cuando se conocen los ángulos centrales de los arcos que determinan los lados del ángulo. Estas deducciones te permiten enriquecer los conceptos desarrollados en el video.

Con tus compañeros(as) de grupo resuelve los problemas en tu cuaderno.

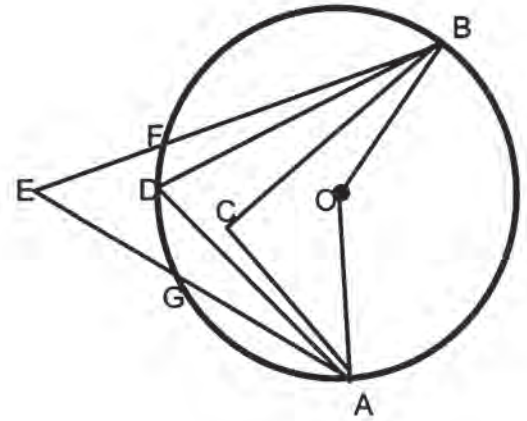


1. En el dibujo el arco $\overset{\frown}{AB}$ corresponde a la tercera parte de la longitud de la circunferencia.

¿Sabes qué tienen en común los ángulos inscritos $\measuredangle$ C, $\measuredangle$ D, $\measuredangle$ E y $\measuredangle$ F?

¿Puedes saber cuánto mide cada uno de ellos?

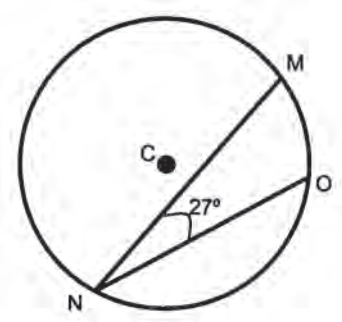
2. En el dibujo el $\overset{\frown}{AB}$ es de 140° y el $\overset{\frown}{FG}$ de 40°.



Calcula los ángulos siguientes, explica en cada caso cómo procedes y el nombre que les das en relación con el círculo de centro O.

$\measuredangle$ ACB , $\measuredangle$ ADB , $\measuredangle$ AEB

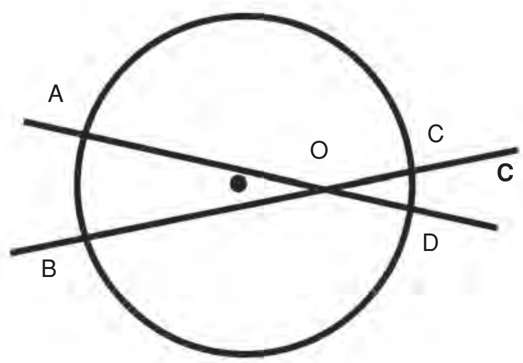
Individualmente, analiza los siguientes dibujos y resuelve las preguntas.



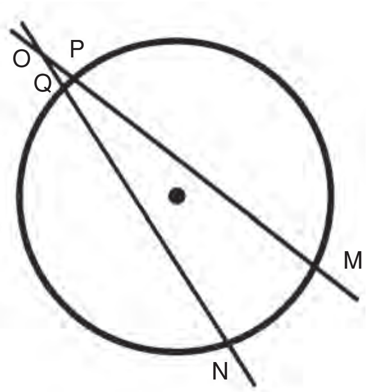
1. ¿Cómo llamarías el ∢ MNO?

¿Cuánto mide el ∢ MCO?
¿Por qué?

2. En el dibujo $\overset{\frown}{AB}$ = 30° y $\overset{\frown}{CD}$ = 14°. Calcula el ∢ AOB.
¿Por qué el ∢ AOB = ∢ COD? ¿Cómo llamas a un ángulo como ∢ AOB?



3. Cómo se denomina el ∢ MON respecto al círculo?



Si $\overset{\frown}{MN}$ = 46° y
$\overset{\frown}{QP}$ = 8°
¿Cuánto mide ∢ MON?

Verifica con la clave los resultados de tu trabajo. Si tienes dudas consulta con tu profesor(a).

CLAVE:

1. Inscrito al círculo C. ∡ MCO = 54°
2. ∡ AOB = 22°. Son ángulos opuestos por el vértice. Interior al círculo C.
3. Exterior a C. ∡ MON=19°.

75 SIGUE LOS PUNTOS

108-3

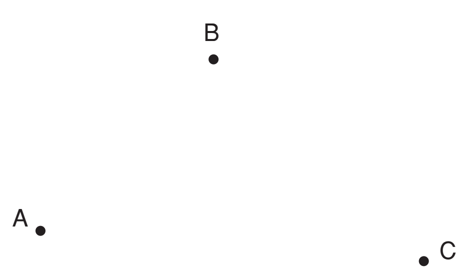
Círculo que pasa por tres puntos
Trazo de un círculo dados tres puntos

En esta sesión pondrás en juego tus conocimientos geométricos para hacer construcciones interesantes, planteadas como problemas o encrucijadas que requerirán de tu ingenio para proponer procedimientos adecuados. Usarás herramientas como la regla y el compás.

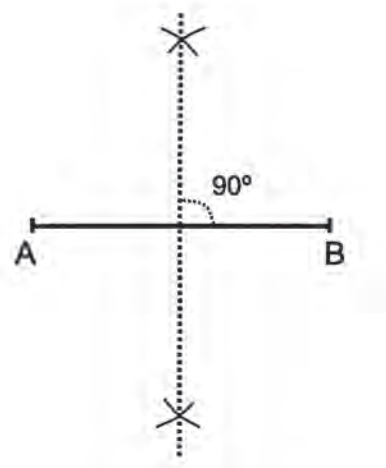
Con un compañero(a) analiza y haz las construcciones necesarias para resolver el siguiente reto.

¿Cómo determinar un círculo que pase por tres puntos arbitrarios? ¿Es posible esto?

Considera los puntos A, B y C para construir un círculo que pase por esos tres puntos no alineados.



Una ayuda en este caso consiste en aprovechar el concepto que ya has manejado de mediatriz el cual te permite encontrar todos los puntos que están a igual distancia de los extremos de un segmento dado.



Con ayuda del compás, trazando arcos de igual radio, con centro en los extremos del segmento se determina una recta cuyos puntos equidistan de A y B.

¿Cómo usar el concepto de mediatriz para resolver nuestro problema?

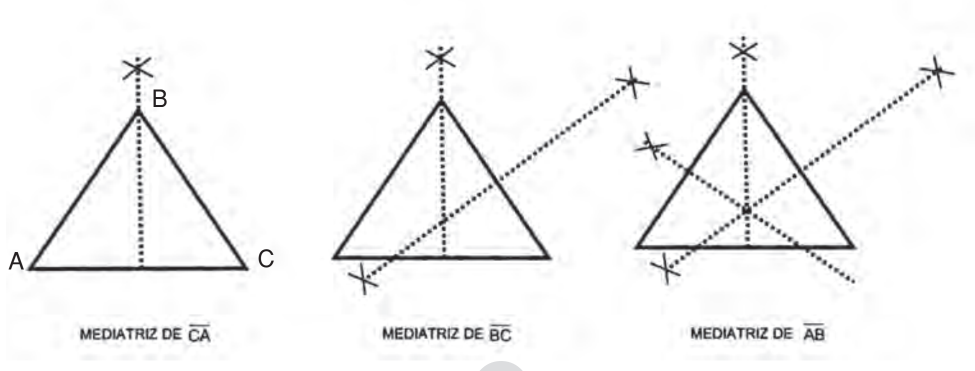
Veamos este procedimiento. Sigue las construcciones en tu cuaderno.

Traza segmentos con la regla para unir los puntos **A**, **B** y **C** y forma el triángulo ABC.

Traza las mediatrices de cada lado del triángulo ABC, como ya sabes:

Con el compás, haciendo centro primero en un extremo y luego en el otro de cada lado, se trazan con una misma abertura (mayor que la mitad del segmento) dos arcos que se corten entre sí, a uno y otro lado del segmento.

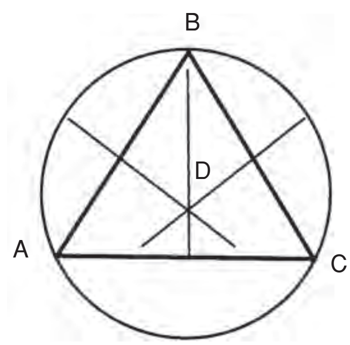
Traza la recta perpendicular al segmento, la cual es su mediatriz.



Como puedes observar, las tres mediatrices tienen un punto de intersección D, con la característica de estar a la misma distancia de A, de B y de C.

Así, el punto D se convierte en centro de una circunferencia que pasa por A, B y C, con radio igual a la distancia entre D y alguno de los puntos dados A, B o C.

El punto D conseguido de esta manera se llama **circuncentro** que nos permite construir el círculo cuya circunferencia pasa por los tres puntos A, B y C **no alinedos**.



¿Por qué no pueden ser alineados?

Discute con tus compañeros(as) qué ocurriría en ese caso.

Observa el video y comenta con tus compañeros(as) los aspectos que te parezcan más interesantes.

Con tus compañeros(as) de grupo resuelve el siguiente problema.

* Se va a construir una jardinera circular en la plaza principal de Sincerín y como puntos de referencia se dan los siguientes:

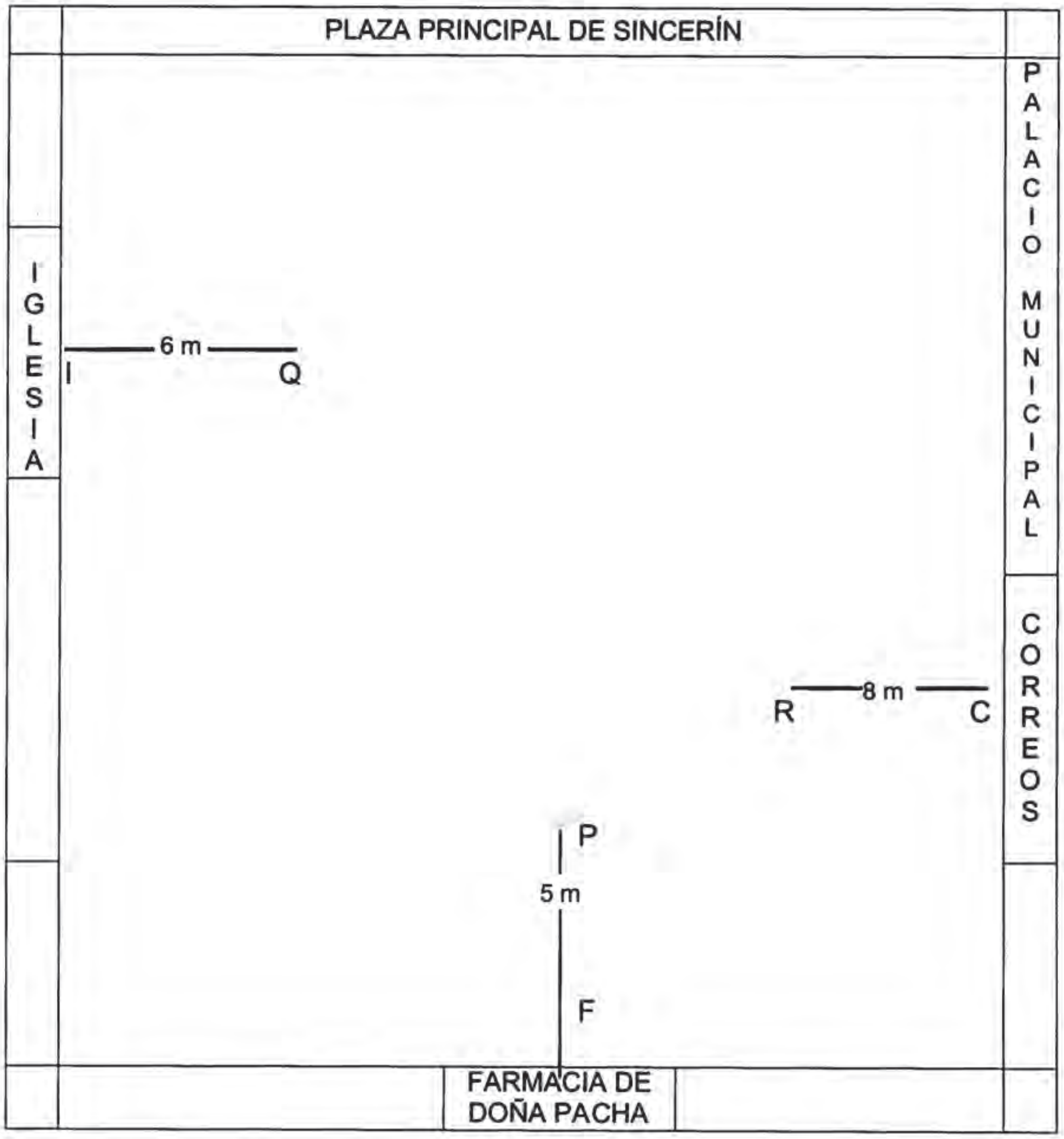
1. Que esté a 5 metros del poste de luz que está frente a la farmacia de doña Pacha (punto P).

2. A 6 metros de la reja de la entrada a la iglesia de Sincerín (punto Q).

3. A 8 metros de la entrada al correo (punto R).

Haz un croquis de la plaza principal, como el siguiente. Usa una escala adecuada y medidas que creas convenientes, sin olvidar las del problema.

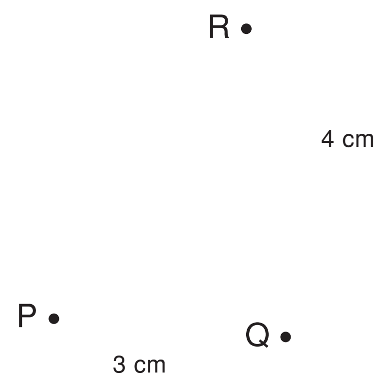
Describe el procedimiento que uses.



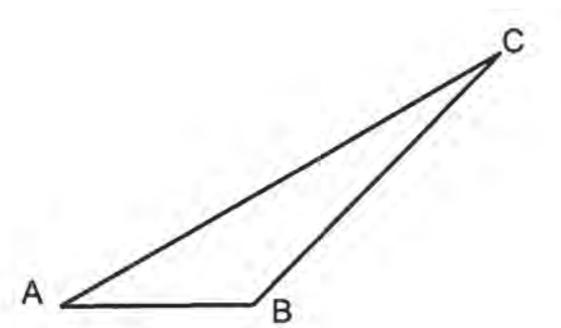
Compara tu trabajo con el de tus compañeros(as).

Resuelve el siguiente ejercicio:

1. Mide el radio del círculo que pasa por los tres puntos que se dan a continuación. La distancia entre R y Q es de 4 cm y entre P y Q es de 3 cm.



2. Da la medida del diámetro que tendrá el círculo que pasa por los vértices de un triángulo como el siguiente.

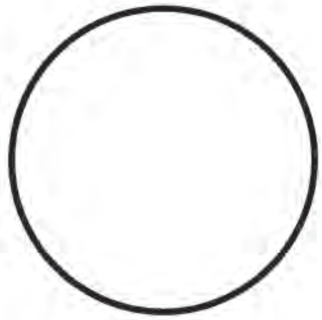


76 PUNTO DE REUNIÓN

109-3

Centro de un círculo
Ubicación del centro de un círculo teniendo el círculo o el arco

Te has preguntado ¿cómo podrías encontrar el centro de un círculo o de un trozo de arco cuando éste no se ha señalado en el dibujo?



¿Dónde está el centro?

Con tu equipo de trabajo analiza cómo resolver el problema planteado.

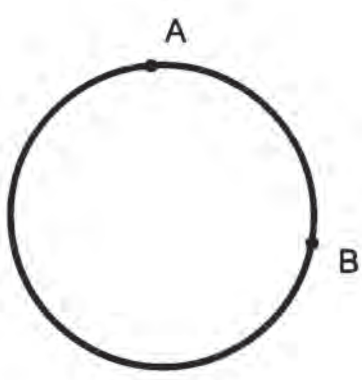
¿Tienes alguna hipótesis de cómo proceder? Discútela con tus compañeros(as).
¿Qué sabes de ese punto que llamamos centro del círculo o de la circunferencia? Aún más: de una parte o arco de circunferencia.

* Es el punto de donde parte cualquier radio.

* Por él pasa todo diámetro.

* La distancia de él a cualquier punto de la circunferencia es la misma.

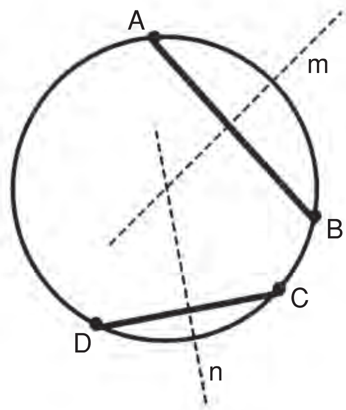
Si sobre la circunferencia escogemos dos puntos A y B, ¿dónde están todos los puntos equidistantes de A y de B?



Si trazamos la cuerda $\overline{AB}$, esos puntos están sobre la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

Alguno de estos puntos es el centro de la circunferencia.

Y, ¿cómo determinar cuál es ese punto sobre la recta m?



Escojamos otros dos puntos C y D de la circunferencia. Tracemos la cuerda y su mediatriz n.

m y n se cortan en un punto; ¿será este el centro de la circunferencia? Sabemos que el punto de corte está a la misma distancia de A, de B, de C y de D.

Usa el compás y comprueba que la distancia de este punto a cualquiera de los puntos A, B, C y D es el radio de la circunferencia.

Hemos encontrado un procedimiento par hallar la localización del centro de una circunferencia que no conocíamos, usando dos cuerdas y sus mediatrices.

Con tu grupo de trabajo, comprueba, mediante construcciones, como las realizadas anteriormente, que el procedimiento también te permite encontrar el centro de un arco, el cual desconoces.

Hazlo en tu cuaderno.

Comprueba que has encontrado el centro trazando el círculo correspondiente.

Observa, con tu grupo de trabajo el video. Comenta los aspectos que te parezcan más interesantes con tus compañeros(as).

Trabaja en tu cuaderno.

1. Dibuja una circunferencia y comprueba cómo las mediatrices a tres cuerdas cualesquiera que traces se cortan en el centro.

2. Busca un objeto circular, como una tapa o un plato. Dibuja su circunferencia. Encuentra cuánto mide su diámetro.

77 POR UN PUNTO

110-3

Tangente de un círculo
Construcción de la tangente por un punto sobre o exterior al círculo

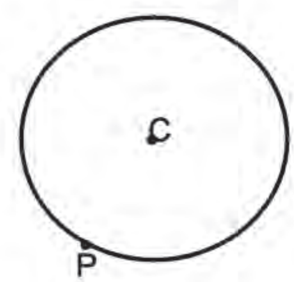
Otra construcción interesante consiste en encontrar procedimientos para trazar una tangente a un círculo.

A continuación, con tu grupo de trabajo, sigue y analiza los pasos del procedimiento:

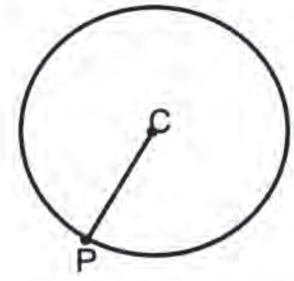
1. Un primer caso:

Si tienes la circunferencia con centro en C y un punto P sobre dicha circunferencia.

¿Cómo trazas la tangente que pase por este punto P?

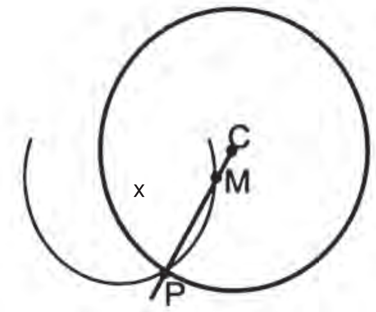


- Traza el radio $\overline{CP}$.



- Señala un punto + fuera del segmento $\overline{CP}$. Usa el compás y traza un arco con radio de + a P, que corte al radio de C en M.

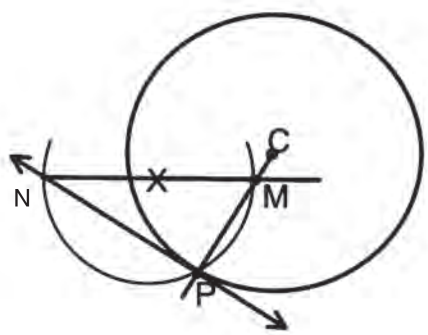
- Traza el diámetro del círculo correspondiente al arco que trazaste y que pase por M: diámetro $\overline{MN}$.



Traza el segmento $\overline{NP}$ que resulta perpendicular a $\overline{MP}$ y por tanto tangente al círculo C.

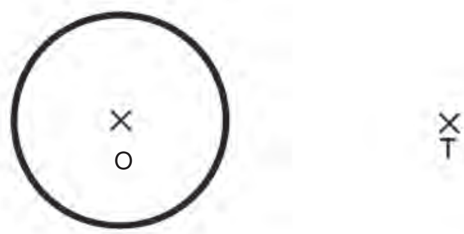
¿Por qué? ¿Qué hecho conocido te permite asegurar que el ángulo NPM es recto?

Observa qué es un ángulo inscrito y qué es el diámetro. Discute con tus compañeros de trabajo tus argumentos.

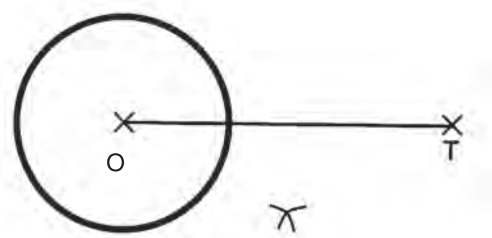


2. Otro caso puede ser que desees trazar una tangente a una circunferencia desde un punto T exterior a ella.

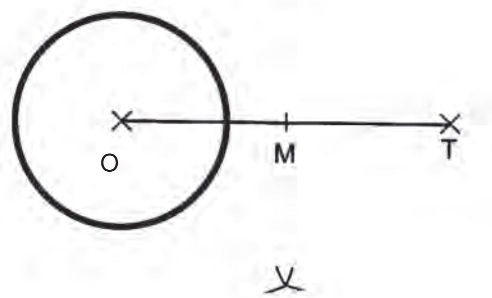
- O es el centro de la circunferencia y T el punto exterior.



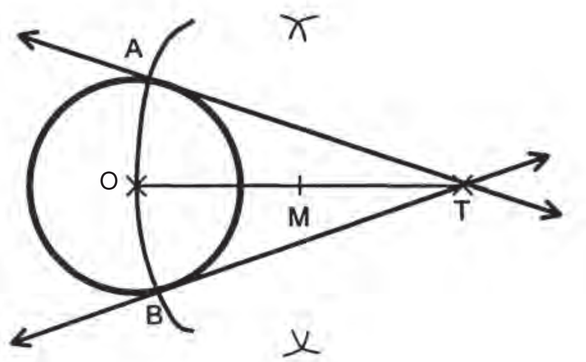
- Une el centro O con el punto T.



- Localiza el punto medio M del segmento $\overline{OT}$.



- Con centro en M y radio $\overline{OM}$ traza el arco que corte el círculo en los puntos A y B.



Traza las rectas $\overline{AT}$ y $\overline{BT}$. ¡Resultan ser tangentes a la circunferencia con centro en O!

¿Puedes encontrar una justificación de este hecho? Piensa en los ángulos:

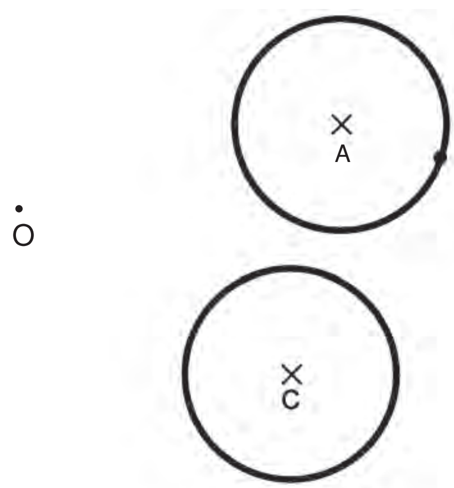
$\sphericalangle$ OAT y $\sphericalangle$ OBT con respecto al círculo de centro M y radio $\overline{AM}$ o $\overline{BM}$.

Comenta tus argumentos con tus compañeros(as) de equipo.

No sólo trazaste una tangente a la circunferencia O por el punto A, sino dos: otra por el punto B.

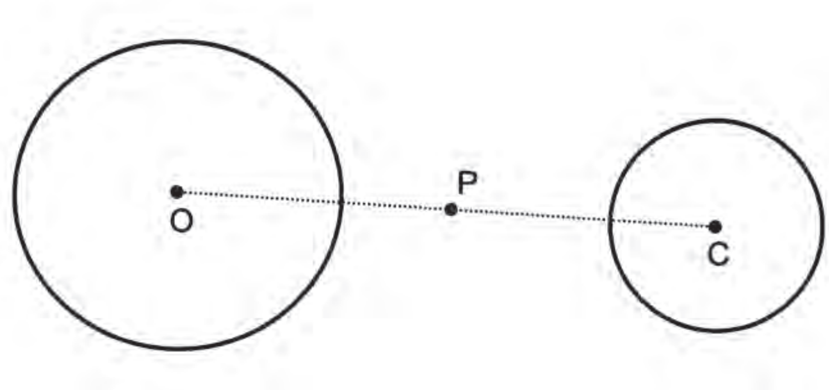
Con tus compañeros(as) de grupo observa el video. Comenta cómo has enriquecido la comprensión de los procedimientos en él señalados mediante el análisis que has hecho en las construcciones anteriores.

Trabaja en grupo y en tu cuaderno. Haz un dibujo como el sugerido y traza las tangentes a los círculos desde un punto como O.



Compara tu trabajo con el realizado por otros compañeros(as).

Individualmente traza dos circunferencias con radios diferentes. Sobre la recta que une sus centros elige un punto y desde él traza tangentes a cada una de las circunferencias.



Compara tu trabajo con el de tus compañeros(as).

78 NO PIERDAS EL COMPÁS

111-3

Trazo de círculos
Ejercicios de trazos de círculos

Nuevamente pondrás en práctica tus conocimientos para trazar círculos, con lo cual podrás dominarlos.

Con tus compañeros(as) de grupo, pon en práctica tus conocimientos y el uso de instrumentos para resolver preguntas como:

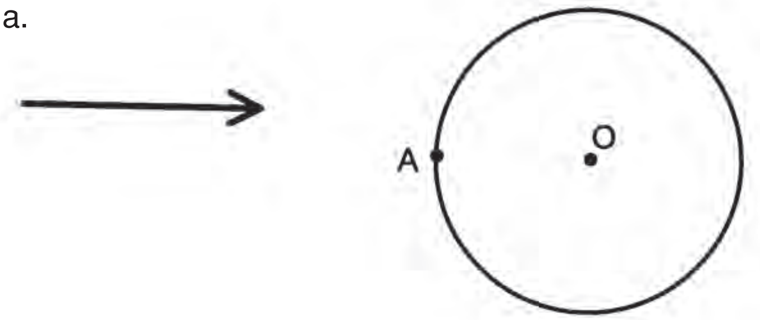
1. **Dado un punto, trazar una circunferencia que pase por ese punto.**

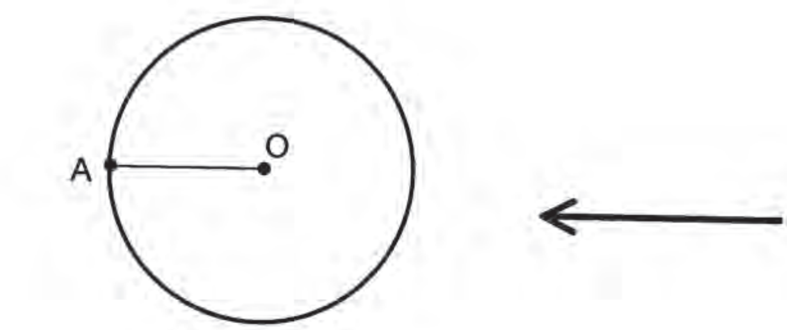
2. **Dados dos puntos, trazar una circunferencia que pase por ellos.**

Propón estrategias para desarrollar estos ejercicios. Discútelas con tus compañeros(as) antes de analizar las que desarrollaremos enseguida. Después podrás hacer comparaciones.

1. Dado un punto, trazar una circunferencia que pase por ese punto. Si se tiene un punto **A** cualquiera, se elige un punto **O** arbitrariamente.

- Con ayuda del compás se toma como centro el punto **O**, se abre hasta el punto **A** y se traza la circunferencia.



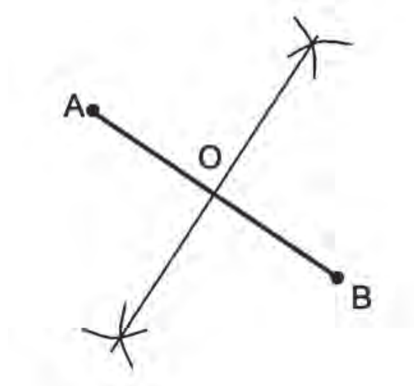


- Si se unen los puntos **A** y **O** se obtiene el radio del círculo.

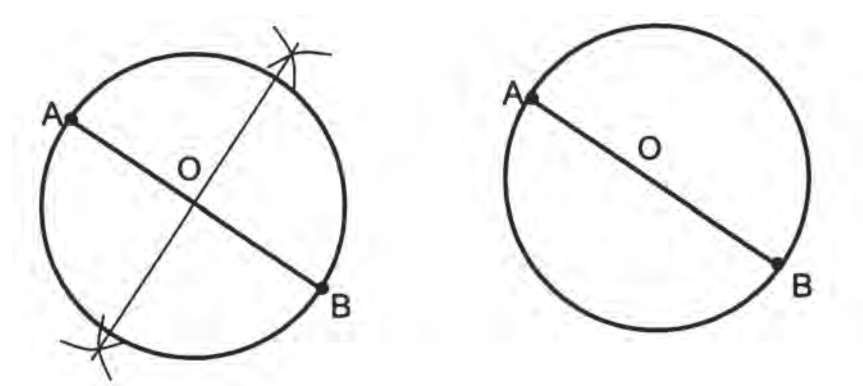
2. Dados dos puntos, trazar una circunferencia que pase por ellos.

Si se tienen dos puntos **A** y **B**, se unen dichos puntos.

- Se traza la mediatriz de $\overline{AB}$: se hace centro en el punto **A**, se abre el compás con una abertura mayor que la mitad del segmento AB y se trazan dos arcos; después se hace centro en **B** y con la misma abertura del compás se trazan otros arcos que corten a los anteriores; se unen ambas intersecciones obteniéndose así una perpendicular; el punto en donde la perpendicular corta al segmento AB se llama punto **O**.



- Se hace centro en el punto **O** y con una abertura hasta el punto **A** se traza la circunferencia, la cual pasa por los puntos **A** y **B**.



- Como se observa el segmento AB es el diámetro del círculo.

Sigue trabajando con tu equipo.

En la construcción anterior la circunferencia que pasa por los puntos A y B tiene como centro el punto O, que a su vez es punto medio de $\overline{AB}$. ¿Qué ocurre si eliges cualquier otro punto de la mediatriz y con abertura desde ese punto hasta A, o hasta B, trazas una circunferencia?

Compruébalo.

¿Pasa esa circunferencia también por A y por B?

¿Cómo llamarías el $\overline{AB}$ en relación con la circunferencia trazada.

¿Cuántas circunferencias que pasen por A y B podrías trazar, con ayuda de la mediatriz de $\overline{AB}$.

Compara tus resultados con los de otros grupos.

Observa atentamente el video para que veas la forma de trazar círculos, luego comenta con tus compañeros(as) si conoces otra forma de hacerlo, además de otros conocimientos que al respecto tengas.

Realiza tú sólo las siguientes construcciones.

1. La distancia entre los puntos A y B es de 5 cm. Traza una circunferencia que pase por ellos, pero cuyo diámetro sea mayor de 5 cm.

2. Describa varias formas de determinar el centro de la circunferencia si la cuerda dibujada es diámetro también.

Compara tus construcciones con las de tus compañeros(as).

79 COMPRENDER MÁS QUE RECORDAR ES... DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

112-3 Repaso de los conocimientos adquiridos
Integración de lo aprendido

Un medio para solucionar problemas es el geométrico, ya que nos puede dar una idea más cercana a la realidad en un problema dado. En esta sesión harás una revisión de algunos trazos y conceptos geométricos que son de gran utilidad en la resolución de problemas.

Observa el video. Con él recordarás los temas ya vistos. Comenta en tu grupo cuál fue la idea principal del video.

Con un compañero o compañera trabaja en tu cuaderno.

1. ¿Cómo describes los siguientes ángulos de un círculo?

Inscrito　　　Circunscrito　　　Central

2. Un polígono de cuatro lados, todos de igual medida, podrá recibir cada uno de los siguientes nombres:

Cuadrilátero　　　Rectángulo　　　Paralelogramo

¿Por qué? ¿Cómo lo llamarías más exactamente?

3. ¿Cómo describes una circunferencia? ¿Cómo un círculo? ¿Cómo relacionas círculo y circunferencia?

4. ¿En qué casos puedes denominar a un lado de un triángulo como hipotenusa? ¿Cuándo hablas de cateto de un triángulo?

5. ¿Cómo te refieres a la máxima cuerda de un círculo?

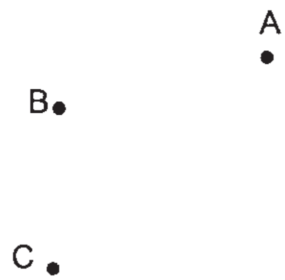
6. ¿Qué relación puedes establecer entre el ángulo central de un arco fijo $\overset{\frown}{AB}$ y un ángulo inscrito del mismo arco?

7. Si te refieres al perímetro de un círculo, ¿cómo lo podrías explicar?

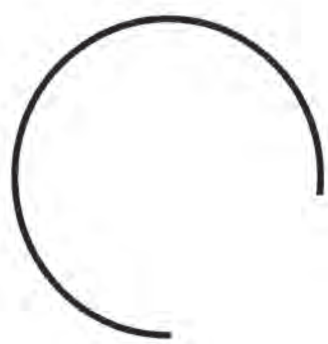
Comenta tus respuestas con tus compañeros(as). Si hay diferencias consulta con tu profesor(a).

Trabaja en tu cuaderno.

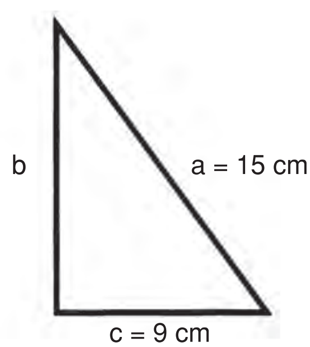
1. Traza una circunferencia que pase por los puntos A, B y C.



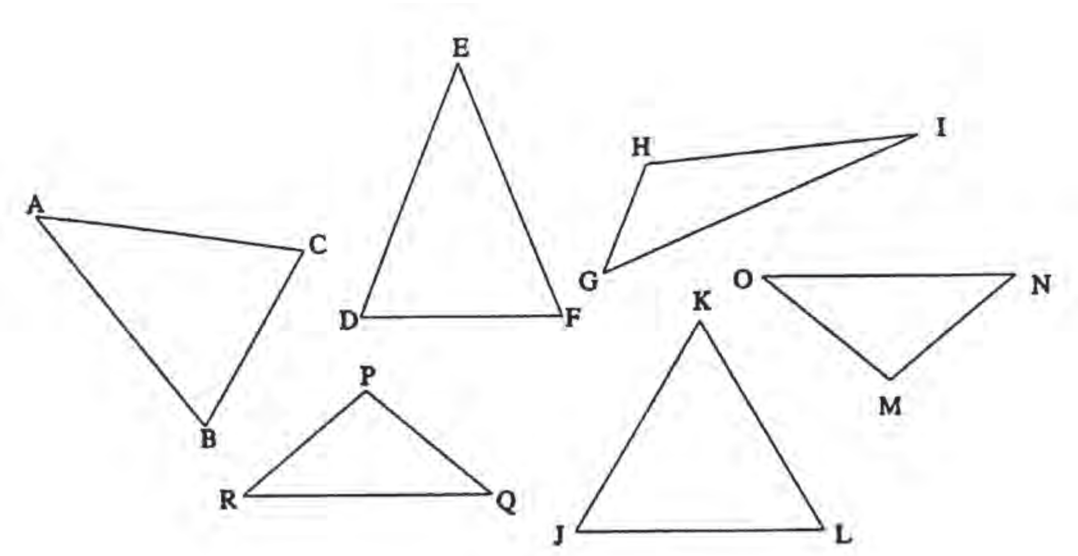
2. Encuentra el centro del arco siguiente.



3. Calcula mediante el teorema de Pitágoras el valor de b, en el triángulo ABC.



4. Mide los lados de los siguientes triángulos y establece cuáles de ellos son congruentes.



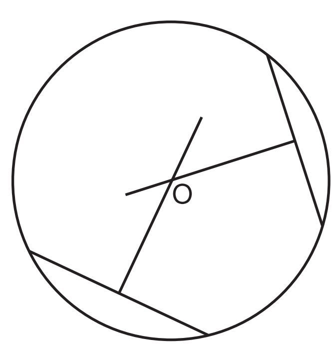
5. Traza una circunferencia que pase por los puntos MN.

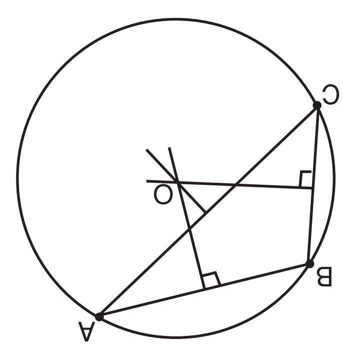
M •

N •

Compara con la clave los resultados obtenidos. Si hay errores, corrígelos.

CLAVE

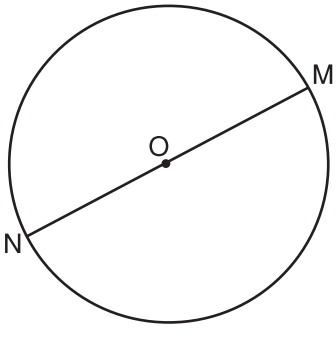




3. $b = 12$ cm

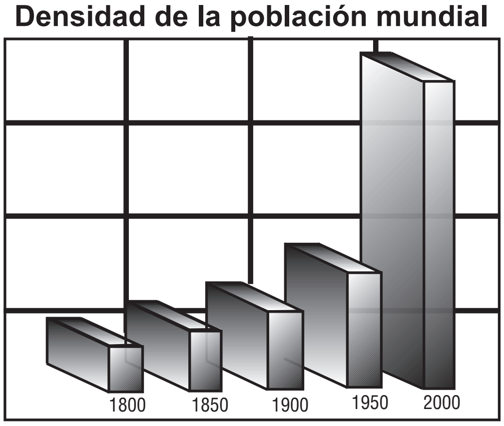
4. $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ y $\Delta MNO \cong \Delta PQR$

5.



Núcleo Básico 6

MANEJO Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN Y LA PROBABILIDAD



Fuente: Matemáticas. Miguel de Guzmán y otros. Ed. Anaya, 1988.

Las matemáticas se encuentran en todas las actividades humanas por sencillas o complicadas que éstas sean; unas de sus ramas: la estadística y la probabilidad, ciencias relativamente nuevas, señalan un gran progreso en el análisis de fenómenos y situaciones determinadas.

La estadística procede mediante la inducción, es decir parte de hechos y observaciones experimentales. Tiene una triple función: **recoger datos selectivamente, organizar, resumir y entender la masa de datos recogida y extraer conclusiones de la**

información obtenida, de los colectivos de posible información que tanto las ciencias humanas como las de la naturaleza le proveen. Cuenta la estadística con una base matemática para proceder adecuada y razonablemente: **la teoría de la probabilidad**.

El estudio de este núcleo te abre las puertas a un mundo nuevo: el del azar y la investigación de fenómenos.

Algunos de los temas que estudiarás son: la variación de fenómenos a tasa constante, crecimiento aritmético y geométrico, moda, mediana, población y muestra, frecuencia, probabilidad de un fenómeno, entre otros.

Estos temas te ayudarán a obtener una mayor comprensión de fenómenos que suceden a tu alrededor y que, en muchas ocasiones, parecen inciertos. Con su conocimiento, podrás tener una visión más confiable de muchos hechos futuros a través de situaciones ya estudiadas que te permitirán establecer analogías para resolver problemas en circunstancias semejantes.

80

PARA MUESTRA UN BOTÓN

158-3

Población y muestra
Concepto de población y muestra

¿Sabes con qué finalidad se da "muestra gratis" de algún producto que se vende? Generalmente, el propósito es dar a conocer la calidad de ese producto ya que la muestra presenta sus características principales.

Observa con atención el video; con él podrás comprender la diferencia entre población y muestra. Al finalizar, comenta con tus compañeros(as) la importancia del muestreo.

Lee y analiza el siguiente tema; al finalizar comenta con tus compañeros(as) sobre la utilidad del muestreo en la inferencia estadística.

POBLACIÓN Y MUESTRA

Al obtener información para llevarla a una gráfica, es importante distinguir si se trata de una población o de una muestra.

Una población es cualquier colección de datos, ya sean mediciones o conteos, sobre una característica particular común con respecto a los elementos de un grupo específico sujeto a un estudio determinado.

En un universo dado se pueden tener poblaciones diversas: datos sobre natalidad, mortalidad, salubridad, educación, migración, turismo, agricultura, ganadería, pesca, riego, industria, comercio, transportes, finanzas, etc.

Cuando los datos están determinados por un número específico, la "población" es **finita**; por ejemplo, el total de los alumnos que hay en un colegio, la producción agrícola en un país en un año, etc.

Cuando no se puede determinar el número específico de habitantes de una "población" se dice que es tan **infinita** como los posibles resultados de un experimento aleatorio (al azar): sacar cara o sello, al lanzar una moneda.

Una muestra, en cambio, es la parte de una población que se selecciona de acuerdo con una regla o un plan de trabajo que responda al propósito de la investigación.

De esta manera, una muestra se define como una parte representativa de la población seleccionada.

Ahora bien, el proceso mediante el cual se elige la muestra de una población se conoce como muestreo al azar, lo que significa que cada uno de los elementos de la población tiene la misma oportunidad de ser incluido en la muestra.

Ejemplo:

Supón que en una calle hay 10 familias y que alguien ha sido designado para entrevistar, eligiendo al azar, a tres de ellas. ¿Cómo decidirías a cuáles entrevistar y en qué orden?

Un método que se podría utilizar es el uso de una urna, escribir en tarjetas el número de las casas en donde habitan las familias, doblarlas, ponerlas en la urna o caja y proceder a extraer 3 de ellas, sin volverlas a colocar dentro de la urna. Esta sería la manera de asegurar que las familias entrevistadas sean diferentes y seleccionadas al azar.

Para hacer inferencias confiables acerca de una población, se debe estar seguro de que cualquier muestra tomada adecuadamente representa la población en la que se está interesado. En términos estadísticos, esto significa que todos los miembros de la población deben tener igual oportunidad de ser escogidos como parte de la muestra.

Las inferencias sobre la población, a partir de datos estadísticos aleatorios de la muestra se hacen calculando los porcentajes, con la diferencia de que el número de referencia no tiene que ser 100. Partiendo de los datos que se obtienen en una muestra de la población, se trata de inferir resultados que correspondan con la población misma.

Ahora bien, en la práctica se usa la letra **n** minúscula para representar la medida de la muestra y **N** mayúscula para representar el número de la medida de la población.

Ejemplos:

En un laboratorio se tomó una muestra a 50 pacientes y se observó que 30 de ellos tenían amibas. ¿Cuántos pacientes podrían tener amibas en una población de 1500 personas que se someten a un análisis de laboratorio?

$$\begin{aligned} N &= 1\,500 \\ n &= 50 \\ \text{Pacientes con amibas} &= 30 \end{aligned}$$

Estableciendo la proporción y aplicando la ley fundamental de las proporciones, se tiene:

$$\frac{50}{30} = \frac{1\,500}{x}$$

$$x = \frac{30\,(1\,500)}{50} = 90$$

Por lo tanto, se puede inferir que probablemente haya 900 pacientes que tengan amibas.

En una fábrica de llantas se tomó una muestra a 75 llantas de una producción de 2 000; si se encontraron 3 defectuosas, ¿cuántas llantas defectuosas podrían hallarse en toda la producción?

$$\begin{aligned} N &= 2\,000 \\ n &= 75 \\ \text{Defectuosas} &= 3 \end{aligned}$$

Estableciendo la proporción se tiene:

$$\frac{75}{3} = \frac{2\,000}{x}$$

$$x = \frac{2\,000\,(3)}{75} = 80$$

Por lo tanto se puede inferir que probablemente haya 80 llantas defectuosas en toda la producción.

En conclusión, las ventajas del muestreo en una investigación son las siguientes:

1. Bajo costo.

2. Ahorro de tiempo.

3. Facilidad para realizar una investigación.

4. Análisis sencillos de resultados.

Con tus compañeros(as) de grupo contesta en tu cuaderno las siguientes preguntas:

¿A qué se llama población? Da un ejemplo.

¿Qué es una muestra? Cita un ejemplo.

¿Cómo se elige la muestra de una población?

¿Cuál es la condición para hacer inferencias confiables?

¿Cómo se conoce el proceso mediante el cual se elige la muestra de una población?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros(as). Si tienes dudas, exponlas ante el grupo.

Continúa con tu grupo y haz en tu cuaderno las siguientes inferencias:

1. De 7 500 televisores se toma una muestra al azar a 150 y se encuentra que hay 80 defectuosos. ¿Aproximadamente cuántos de los 7 500 televisores son defectuosos?

2. En una fábrica una máquina produce 120 tornillos en una hora. Al cabo de 8 h de trabajo, se toma un 12% del total de la producción para hacer una prueba de control de calidad. ¿Cuál es la muestra y cuál la población?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros(as). Si tienes errores, corrígelos.

En forma individual, contesta lo que se pide a continuación.

a) Cuando los datos están determinados por un número específico, ¿qué se dice de la población?

b) ¿Qué es un muestreo al azar?

c) ¿Qué relación existe entre población y muestra?

d) Menciona 3 ventajas del muestreo en una investigación.

e) En una universidad de 8 000 alumnos se tomó una muestra al azar de un 20% y se encontró que, de ellos, 120 hablan inglés. ¿Aproximadamente cuántos alumnos de la universidad hablan inglés?

Compara tus respuestas con las de la clave. Si tienes dudas, pregunta al profesor.

CLAVE

a) finita; b) es la selección de una muestra tal que cada elemento de la población tiene la misma oportunidad de ser incluido en la muestra; c) muestra, población; d) pudiste haber respondido tres de las siguientes: costos, ahorro de tiempo, facilidad para realizar una investigación, análisis sencillos de resultados, etc.; e) aproximadamente 600 alumnos de la universidad hablan inglés.

81 USTED, ¿QUÉ OPINA?

159-3 Encuestas y censos
Conceptos y aplicación de encuestas y censos

¿Sabes con qué finalidad se hacen encuestas y censos? Evidentemente, el objetivo es recopilar información de importancia que permita investigar algunos aspectos de la vida del ser humano en la sociedad.

Observa con atención el video, aprenderás cosas interesantes sobre los conceptos de censo y de encuesta y de la utilidad que tienen ambos.

Con tus compañeros(as) de grupo, organiza una pequeña encuesta para realizar entre los estudiantes de Telesecundaria.

¿Qué información obtuvieron? Socializa tus hallazgos con tus compañeros(as).

Lee y actualiza con tu grupo el siguiente texto.

ENCUESTAS Y CENSOS

Encuestas

La encuesta es la captación, conscientemente planeada y registrada en actas o cuestionarios, de hechos, opiniones, juicios y motivaciones sociales. Los datos se consiguen a través de la respuesta oral o escrita a una serie de preguntas formuladas a un determinado círculo de personas.

Las encuestas tienen como objetivo obtener información de importancia para la planeación nacional en rublos tales como: producción agrícola y uso de la tierra, desempleo y tamaño de la fuerza de trabajo, producción nacional, precios de mayoreo y menudeo, condiciones de salud del pueblo, ingresos y gastos familiares, etc. Sin embargo, existen encuestas más especializadas, por ejemplo: deuda rural, costos de construcción de vivienda y empleo de científicos e ingenieros en la industria, entre otras.

Censos

La boleta censal es un formulario integrado con los datos más importantes de los miembros de un grupo, por ejemplo: nombre, edad, sexo, estado civil, nacionalidad, lugar de nacimiento, idioma, características económicas, educativas, religiosas, etc. Se usa en el estudio de cómo se presenta un fenómeno dado en la población de un país, una fábrica, una escuela, etc.

Los censos dan un conocimiento, medianamente exacto, de la extensión y la densidad, la composición religiosa, económica, educativa, el porcentaje de nacimientos, defunciones y matrimonios, las esperanzas de vida y otras características de una población. También proporcionan un conocimiento de los cambios cuantitativos que sufrió, en el curso del tiempo, una población en cada uno de los aspectos anteriores, los cuales ya habrían sido estudiados en censos previos.

Obsérvese el siguiente ejemplo:

En una escuela de 1 000 alumnos se hizo una encuesta a 150 estudiantes y resultó que 45 de ellos usaban anteojos. ¿Cuántos alumnos usan anteojos en la escuela?

Estableciendo una proporción y aplicando la ley fundamental de las proporciones se tiene:

$$\frac{150}{45} = \frac{1\,000}{x} \text{ , entonces}$$

$$x = \frac{1\,000\,(45)}{150} = 300$$

Por lo tanto, aproximadamente 300 alumnos usan anteojos.

¿Por qué aproximadamente? Recuérdese que esta es una inferencia estadística, así que el resultado depende de las características de la población estudiada y de la forma en que se obtienen las muestras de la misma.

Con tus compañeros(as) de grupo trabaja:

- Define qué es una encuesta y ejemplifica.
  Busca los resultados de una encuesta en periódicos o revistas. Información sobre esta modalidad es muy común en la televisión. Si tienes oportunidad escribe alguna de estas encuestas.

- Menciona algunos campos en donde se apliquen encuestas importantes en la planeación nacional.

- Busca información sobre el último censo nacional realizado en el país. ¿Qué datos de ese censo te parecen interesantes?

- ¿Cuál es la diferencia entre encuesta y censo?

Comparte tu trabajo con tus compañeros(as) y el profesor(a).

Continúa con tu grupo y resuelve los siguientes problemas.

Una fábrica de zapatos va a producir 25 000 pares de tenis blancos para estudiantes de secundaria. Para ello hizo una encuesta a 5 000 alumnos y obtuvo los siguientes datos:

Número	35	36	37	38	39	40	41	42	43	Total
Núm. de estudiantes	250	400	500	700	1 100	1 050	450	300	250	5 000

¿Cuántos pares de tenis, de cada número, producirá la fábrica?

Del núm. 35 =	Del núm. 38 =	Del núm. 41 =
Del núm. 36 =	Del núm. 39 =	Del núm. 42 =
Del núm. 37 =	Del núm. 40 =	Del núm. 43 =

Compara tus resultados con los de otros compañeros(as). Si tienes errores, corrígelos.

En forma individual resuelve este problema.

- En una empresa se hace una encuesta a 100 trabajadores, resultando que 6 de ellos ganaban el salario mínimo. Si la empresa tiene 2 000 trabajadores, ¿cuántos ganarán el sueldo mínimo?

Compara tu respuesta con la de la clave.

CLAVE

120 obreros, aproximadamente, ganan el sueldo mínimo.

82 **EL MUNDO DE LOS NÚMEROS**

160-3

Estudios estadísticos
Conocimientos de algunos estudios estadísticos

- ¿Alguna vez has realizado un estudio estadístico? Tal vez no. En esta sesión lo harás.

Observa con atención el video; en él se mostrará un estudio estadístico. Al finalizar, comenta con tus compañeros(as) la importancia de un estudio estadístico.

Lee y analiza con tus compañeros(as) de grupo el siguiente texto, comenta con tus compañeros(as) los aspectos que te hayan parecido más importantes.

ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

En la actualidad, se ha hecho familiar el empleo de técnicas estadísticas para el estudio de los problemas sociales; de tal forma que se han clasificado como se muestra a continuación:

ESTUDIOS ESTADÍSTICOS

- Por su origen
  - Públicos
  - Privados
- Por el campo que cubren
  - Totalistas
  - Selectivos
- Por su periodicidad
  - Permanentes
    - Censos
  - Periódicos
- Por su objeto de investigación
  - Económicos
  - Sociales

Públicas Son las estadísticas que provienen de dependencias y empresas estatales como el DANE, la Secretaría de Hacienda, entre otros.

Privadas Son las realizadas por empresas particulares.

Totalistas Son las estadísticas que consideran todos los datos de un conjunto, por ejemplo, los censos.

Selectivas Son las que cubren una parte del universo de datos, por ejemplo, el muestreo.

Permanentes Se llaman así a las estadísticas que se recopilan constantemente.

Periódicas Las que se elaboran con intervalos de tiempo. En estas últimas se ubican también los censos, o sea, los recuentos numéricos de personas o cosas que se llevan a cabo periódicamente. Existen dos clases de censos: el de **población** y los **económicos**.

Por su objeto de investigación, las estadísticas pueden ser **económicas** (encargadas de obtener datos relativos a las diversas ramas de la actividad económica: industrial, agrícola, ganadera, minera, etcétera) o **sociales** (relacionadas con la educación, natalidad, mortalidad, divorcios, delincuencia, etc.).

Los datos estadísticos carecen de significado si no se interpretan.

En Colombia contamos con el Departamento Administrativo Nacional de Estadística DANE, cuyas funciones básicas para el desarrollo del país son: generar las estadísticas oficiales sobre temas económicos y sociales y garantizar la disponibilidad, la calidad y la imparcialidad de la información.

Algunas de sus investigaciones exigen el conteo del universo total de los individuos que participan en el fenómeno que se estudia, en este caso se trata de un censo.

Otras, que investigan sólo algunos sectores significativos del universo exigen de una encuesta-muestreo.

Es interesante que conozcas los objetivos del DANE.

- Producir la información básica para el país.

- Producir los indicadores económicos del país.

- Producir los indicadores sociales del país.

- Asegurar los estándares de calidad y la oportunidad de la información estadística.

- Difundir la información y los servicios de la entidad.

- Fomentar la cultura estadística en el país.

La información del DANE está al servicio del público en general, quien puede consultar a través de muchos medios (Banco de datos, telefónicamente, página WEB, www.dane.gov.co, correo tradicional, correo electrónico, fax, suscripciones a boletines y publicaciones).

Según datos del DANE, Colombia tenía en 1961 una población de 17 484 510 habitantes; en 1973 la población fue de 20 666 920 habitantes; en 1985 se tenían 27 853 436 habitantes; el censo de 1993 arrojó una población de 33 109 840 habitantes.

Si conocemos la extensión territorial de nuestro país, 1 138 000 km^2, podemos calcular la densidad de población, es decir el número de habitantes por km^2, estableciendo la relación:

$$\frac{\text{Número total de habitantes}}{\text{extensión territorial}} = \frac{33\ 109\ 840}{1\ 138\ 000} \cong 29 \text{ hab.}/\text{km}^2$$

Este procedimiento te permitirá analizar qué pasa en tu departamento, ciudad, pueblo o vereda. Si indagas por la extensión de una región y el número de habitantes en ella podrás conocer la densidad de población regional y compararla con el dato general para nuestro país.

La información sobre la estructura de la población colombiana por edades y sexo se recoge en la siguiente tabla y se representa en una gráfica piramidal.

Un análisis de los datos de la tabla permite encontrar información adicional. Por ejemplo:

¿Qué parte de la población representa los niños y las niñas de 4 o menos años de edad?

Niños y niñas de 4 o menos años: 3 754 870
Total población: 33 109 840

$$\frac{3\ 754\ 870}{33\ 109\ 840} \times 100 = 11.34\%$$

El 11.34% de la población en Colombia tiene 4 años o menos. Pero qué porcentaje son niños y cuál corresponde a las niñas?

POBLACIÓN TOTAL CENSADA EN 1993

Grupo de edad	Total	Hombres	Mujeres
0 - 4 años	3 754 870	1 914 391	1 840 479
5 - 9	3 816 670	1 943 375	1 873 295
10 - 14	3 840 632	1 947 256	1 893 376
15 - 19	3 301 436	1 614 187	1 687 249
20 - 24	3 156 530	1 508 254	1 648 276
25 - 29	2 977 533	1 420 298	1 557 235
30 - 34	2 693 270	1 303 844	1 389 426
35 - 39	2 219 750	1 060 353	1 159 397
40 - 44	1 735 926	864 485	871 241
45 - 49	1 139 501	559 518	579 983
50 - 54	1 139 501	650 119	673 696
55 - 59	855 269	413 838	441 427
60 - 64	796 234	388 860	409 374
65 - 69	539 716	260 405	279 311
70 - 74	417 485	201 401	216 084
75 - 79	260 423	123 908	136 515
80 - 84	161 961	73 107	88 854
85 y más	116 823	488 740	68 083
Total nacional	33 109 840	16 296 539	16 813 301

Fuente DANE.

Niños:

$$\frac{1\ 914\ 391}{33\ 109\ 840} \times 100 = 5.78\%$$

Niñas:

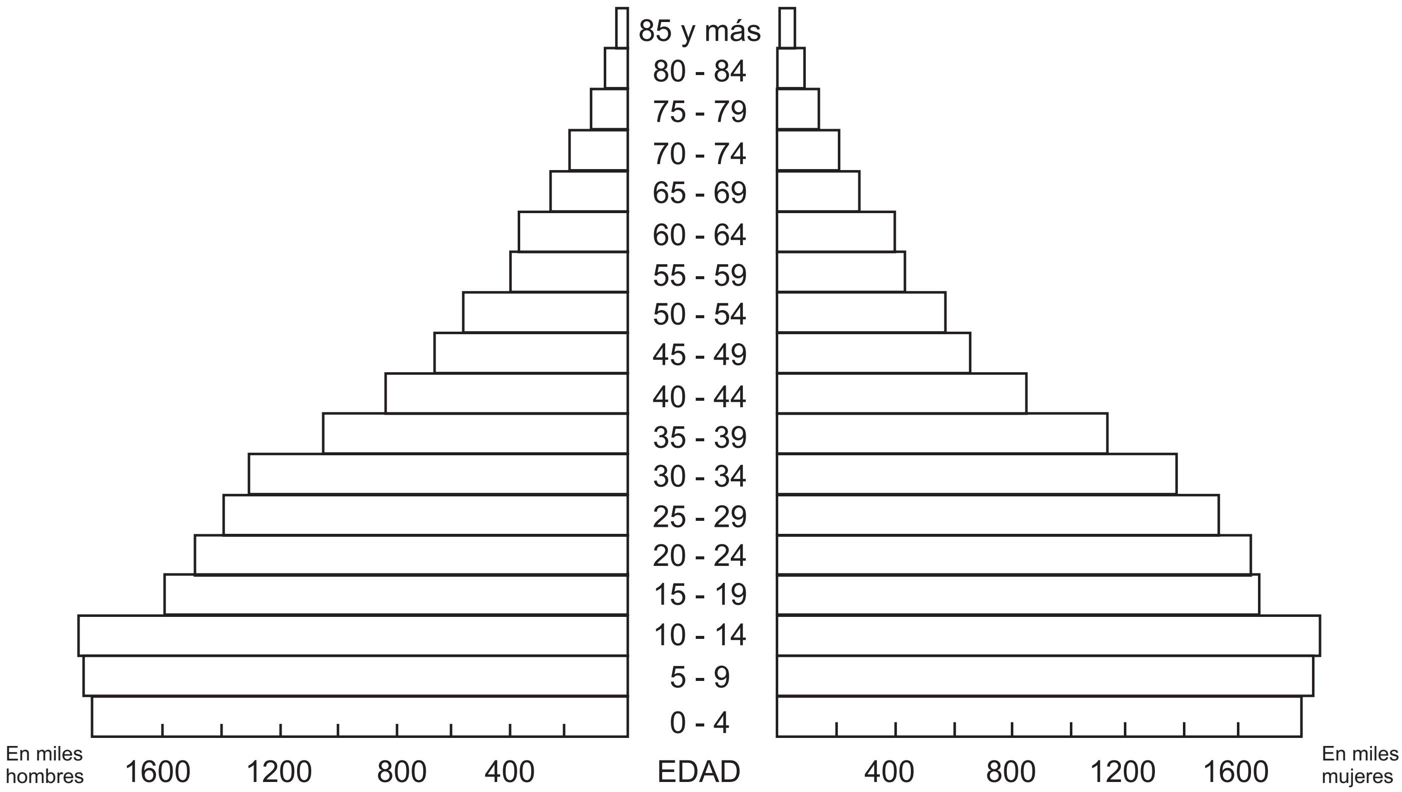
$$\frac{1\ 840\ 479}{33\ 109\ 840} \times 100 = 5.56\%$$

Un 5.78% de la población son niños y 5.56% son niñas. Hay más niños que niñas de 4 o menos años en Colombia.

¿Hay más hombres que mujeres en Colombia?

Esta y muchas otras preguntas te podrás responder si escudriñas detalladamente la información.

DISTRIBUCIÓN DE LA POBLACIÓN POR EDAD Y SEXO
CENSO 1993



Con tus compañeros(as) de grupo, usa los datos de la tabla y de la gráfica que recogen de censo de población de 1993.

1. ¿En cuáles rangos de edad hay más hombres que mujeres? Compáralos hallando los porcentajes.

2. ¿Qué porcentaje de la población tiene entre 0 y 24 años de edad?

3. Qué fenómeno se advierte si se analizan las tres barras en la base de la pirámide? Explica.

Comparte y discute tus resultados con tus compañeros(as) y el maestro(a).

Sigue trabajando con tu grupo.

La siguiente tabla recoge la información de los 3 últimos censos realizados en Colombia. Puedes observar que la población femenina es ligeramente mayor que la masculina, en los tres casos. ¿En cuál de los tres censos la diferencia, en porcentaje, entre estas dos poblaciones es mayor? Usa tu calculadora.

Censo Año	Hombres	Mujeres	Total
1993	16 296 539	16 813 301	33 109 840
1985	13 785 523	14 067 913	27 853 436
1973	10 124 394	10 542 526	20 666 920

Muestra tu trabajo a otros grupos. Si tienes dudas acláralas con tu maestro(a) y compañeros(as).

En forma individual, trabaja en tu cuaderno.

Busca qué tipo de gráfica permite visualizar los datos de la tabla anterior y realízala.

Compara tu gráfica con las hechas por tus compañeros(as). Discute las ventajas o desventajas de los tipos de gráficas usados.

83 SIEMPRE LO MISMO

161-3

Tasa constante
Conocimiento de la tasa constante

¿Te imaginas el tamaño de la población mundial para el año 2025? ¿Habrá suficientes alimentos y empleos para todos? ¿Crees que haya una forma de saberlo para prevenir problemas?

Observa con mucho interés el video, el cual te mostrará la utilidad de las tasas en la estadística. Al terminar, plantea tus dudas a tus compañeros(as) del grupo para resolverlas.

Reúnete con un compañero(a) para leer y analizar la siguiente lectura.

TASA CONSTANTE

Frecuentemente se escuchan o se leen informaciones con expresiones como las siguientes.

- La tasa media anual de crecimiento poblacional de Colombia, para el período 1985 – 1990 fue 1.99%.

- La tasa de interés para créditos de consumo es 33.29%.

- La tasa de desempleo para el año en curso es 17%.

Observa que en estas informaciones se ha utilizado la palabra **tasa** como un sinónimo de **tanto por ciento**, aplicable a una cantidad de un determinado tiempo. Se le llama tasa porque sirve para medir o como medida para obtener algún dato que sea utilizado para información estadística. Si ésta no varía, se le llama **tasa constante.**

Conocer las tasa de variación permite tener una idea de cómo se desarrollarán los fenómenos, esto es, hacer **proyecciones** a futuro.

Veamos un ejemplo:

Una persona obtiene un préstamo de $ 1 000 000 de una caja de ahorros. La tasa constante de interés mensual es de 2.5%. ¿Cuánto pagará en total al término de seis meses?
La siguiente tabla muestra la proyección terminada.

Mes	Capital	Tasa	Crecimiento	Nuevo Capital
1o.	1 000 000	2.5%	25 000	1 025 000
2o.	1 025 000	2.5%	25 620	1 050 620
3o.	1 050 620	2.5%	26 260	1 076 880
4o.	1 076 880	2.5%	26 920	1 103 800
5o.	1 103 800	2.5%	27 590	1 131 390
6o.	1 131 390	2.5%	28 280	1 159 670

La persona pagará en total, al término de seis meses $ 1 159 670.

Continúa trabajando con tu equipo y contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Qué es una tasa?

b) ¿Cuándo se considera constante una tasa?

c) ¿Por qué el empleo de una tasa permite hacer una proyección en el desarrollo de un evento?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros(as).

Trabaja con un equipo de tres compañeros(as) para resolver el siguiente problema.

La población en 1993 de una comunidad rural era de 5 000 habitantes y su tasa de crecimiento fue de 3.5%. Suponiendo que cada año se incrementará esa cantidad, ¿cuál será la población de esa comunidad en el año 2000?

Para su resolución completa los datos en tu cuaderno en una tabla como la siguiente. Te puedes ayudar de tu calculadora.

Año	Población	Tasa	Crecimiento	Población al año siguiente
1993	5 000	3.5%	175	5 175
1994	5 175	3.5%		
1995		3.5%		
1996		3.5%		
1997		3.5%		
1998		3.5%		
1999		3.5%		
2000		3.5%		

Compara tu trabajo con el de otro compañero(a).

Trabaja individualmente. Busca información en periódicos, revistas, libros en donde encuentres cómo inventar un problema que involucre el uso de alguna tasa y resuélvelo.

Comparte tu trabajo con tus compañeros(as) y tu profesor(a).

84

SIGUIENDO LA LÍNEA

162-3

Crecimientos aritméticos
Definición de crecimientos aritméticos

Seguramente en algunas ocasiones, has realizado las famosas “numeraciones” de 2 en 2 de 5 en 5, hasta un determinado número. Los términos de esas series sufren modificaciones constantes. Con las actividades que presentamos a continuación conocerás más de ellas.

Trabaja con dos compañeros(as). Lee el siguiente problema que seguramente resolverás fácilmente. En él encontrarás algunas curiosidades.

Un grupo de amigos deciden ahorrar para las vacaciones. En la primera semana ahorran $ 10 000. En la siguiente $12 000, en la próxima $14 000 y así sucesivamente. Durante las quince semanas que faltan para las vacaciones ahorrarán cada semana 2 000 más que la anterior.

Un día colocan en la alcancía $32 000. ¿Sabes cuántas semanas llevan ahorrando?

¿Cómo procederías para resolver este problema?

¿Sabes cuántas semanas más deben ahorrar para cumplir la meta?

Discute tu solución con tus compañeros(as).

Observa con interés el video, mediante el cual conocerás las características de un crecimiento aritmético. Al terminar, comenta las ideas principales con tus compañeros(as) y maestro(a). ¿Tienen estas ideas algo en común con el problema que resolvieron anteriormente?

Invita a tus compañeros(as) de grupo a leer y analizar el siguiente texto.

CRECIMIENTOS ARITMÉTICOS

Una persona ha leído hasta la página 72 de un libro de literatura de 250 páginas. Si a partir del día lunes se propone leer diariamente 17 páginas, ¿cuántas habrá leído al concluir el sábado?

Resolver el problema anterior resulta muy sencillo, pero la intención en esta sesión es analizar el aumento del número de páginas leídas por día.

Para ello es necesario conocer la definición de una progresión aritmética.

Progresión aritmética es una serie de términos que aumentan o disminuyen en una cantidad constante llamada razón de la progresión.

Una progresión aritmética es creciente o ascendente cuando la razón es positiva, y decreciente o descendente cuando la razón es negativa.

Ejemplos:

2, 4, 6, 8, 10, 12,…

Es una progresión creciente; su razón es +2, porque cada número es 2 unidades mayor que el anterior.

36, 33, 30, 27, 24,….

Es una progresión decreciente; su razón es –3, porque cada número es 3 unidades menor que el anterior.

La variación de las páginas leídas del problema anterior puede representarse en la siguiente tabla.

Días	Páginas leídas	Crecimiento	Páginas leídas al día siguiente	
Lunes	72	+17	89	T_1 = primer término
Martes	89	+17	106	T_2
Miércoles	106	+17	123	T_3
Jueves	123	+17	140	T_4
Viernes	140	+17	157	T_5
Sábado	157	+17	174	T_6

Al llegar el fin de semana habrá leído hasta la página 174.

Observa el crecimiento de la progresión de la última columna.

$$T_1 + R = T_2, \qquad T_2 + R = T_3, \dots$$

$$89 + 17 = 106, \qquad 106 + 17 = 123, \dots$$

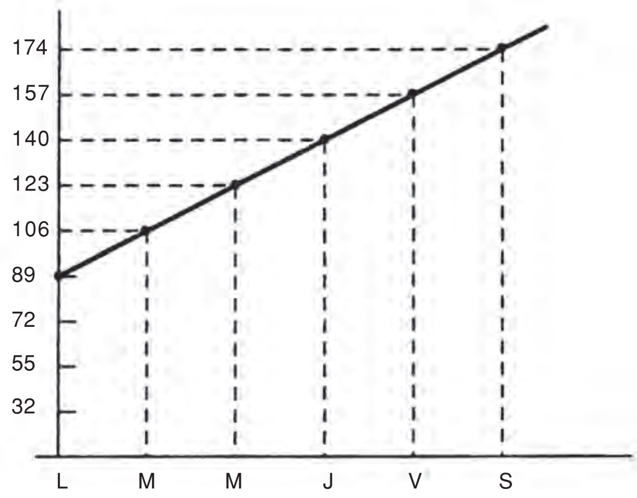
Si T_1 = primer término, T_2 = segundo término,…. y R = crecimiento, entonces puede decirse que:

El primer término más el crecimiento es igual al segundo término; el segundo término más el crecimiento es igual al tercer término; y así sucesivamente.

Esta progresión representa un **crecimiento aritmético**.

Crecimiento aritmético es la progresión que aumenta por adición de una cantidad constante llamada razón.

Un crecimiento aritmético puede graficarse. Para el ejemplo analizado, en esta lección, se tiene:



La gráfica de un creciente aritmético es una recta.

Reúnete con dos compañeros(as) para analizar el siguiente problema y realizar la actividad que se indica.

Un obrero recibe $500 000 como gratificación de fin de año, los cuales decide guardar. Además ahorrará $86 000 bimestrales a partir de enero. ¿Cuánto tendrá al término de un año?

Completa la siguiente tabla en tu cuaderno.

Mes	**Capital**	**Crecimiento en $**	**Capital al término del bimestre**
Ene. - Feb.	500 000	86 000	586 000
Mar. - Abr.	586 000		
May. - Jun.			
Jul. - Ago.			
Sep. - Oct.			
Nov. - Dic.			

Compara tu tabla con los datos que hayan obtenido tus compañeros(as).

Con base en la información de la tabla anterior, realiza individualmente lo que se pide.

Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son los datos de la columna de “capital”?

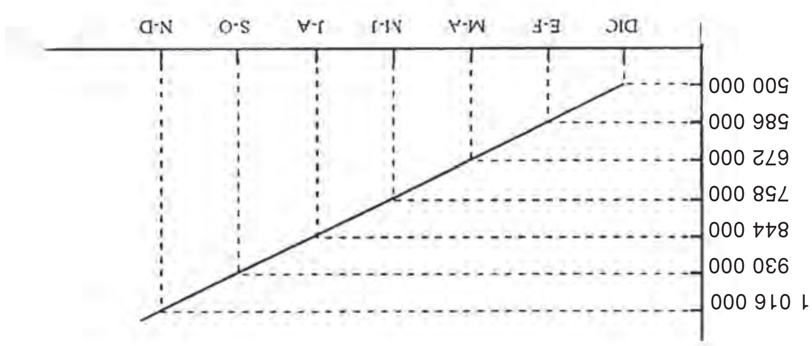
b) ¿Representan un crecimiento aritmético? ¿Por qué?

c) ¿Cuánto tendrá el obrero al término del año?

Realiza la gráfica de ese crecimiento.

Compara tus respuestas con las de la clave, si no coinciden, corrige.

CLAVE



1. a) 500 000, 586 000, 772 000, 758 000, 844 000, 930 000, 1 016 000.
b) Si. Porque aumenta por adición de una cantidad constante (86 000).
c) $1 016 000.

85 UNA CURVA PELIGROSA

163-3

Crecimientos exponenciales
Definición de crecimientos exponenciales

Una curva es muy peligrosa, y aún más cuando es en bajada. Ponte muy listo, porque en esta sesión encontrarás una. No te vayas a ir en línea recta.

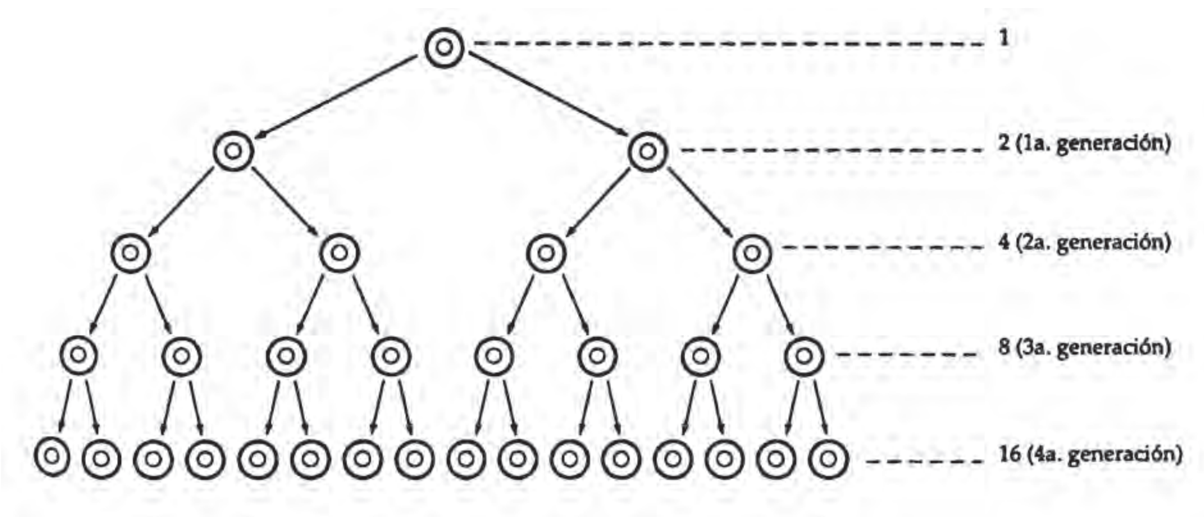
Pon atención al video, que te mostrará las características de un crecimiento exponencial. Al terminar, comenta las ideas principales con tus compañeros(as) y maestro(a).

Con tu grupo de trabajo lee y comenta el siguiente texto:

CRECIMIENTOS EXPONENCIALES

La mitosis o cariocinesis es un proceso de reproducción celular mediante el cual una célula reparte por igual la sustancia nuclear, llamada cromatina, en sus dos hijas resultantes; a su vez, cada una de ellas repite el proceso.

Lo anterior se puede ilustrar en la siguiente figura.



Los números de células totales de cada generación muestran un crecimiento exponencial.

1, 2, 4, 8, 16...

Pero ¿qué es un crecimiento exponencial?

Para definirlo, primero se conocerá una progresión geométrica.

Llámese progresión geométrica a una serie de términos tales que cada uno de ellos es igual al que le precede, multiplicado por una cantidad constante llamada razón de la progresión.

Una progresión geométrica es creciente cuando la razón es mayor que 1, y decreciente cuando la razón es menor que 1.

Ejemplos: 1, 4, 16, 64, 256,…

Es una progresión creciente; su razón es 4, porque cada número es el cuádruple del anterior.

81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$ ...

Es una progresión decreciente; su razón es $\frac{1}{3}$, porque cada número es la tercera parte del anterior.

La variación de los números totales de cada generación de células puede presentarse en la tabla siguiente.

Generaciones	Número de células	Crecimiento	Número de células de la siguiente generación	
	1	$\times 2$	2	T_1 = primer término
1a.	2	$\times 2$	4	T_2 =
2a.	4	$\times 2$	8	T_3 =
3a.	8	$\times 2$	16	T_4 =
4a.	16	$\times 2$	32	T_5 =

Observe el crecimiento de la progresión de la última columna.

$$T_1 \times R = T_2, \qquad T_2 \times R = T_3, \dots$$
$$2 \times 2 = 4, \qquad 4 \times 2 = 8, \dots.$$

Si T_1 = primer término, T_2 = segundo término,… y
R = crecimiento, entonces puede decirse que:

El primer término por el crecimiento es igual al segundo término; el segundo término por el crecimiento es igual al tercer término; y así sucesivamente.

Esta progresión es un ejemplo de **crecimiento exponencial.**

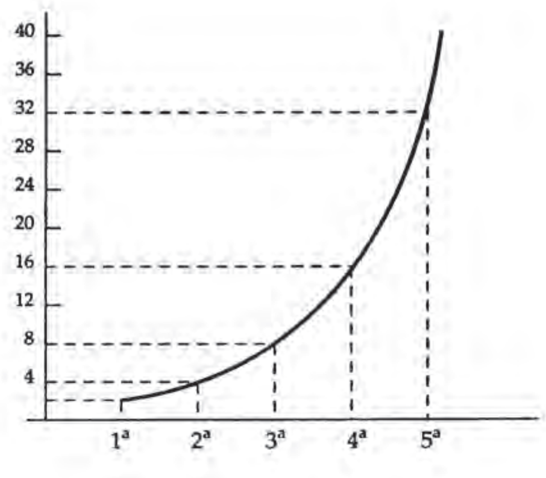
Crecimiento exponencial es la progresión que aumenta por multiplicación de una cantidad constante llamada razón.

La progresión geométrica 2, 4, 8, 16, 32,… puede escribirse en forma exponencial.

2, 4, 6, 8, 16, 32,…

$2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$,…. forma exponencial

Un crecimiento exponencial también puede graficarse. Para el ejemplo anterior, se tiene:



La gráfica de un crecimiento exponencial es una curva.

Sigue trabajando con tu grupo para contestar las siguientes preguntas:

a) ¿Qué es una progresión geométrica?

b) ¿A qué se llama razón de una progresión geométrica?

c) ¿Qué es un crecimiento exponencial?

d) ¿Cómo es la gráfica de un crecimiento exponencial?

e) El primer término de una progresión geométrica es 5 y el segundo es 15. ¿Podrías escribir los siguientes tres términos?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros(as).

Forma un equipo de tres compañeros(as) para analizar el siguiente problema y realizar la actividad que se indica.

Si doblas por mitades una hoja de tu cuaderno, ¿en cuántas partes se dividirá la hoja, después de 1, 2, 3, y 4 dobleces?

Coloca los datos en una tabla como la siguiente.

Dobleces	Número de partes de la hoja
1	
2	
3	
4	

Compara tu tabla con la de otros compañeros(as). Si tiene dudas consulta con tu profesor(a).

Con base en la información de la tabla anterior, realiza individualmente lo que se indica.

1. Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Cuáles son los números que resultaron en la columna “número de partes de la hoja “

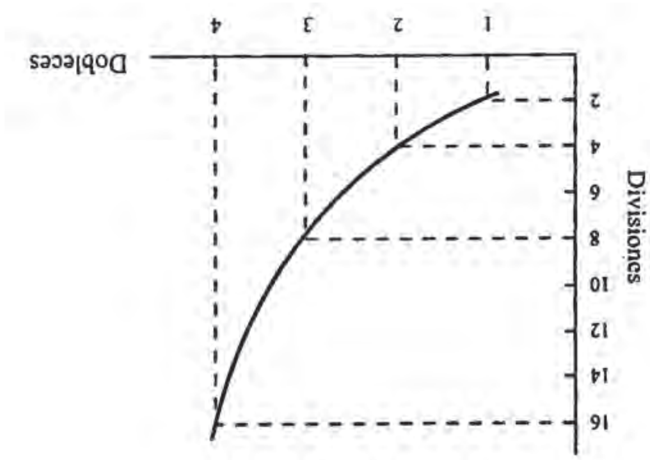
b) ¿Representan un crecimiento exponencial? ¿Por qué?

c) ¿Cuál es su razón?

2. Realiza la gráfica correspondiente.

Compara tus respuestas con las de la clave; si no coinciden, corrige.

CLAVE:



1. a) 2, 4, 8, 16. b) Sí porque aumenta por multiplicación de una cantidad constante. c) 2.

86 LO QUE NOS DICEN LOS NÚMEROS

164-2

Índices
Elaboración de índices

La elaboración, representación e interpretación de índices relativos a precios, consumo, producción, etc., es útil para la economía en general, pues permite predecir el comportamiento de la demanda y de esa manera regular la producción de los bienes y servicios.

Observa en el video algunos aspectos que te permitirán saber cómo se elaboran los índices en estadística.

Una vez concluido el video, comenta con tus compañeros(as) y profesor(a) los aspectos sobresalientes del mismo.

Intégrate a un equipo y lee y analiza el siguiente texto.

ÍNDICES

Un número índice o índice es una medida estadística diseñada para expresar variaciones en una variable o en un grupo de variables relacionadas con respecto al tiempo. Estas variaciones que se representan en tantos por cientos son una referencia para la elaboración de tablas o gráficas.

Por lo tanto se puede hablar de muchos ejemplos de índices, tales como: a) índices de precios; b) índices de calidad; c) índices de empleos u ocupación, etc.

Los *índices de precios* son aquellos que muestran el porcentaje de cambio en el precio de algún producto o artículo comercial, en un período determinado.

Con el objeto de ejemplificar lo anterior, supóngase que se tiene un artículo cualquiera (bolsa, hamaca, etc.), cuyo precio tuvo variación durante los últimos cinco años, por lo cual se requiere determinar el índice comparativo de precios de cada uno de estos años, tomando como período base 1989. El precio de ese año se considera como 100%.

Véase la siguiente tabla:

TABLA DE ÍNDICES

	Años	Precio pagado	Índice de precios	
Período base →	1989	13 000	100	← Índice de precios para el período base
	1990	9 000		
	1991	8 000		
	1992	10 000		
	1993	12 000		

Para determinar el índice de precios de cada año en la tabla se puede establecer una expresión que relacione el precio pagado con el precio base expresado en porcentaje. Esta expresión nos permite establecer el índice de precios. Así:

$$I_{Pn} \;=\; (\text{Índice de precio}) \;=\; \frac{\text{Precio pagado}}{\text{Precio base}} \times 100$$

Para encontrar el índice de precios de 1991, 1992 y 1993 se procede de la siguiente manera.

a) $I_{P91} = \dfrac{8\,000}{13\,000} \times 100 = 61.5$

En donde el precio pagado del 1991 fue \$ 8 000 y el precio base de 1989 fue \$13 000.

b) $I_{P92} = \dfrac{10\,000}{13\,000} \times 100 = 76.9$

c) $I_{P93} = \dfrac{12\,000}{13\,000} \times 100 = 92.3$

¿Cuál fue el índice de precios para el año 1990?

Una vez encontrados los índices de precios para los años enunciados puedes completar la tabla.

TABLA DE ÍNDICES		
Años	Precios	Índices de precios
1989	13 000	100
1990	9 000	69.2
1991	8 000	61.5
1992	10 000	76.5
1993	12 000	92.3

Al observar la tabla es notorio que el precio del artículo descendió en 1990 en un 30%, aproximadamente, con respecto al año base. El descenso continuó en 1991 y mostró una recuperación en 1992 y 1993, sin llegar a la situación que se tenía en 1989. Esto puede obedecer a que bajó la demanda de ese artículo, a que disminuyó la calidad del producto o a otros factores.

El siguiente ejemplo muestra cómo calcular *índices de compra*. En este caso se relaciona una compra diaria de un cierto producto, durante una semana con la compra total.

Don Simón se dedica a vender dulces, por lo cual realiza sus compras de azúcar en la semana de la siguiente manera:

Días	**Kg de azúcar**
lunes	50
martes	30
miércoles	45
jueves	60
viernes	80
sábado	90
domingo	95

Como puede observarse, el total de kilogramos de azúcar comprados durante la semana es de 450; pues bien, con base en las compras efectuadas por don Simón, hay que determinar el índice de las compras diarias en una tabla y representarlas en una gráfica.

$$\text{Índice de compra} = I_c = \frac{\text{Compra de un día}}{\text{total de compra}} \times 100$$

Así para la compra del lunes, se tiene:

$$I_c = \frac{50}{450} \times 100 = 11\%$$

Y así sucesivamente se obtienen los demás índices de compra:

$$\text{martes} \quad I_c = \frac{30}{450} \times 100 = 07\%$$

$$\text{miércoles} \quad I_c = \frac{45}{450} \times 100 = 10\%$$

$$\text{jueves} \quad I_c = \frac{60}{450} \times 100 = 13\%$$

$$\text{viernes} \quad I_c = \frac{80}{450} \times 100 = 18\%$$

$$\text{sábado} \quad I_c = \frac{90}{450} \times 100 = 20\%$$

$$\text{domingo} \quad I_c = \frac{95}{450} \times 100 = 21\%$$

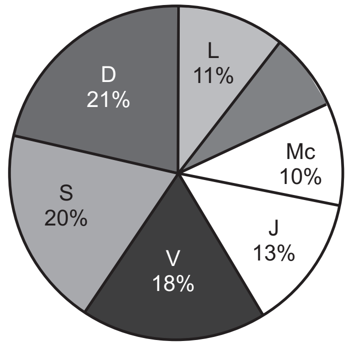
Una vez realizados los cálculos correspondientes, se puede hacer la tabla de índices.

Días	**Kg de azúcar**	**Índices de compras (%)**
lunes	50	11
martes	30	07
miércoles	45	10
jueves	60	13
viernes	80	18
sábado	90	20
domingo	95	21
Totales	450 kg	100%

La tabla muestra qué tanto por ciento del total de las compras (450 kg) se realizó cada día: 11% el lunes, 18% el viernes, 21% el domingo, etc.

Los datos mostrados en la tabla se pueden representar en una gráfica circular anotando el índice o tanto por ciento obtenido para cada día.

De la siguiente manera quedan representadas las compras de don Simón.



Con el apoyo de los índices es posible tener una idea clara de las fluctuaciones en los volúmenes de producción, de compras, etc., lo cual permite tomar decisiones en los momentos precisos y detectar las posibles causas de dichas variaciones.

Debido a esto es conveniente elaborar e interpretar correctamente los índices, de manera que las conclusiones obtenidas mejoren algún aspecto funcional de la actividad de que se trate.

Continúa trabajando con tu equipo y analiza las siguientes cuestiones antes de contestar.

1. Menciona tres ejemplos donde se utilicen los índices.

2. En el texto de la lectura se analizarán el índice de precios y el índice de compra. ¿En qué aspecto hay semejanza entre ellos y en cuál diferencia? Explica.

Al terminar, compara tus respuestas con las de otro equipo; si tienes dudas, coméntalas con tu maestro(a).

Con tus mismos compañeros(as) de equipo completa en tu cuaderno la siguiente tabla de índices representando la información es una gráfica circular; si es necesario, utiliza tu calculadora.

En una gasolinera, un encargado determinó el índice o tanto por ciento de vehículos que cargaron sus tanques con gasolina el día anterior y obtuvo la siguiente información.

TABLA DE ÍNDICES
DE VEHÍCULOS QUE CARGARON GASOLINA

VEHÍCULOS	LITROS DE GASOLINA	ÍNDICE DE COMPRAS (%)
Microbuses	80 000	
Combis	120 000	
Camionetas	300 000	
Automóviles	240 000	
TOTAL		

Compara tu trabajo con el de tus compañeros(as).

Trabaja solo en tu cuaderno.

Haz una tabla con los índices comparativos del precio de una licuadora en cada año, considerando 1989 como el año base; usa tu calculadora y trabaja en tu cuaderno.

AÑOS	PRECIO PAGADO	ÍNDICE DE PRECIOS
1989	25 000	100%
1990	35 000	
1991	50 000	
1992	40 000	

Escribe tus conclusiones derivadas del análisis de la tabla:

Compara tus índices con la clave; si es necesario, rectifica.

CLAVE

a) $Ip = \frac{35\,000}{25\,000} = 140$

$Ipn = \frac{100\,000}{70\,000} \times 100 = 142.9$ $\quad Ip = \frac{50\,000}{25\,000} = 200$

b) $Ip = \frac{40\,000}{25\,000} = 160$ conclusión abierta.

87 TENDENCIA CENTRAL

164-3

Moda, media y mediana
Usos y limitaciones de la moda, la media y la mediana

Hay conceptos que se aplican comúnmente sin conocerlos a fondo.

Observa el video y conoce el significado de algunos términos.

Con los compañeros(as) de grupo lee y analiza el siguiente texto.

MODA, MEDIA Y MEDIANA

Cuántas veces se han escuchado expresiones como:

a) ¿El promedio más alto del grupo?

b) ¿El sueldo promedio del colombiano?

c) ¿El promedio de vida en la actualidad?

Y, ¿quién conoce la forma de obtener esos promedios?

La mayoría de la gente entiende lo que significan dichas expresiones pero no todos saben cómo se calculan. Así que, a continuación, se verá la forma de obtener el promedio.

El promedio es una medida de tendencia central y se obtiene fácilmente;

como en el siguiente ejemplo.

Las temperaturas en grados centígrados, tomadas en dos ciudades A y B, los días primero de cada mes de un determinado año a las 12 del día, son:

	E	F	M	A	M	J	J	A	S	O	N	D
A	12	13	12	12	14	15	17	16	16	12	10	11
B	7	7	13	14	15	18	17	18	12	13	10	8

Se desea saber cuál es la temperatura promedio en cada ciudad y cuál es el promedio más alto.

Para obtener el promedio de temperatura de cada ciudad se realiza la suma de sus temperaturas y se divide entre el número de meses del año.

$$A: \frac{12 + 13 + 12 + 12 + 14 + 15 + 17 + 16 + 16 + 12 + 10 + 8}{12} \cong 13.1\ ^\circ C$$

$$B: \frac{7 + 7 + 13 + 14 + 15 + 18 + 17 + 18 + 12 + 13 + 10 + 8}{12} \cong 12.66\ ^\circ C$$

Las dos medidas son muy parecidas, el promedio en la ciudad A es un poco mayor: 13.1 °C. En la ciudad B el promedio es de 12.66 °C.

A lo que se presentó anteriormente como promedio se le llama también **media aritmética** $(\overline{X})$ y la fórmula para calcularla es $(\overline{X}) = \frac{x}{n}$: en donde **x** es la suma de todos los datos y **n** es el número de datos.

Esta medida señala el centro de una distribución pero su desventaja es que puede verse afectada de manera considerable por uno o dos valores extremos de toda la muestra. Esto sucedería por ejemplo, en una ciudad en la cual la mayoría de los meses ofrecen una temperatura similar y en tres meses de intenso verano las temperaturas son elevadas lo que hace que el promedio general suba, lo cual no refleja la realidad del clima de dicha ciudad.

Ahora en esta misma situación se puede hacer un análisis de cuál es la temperatura que se presenta con mayor frecuencia, por ejemplo, en la ciudad **A**. Para ello se recurrirá a una tabla de frecuencia como la siguiente:

Temperaturas	Frecuencias
10	1
11	1
12	4
13	1
14	1
15	1
16	2
17	1

La temperatura con mayor frecuencia es 12 °C, lo que indica que en esta muestra la **moda** está dada por dicha cantidad.

Otra medida de tendencia central es la **mediana,** que se calcula de la siguiente manera.

Cuando el número de datos es impar, la mediana se encuentra fácilmente, pues es el valor que está en medio de todos ellos. Por ejemplo, si los datos son: 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, la mediana es 5 pues antes y después de este número hay tres datos. Pero si se tiene un caso como el ejemplo planteado anteriormente, la mediana estará determinada por la media de los dos valores que ocupan los lugares de en medio:

$$10 \quad 11 \quad 12 \quad 12 \quad 12 \quad \underbrace{12 \quad 13} \quad 14 \quad 15 \quad 16 \quad 16 \quad 17$$

$$\frac{12 + 13}{2} = 12.5 \text{ °c}$$

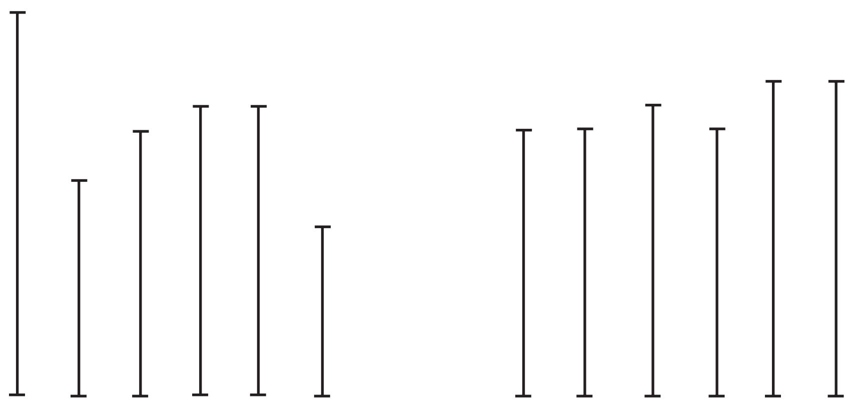
Los datos del centro de la distribución son 12 y 13, y su media es 12.5, por lo que este valor representa la **mediana.**

Esta medida se considera preferible a la media, pues no se ve afectada por valores extremos y representa con mayor exactitud un conjunto de observaciones. Sin embargo, a diferencia del promedio, la **mediana** de una muestra **no puede combinarse** con la de otra muestra si éstas desean compararse para obtener la mediana de la muestra compuesta.

Trabaja con tus compañeros de grupo en el siguiente ejercicio:

Contesta en tu cuaderno.

1. El siguiente esquema es una representación cualitativa de las estaturas de dos grupos de personas. ¿Podrás explicar por qué razón la estatura media para cada grupo podría ser la misma? ¿Cuál es pues la desventaja de esta medida en el ejemplo?



Grupo I *Grupo II*

2. ¿Qué entiendes por mediana y cuál es su ventaja con respecto a la media de una distribución de datos?

3. Y respecto a su grupo de datos, ¿cómo defines la moda?

Compara tus respuestas con las de otros compañeros, si tienes dudas consulta a tu maestro.

Continúa trabajando con tus compañeros(as) y encuentra la media, la mediana y la moda de los siguientes datos:

5, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9,10, 11, 13, 13

Compara con otros compañeros(as) tus resultados y, si hay diferencias, analízalas y saca una conclusión.

Ahora trabaja sólo para obtener la media, la mediana y moda de los siguientes datos; antes deberás ordenarlos.

a) 5, 7, 6, 6, 5, 4, 4, 8, 8, 10, 11, 9, 9.

media = mediana = moda =

b) 23, 27, 22, 24, 25, 25, 20, 23.

media = mediana = moda =

Coteja tus respuestas con la clave y, si tienes dudas, consulta con tu maestro(a).

CLAVE

a) 4, 4, 5, 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 11

media = 7.07 mediana = 7 moda = 4, 5, 6, 8, 9

b) 20, 22, 23, 23, 24, 25, 25, 27.

Media = 23.62 mediana = 23.5 moda = 23.25

88 ¿QUIÉNES RODEAN?

165-3

Desviación media
Conocimiento y aplicación de la desviación media

¿Qué tan dispersos son los datos de una distribución?

La desviación media es una medida de dispersión de los datos de una distribución.

Observa con atención el video y conoce algunos aspectos de la estadística que ayudan a realizar deducciones y proyectos a futuro con un buen grado de precisión.

Con tu equipo de trabajo, lee y analiza el siguiente texto y los ejemplos.

DESVIACIÓN MEDIA

La desviación media es una medida de dispersión. Esta medida calcula la **media** de todas las desviaciones, entendidas como las distancias de cada dato de la distribución y la media o promedio de todos ellos.

Veamos un ejemplo.

Los siguientes son puntajes obtenidos por un grupo de estudiantes, en un examen:

50, 53, 55, 60, 62, 70, 75, 83, 85, 90

En primer lugar debe calcularse la media de estos puntajes.

$$\text{media} = \frac{50 + 53 + 55 + 60 + 62 + 70 + 75 + 83 + 85 + 90}{10} = 68.3$$

Verifica este valor con tu calculadora.

Ahora se calcula la desviación o variación de cada puntaje, es decir sus distancias a la media.

$50 - 68.3 = -18.3$	$53 - 68.3 = -15.3$	$55 - 68.3 = -13.3$
$60 - 68.3 = -8.3$	$62 - 68.3 = -6.3$	$70 - 68.3 = 1.7$
$75 - 68.3 = 6.7$	$83 - 68.3 = 14.7$	$85 - 68.3 = 16.7$
	$90 - 68.3 = 21.7$	

El signo negativo señala que la dirección de los desvíos es hacia la izquierda. Sin embargo, se puede hacer caso omiso de los signos si lo único que interesa es conocer la distancia que hay de la media hacia los valores obtenidos y calcular la variación promedio:

$$\frac{18.3 + 15.3 + 13.3 + 8.3 + 6.3 + 1.7 + 6.7 + 14.7 + 16.7 + 21.7}{10} = 12.3$$

La desviación media es igual a la suma de los valores absolutos de las desviaciones, dividida entre el número de datos. Es decir, la desviación media es 12.3 y también es la media de las distancias, sin tomar en cuenta la dirección (+ ó –) a partir de la media o promedio.

Todo ello puede sintetizarse de la siguiente expresión:

$$\text{Desviación media} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \left| X_i - \overline{X} \right|}{N}$$

Donde:

- Σ = sumatoria
- x = medición
- $\overline{x}$ = media
- N = número de mediciones

Las líneas verticales indican que sólo se toman valores absolutos.

Es interesante verificar que la suma de las desviaciones con respecto a la media siempre es cero:

$$-18.3 + (-15.3) + (-13.3) + (-8.3) + (-6.3) + 1.7 + 14.7 + 16.7 + 21.7 = 0$$

Es por eso que se toman los valore absolutos de las desviaciones y se dividen entre el número de ellas para obtener una medida confiable de la variación, a la que se le da un nombre de **desviación media.**

Con tus compañeros(as) contesta las preguntas:

a) ¿Por qué algunos de los valores de los desvíos con respecto a la media resultan negativos?

b) ¿Por qué no se toma en cuenta el sentido (signo) de las variaciones para calcular las desviaciones con respecto a la media?

c) ¿Cómo definirías la desviación media y cómo procedes para calcularla?

Compara tus respuestas con las dadas por otro equipo.

Con tu grupo de trabajo resuelve el siguiente ejercicio.

Las estaturas de jugadores de dos equipos de baloncesto aparecen en las respectivas tablas.

Calcula para cada grupo de datos la media y la desviación media.

Estatura de los jugadores del equipo A
1.74
1.75
1.79
1.81
1.85

Estatura de los jugadores del equipo B
1.60
1.68
1.74
1.79
1.92
2.01

¿Cuál es la media en cada equipo?

¿Cómo resulta ser la desviación media en cada caso?

¿Qué opinas de tu hallazgo?

Ahora puedes opinar sobre la utilidad de la desviación media de un grupo de datos; escribe tus impresiones.

Resuelve tú solo el siguiente ejercicio en tu cuaderno.

Se investigaron los precios de un televisor de cierta marca en cinco almacenes. Calcula la desviación media de los datos de la tabla.

Precios($)	Media	Variación
1 050.00		
1 200.00		
1 150.00		
1 200.00		
1 100.00		

Desviación media = ?

Compara tu ejercicio con la clave y, si tienes dudas, consulta con tu profesor.

CLAVE

1. Desviación media = $\dfrac{\sum_{i=1}^{N} |x - \bar{x}|}{N}$

Precios($)	Media	Variación
1 050	1 140	–90
1 200	1 140	60
1 150	1 140	10
1 200	1 140	60
1 100	1 140	–40

Desviación media = $\dfrac{260}{5} = 52$

89 COMPRENDER MÁS QUE RECORDAR ES... DOMINAR LAS MATEMÁTICAS

166-3

Repaso parcial de los conocimientos adquiridos Integración de lo desarrollado en el núcleo

“Recordar es volver a vivir” dice un refrán. Ahora tú volverás a vivir algunas experiencias de sesiones anteriores y esto te llevará a dominar las matemáticas.

Observa el video, que te ayudará a recordar algunos conceptos y a darte cuenta de tu dominio de las matemáticas.

Integra un equipo, según lo indique tu maestro(a), y consulta tu texto y tu cuaderno.

a) ¿Qué es una tasa?

b) ¿Qué entiendes por tasa constante?

c) ¿Qué entiendes por tasa variable?

d) ¿A qué se le llama razón de una progresión?

e) ¿A qué se le llama progresión geométrica?

f) ¿Cuál es la diferencia entre una progresión geométrica creciente y una decreciente?

g) ¿Qué entiendes por crecimiento exponencial?

h) ¿Qué es una progresión aritmética?

i) ¿Cómo es la gráfica de una progresión aritmética y cómo la de una geométrica?

j) ¿Qué entiendes por población?

k) ¿Qué es una muestra?

l) Enumera algunas ventajas que tenga el muestreo de una investigación.

m) Menciona tres campos donde se aplique la encuesta para planeación nacional.

n) ¿Qué diferencia hay entre encuesta y censo?

o) ¿Cuántos tipos de censos hay y cuáles son?

p) ¿Cómo se calcula la densidad de una población, de una ciudad o región, de un país?

q) ¿Cuáles son las medidas de tendencia central que conoces?

r) ¿Cómo se calcula cada una de estas medidas de tendencia central?

s) ¿Qué entiendes por desviación media?

t) ¿Cómo se calcula la desviación media de una serie de datos?

Compara tus respuestas con las de otro equipo, y si tienes dudas, consulta con tu maestro(a).

Resuelve tú solo esta sección.

1. Una persona obtiene un préstamo de $ 500, pero le fijan una taza de interés mensual constante de 4.5%. ¿Cuánto pagará en total al cabo de tres meses?

Usa una tabla como estas:

Mes	Capital ($)	Tasa	Crecimiento ($)	Nuevo capital ($)
1o.	500 000	4.5%	22 500	522 500
2o.		4.5%		
3o.		4.5%		

2. En una población de 5 000 habitantes se tomó una muestra al azar de 30% y se encontró que 870 personas son menores de 15 años. ¿Cuántos habitantes de dicha población son menores de 15 años? Realiza las operaciones en tu cuaderno.

3. Calcula la media, la mediana y la moda para los siguientes datos.

2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 7 ,7 8, 8, 8, 9, 10, 10

Media =   Mediana =   Moda =

CLAVE

a) Se usa como un sinónimo de tanto por ciento aplicable a una cantidad en determinado tiempo.
b) El porcentaje que no varía en el tiempo establecido.
c) El porcentaje que sí varía en el tiempo acordado.
d) Es la cantidad constante que afecta a otra.
e) Es la serie de términos que van cambiando al multiplicarse por otro, llamado razón.
f) Progresión geométrica creciente cuando la razón es mayor que uno, decreciente si la razón es menor que uno.
g) Es la progresión que aumenta al multiplicar por una cantidad constante, llamada razón; es sinónimo de progresión geométrica.
h) Es una serie de términos que aumenta al sumarles una cantidad o disminuye al restarse la misma cantidad (llamada razón) en forma constante.

i) La de una progresión geométrica es una curva; la de una progresión aritmética es una recta.
j) En cualquier colección de datos con características particulares de un grupo específico de estudio.
k) Es parte de una población que se selecciona para realizar una investigación.
l) Bajo costo, ahorro de tiempo, facilidad para investigar una especialización, análisis rápido de resultado.
m) Producto agrícola, desempleo, uso de la tierra, etcétera.
n) En el censo se aplica a toda una población y la encuesta se realiza a una muestra de la población elegida al azar.
o) Dos: de población y económicos
p) Dividiendo el número de habitantes de una población entre la extensión territorial.
q) Media, mediana, y moda.
r) La medida se obtiene sumando todos los datos y dividiendo el total entre todos los números de éstos; la moda es el dato que mayor numero de frecuencias tienen y la media es el valor que se encuentra en el medio de todos los datos
s) Medida de dispersión con la cual se calculan todas las desviaciones.
t) Se calculan las desviaciones de cada dato con respecto a la media, se suman los valores absolutos de las desviaciones y se divide el total entre el número de ellas.

Mes	**Capital ($)**	**Tasa**	**Crecimiento ($)**	**Nuevo capital ($)**
1o.	500 000	4.5%	22 500	522 500
2o.	522 500	4.5%	23 510	546 010
3o.	546 010	4.5%	24 570	570 580

2) 2 900, aproximadamente, son menores de 15 años.

3) Media = 5.9 Mediana = 6 Moda = 3 y 8

90 ¿QUÉ SERÁ?

167-3

Probabilidades de un evento
Determinación de la probabilidad de un evento

Algunos de los juegos, en los que seguramente has participado, reciben el nombre de "azarosos", ya que tienen un resultado impredecible. Pero entonces, ¿qué probabilidades tienes de ganar?

Ve el video y observa cómo puedes encontrar la probabilidad de que ocurra un resultado determinado en un experimente azaroso.

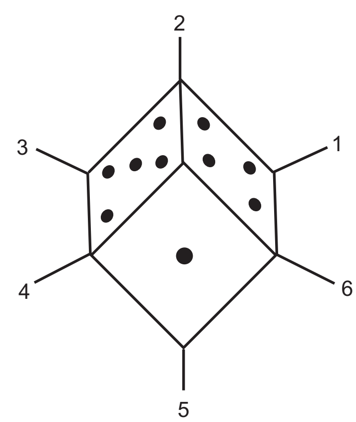
Forma un equipo, lee y analiza el texto. Discute en el grupo qué entiendes por espacio muestral.

PROBABILIDAD DE UN EVENTO

Existen situaciones cuyos resultados son impredecibles. Si, por ejemplo, se lanza al aire un dado, existen varios resultados **posibles**; sin embargo, ninguno de ellos es seguro.

Al realizar varias veces el experimento, es decir, lanzar varias veces el dado, se puede llevar el registro de los resultados obtenidos y establecer así la probabilidad de que ocurra cada suceso.

Pero esa probabilidad se puede señalar observando los diferentes resultados que se pueden obtener; esto es 1, 2, 3, 4, 5 o 6.



Si el dado lanzado es un dado normal, es decir si el dado no está "cargado", la probabilidad de que salga cada una de caras será de una entre seis, esto es $\frac{1}{6}$.

Un evento es la ocurrencia de un fenómeno determinado en un experimento dado.

Un evento puede ser simple o compuesto.

Si el experimento consiste en lanzar un dado, se espera que ocurra el evento “obtener 5”; existe sólo un resultado que satisface el experimento, por lo tanto es un evento simple.

Un evento simple o elemental consta de un resultado único.

Si en el experimento se espera el evento “obtener el número menor que 4”, los resultados 1, 2, 3, satisfarán el experimento. A esto se le conoce como evento compuesto.

Un evento compuesto consta de dos o más eventos simples.

Ahora bien, “obtener 1”, al lanzar el dado, excluye la posibilidad de “obtener 2”; entonces ¿cuál es la posibilidad de que ocurra el evento compuesto “obtener 1 o 2” al alcanzar el dado? Si cada uno de los primeros eventos tiene $\frac{1}{6}$ de probabilidad de salir, entonces

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Así, el evento” obtener un número diferente a 1 o 2” será $\frac{4}{6}$, pues las probabilidades restantes suman el total de probabilidades:

$$\frac{2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{6}{6}$$

si se tiene el suceso “obtener un número par” al lanzar el dado, éste se define, en probabilidad, como un evento compuesto; y su probabilidad sería de

$$\frac{3}{6} \text{ o } \frac{1}{2}$$

La probabilidad de que un evento ocurra o no se determina con el cociente del número de resultados favorables, entre el número total de resultados posibles del experimento.

$$P(E) = \frac{\text{número de eventos favorables}}{\text{número total de eventos posibles}}$$

Al sumar la probabilidad de todos los eventos posibles, el resultado será 1:

$$\frac{2}{6} + \frac{4}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

En el experimento “lanzar un dado”, el total de resultados determina todo el espacio muestral de eventos considerados.

El espacio muestral es el total de resultados posibles en un experimento.

El espacio muestral se denota con la letra **S**; en el ejemplo anterior sería:

S:

1, 2, 3, 4, 5, 6

Reúnete en equipo y resuelve el ejercicio que se indica.

Si se realiza el experimento de lanzar al aire una moneda:

a) ¿Qué resultados puedes obtener?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara?

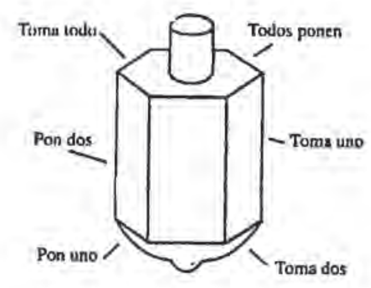
c) ¿Cuál es la posibilidad de obtener sello?

d) ¿Cuánto suman ambas probabilidades?

e) ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

Compara tus resultados con los de otro equipo. Si hay diferencias discútelas y corrígelas en caso de error.

Sigue trabajando con tu equipo, observa la siguiente perinola y responde:



1. ¿Cuál es su espacio muestral?

2. Señala un evento simple.

3. ¿Cuál será su probabilidad?

4. Señala un evento compuesto.

5. ¿Cuál será su probabilidad?

Lee tus respuestas ante el grupo, si hay errores corrige.

Reúnete con un compañero(a) y completa los siguientes ejercicios:

Se toma una baraja española cuyas cartas son: 10 oros, 10 espadas, 10 copas, 10 bastos, y se señalan los siguientes eventos. Indica si son simples o compuestos.

a) Obtener as:

b) Obtener oros:

c) Sacar el 8 de espadas:

d) Sacar el rey de bastos:

2. Determina la probabilidad de que ocurre cada uno de los eventos anteriores.

3. ¿Cuál es el espacio muestral del experimento?

Revisa la validez de tus respuestas comparándolas con la clave. Si hay diferencias corrige.

CLAVE

1) a) compuesto b) compuesto c) simple d) simples

2) $\frac{4}{40} = ó = \frac{1}{10}$ b) $\frac{10}{40} = ó = \frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{40}$ d) $\frac{1}{40}$

3) As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sota, caballo rey de oros.
As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sota, caballo rey de copas.
As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sota, caballo rey de bastos.
As, 2, 3, 4, 5, 6, 7, sota, caballo rey de espadas.

91

168-3

A MENUDO

Frecuencia absoluta y frecuencia relativa

¿Has notado la frecuencia con que se celebran fiestas en tu comunidad? Este tipo de datos es muy importante en estadística, pues ayuda a prever situaciones futuras.

Ve el video y observa en qué consiste la frecuencia de un proceso; comenta con tu grupo lo que te haya parecido más interesante en él.

Lee con un compañero(a) el siguiente texto. Discute entre tus compañeros(as) de grupo, cuál es la diferencia entre la frecuencia absoluta y frecuencia relativa.

FRECUENCIA ABSOLUTA Y FRECUENCIA RELATIVA

¿Con qué frecuencia llueve en un lugar determinado? ¿Cuál es la frecuencia con que ocurre un eclipse? Esta y otras preguntas se escuchan en ocasiones, pero ¿qué es la frecuencia?

Si se realiza un experimento, por ejemplo, al lanzar una moneda al aire, el espacio muestral es:

S: CARA (C) , SELLO (S)

Si el experimento se realiza diez veces y se registran los resultados siguientes:

C S C C C S S C C C

Se puede observar que se obtuvo siete veces cara y tres veces sello, por lo tanto, la frecuencia de cada evento es:

Sello = 3
Cara = 7

Si se dice que en una serie de lanzamientos se obtuvieron 3 sellos, este informe es vago y no ofrece ningún dato utilizable en la solución de futuros problemas. Este recibe el nombre de frecuencia absoluta.

La frecuencia absoluta hace referencia al número de veces que se ha obtenido un determinado evento.

Existe otra forma de señalar la frecuencia de un evento.

Esta consiste en indicar el número de veces que se ha obtenido determinado evento en relación con el número de veces que se ha realizado el experimento.

En el ejercicio anterior se observa que tres sellos se obtuvieron en diez lanzamientos, esto es $\frac{3}{10}$ que representa 30% del total.

A esto se le llama frecuencia relativa.

La frecuencia relativa es el porcentaje que representa el número de veces que se produce determinado evento, en relación con el total de veces que se realiza el experimento.

La frecuencia se denota con **fi** y la frecuencia relativa con (**fi**/**N**) 100%.

Los datos anteriores se pueden concentrar en una tabla de frecuencias. En ella se señala la clase en la cual pueden anotarse los datos cualitativos o intervalos de datos cuantitativos (**i)**, la frecuencia absoluta (**fi)** y la frecuencia relativa (**fi**/**N**) 100%.

INTERVALOS DE CLASE	**FRECUENCIA (fi) ABSOLUTA**	**FRECUENCIA RELATIVA (fi/N) 100%**
Sello	3	30
Cara	7	70
Total	10	100

Una tabla de frecuencia ofrece, de una manera rápida, una visión global.

Organízate en grupo con dos compañeros(as) más.

1. Lanza una moneda al aire diez veces. Anota el resultado de cada evento ocurrido; puedes usar una tabla como:

Cara	I I ...
Sello	I I I I ...

2. Registra en tablas análogas los resultados obtenidos por tus compañeros(as).

3. Con la suma de los tres registros elabora una tabla de frecuencias como la siguiente:

CLASE	FRECUENCIA (fi) ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA (fi/N) 100%
Cara		
Sello		
Total		

Comparte tus resultados con los otros grupos.

Con tus compañeros(as) de equipo analiza y resuelve el siguiente ejercicio.

En el lanzamiento de un dado se han registrado los siguientes resultados:

1 ________ 3 veces   4 ________ 7 veces

2 ________ 0 veces   5 ________ 2 veces

3 ________ 5 veces   6 ________ 3 veces

1. Usando estos datos elabora una tabla de frecuencias como la siguiente:

CLASE	FRECUENCIA (fi) ABSOLUTA	FRECUENCIA RELATIVA (fi/N) 100%
1 – 2		
3 – 4		
Total		

2. Contesta las preguntas:

a) ¿Cuál es la frecuencia con que se obtuvo 4 o un número menor que 4?

b) ¿Cuál es la frecuencia relativa en este caso?

c) ¿Cuál es la frecuencia con que se obtuvo 5 ó 6?

d) ¿Cuál es la frecuencia relativa?

e) ¿Cuántas veces se realizó el experimento?

f) ¿Cuál es la frecuencia relativa con que se obtuvo 1 ó 2?

g) ¿Cuánto suman las frecuencias relativas?

Compara tus respuestas con las de tus compañeros(as), si hay errores, corrige.

Realiza individualmente el siguiente ejercicio. Para ello, en tu cuaderno, registra en una tabla de frecuencias lo que falta y contesta lo que se pide.

Registro de las enfermedades de los alumnos de un grupo de octavo grado.

Clase	**(fi)**	**(fi/N) 100%**
Paperas	5	
Gripe	15	
Varicela	4	
Hepatitis	1	
Total		

1. ¿Cuál es la enfermedad más frecuente en este grupo?

2. ¿Cuál es menos frecuente?

3. ¿Cuál es la frecuencia relativa de la varicela?

4. ¿Cuál es más frecuente: las paperas o la varicela?

Compara tus respuestas con la clave, si hay deferencias, revisa nuevamente y corrige.

CLAVE

Clase	(fi)	(fi/N) 100%
Paperas	5	20
Gripe	15	60
Varicela	4	16
Hepatitis	1	4
Total	25	100

1) Gripe   2) Hepatitis   3) 16%   4) Las paperas.

92 RECTA EXCLUSIVA

169-3

La probabilidad clásica
Diferencia entre la probabilidad teórica y la experimental y cálculo de la primera

Cuando se tiene antecedentes de determinado experimento, es fácil saber qué evento es más probable que otros. Pero, hay un procedimiento que nos indica cuál es la probabilidad de cada evento posible en un experimento. ¿Quieres conocerlo?

Con tu grupo de trabajo, empecemos analizando un experimento de azar.

Tienes en una caja 10 canicas azules, 5 rojas y 3 verdes. De ella se va a sacar una, sin que se pueda ver de antemano su color.

1. ¿Qué canica crees que sea más probable extraer? ¿Por qué?

2. ¿Cuál sería menos probable sacar? ¿Por qué?

3. Si apuestas a sacar una canica roja, ¿cuántas canicas hay en la caja que favorecerían tu apuesta?

4. Si uno de tus compañeros(as) apuesta a sacar una canica roja y otro a sacar una verde, ¿quién de ellos tendrá más opción de ganar? ¿Por qué?

Comparte tus respuestas con otros compañeros(as).

Con tus compañeros(as) de equipo, lee y analiza el siguiente texto:

LA PROBABILIDAD CLÁSICA

No siempre es posible realizar repetidamente un experimento para determinar sus frecuencias relativas y así señalar la probabilidad de que se obtenga determinado evento.

Si, por ejemplo, se desea conocer la probabilidad de que al lanzar un dado al aire, se obtenga el número 6, esta se podría calcular lanzándolo un cierto número de veces y registrando tales resultados.

Sin embargo, existe una forma de establecer la probabilidad de dicho evento antes de iniciar cualquier experimento. En efecto, si se sabe que cada cara del dado tiene la misma probabilidad de salir y existen seis diferentes resultados posibles, cada una de ellas tendrá una posibilidad entre seis opciones equiprobables, esto es:

$$\frac{1}{6}$$

Con lo que se puede afirmar que la probabilidad de obtener una cualquiera de sus caras es $\frac{1}{6}$.

Si el evento es obtener un número mayor que 4, los dos resultados que satisfacen esa condición son el 5 y el 6. Si se suman ambos, puesto que “sacar 5” excluye “sacar 6”, la probabilidad del evento será de $\frac{2}{6}$.

Estos ejemplos nos ayudarán a construir una expresión para encontrar la probabilidad de un evento determinado:

¿Qué expresa $\frac{1}{6}$? o ¿qué expresa $\frac{2}{6}$?

Estas razones se construyen entre:

“El número de resultados favorables” : 1 y 2 en nuestros ejemplos.

Y “El número de resultados posibles del evento; en este caso 6, en ambos ejemplos.

En general se tiene:

Probabilidad del evento: $P(A) = \dfrac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número de resultados posibles}}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Ahora deseamos conocer la probabilidad de sacar una canica de un color determinado, de una caja en la que hay 10 **azules**, 5 **rojas** y 3 **verdes**.

La probabilidad esperada de sacar una canica **azul** será:

$$P(A) = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número de resultados posibles}} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$$

Ya que en la caja hay 10 canicas azules y la obtención de cada una de ellas daría la oportunidad de acertar. El número de resultados posibles es 18, ya que en la caja hay 10 + 5 + 3 = 18 canicas en total.

De manera análoga, la probabilidad de sacar una canica **roja**, será:

$$P(R) = \frac{n(R)}{n(S)} = \frac{5}{18}$$

y la probabilidad de sacar una canica **verde** será:

$$P(V) = \frac{n(V)}{n(S)} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

La probabilidad esperada o teórica de que suceda un evento, cuando los sucesos elementales son equiprobables se puede calcular mediante la expresión o fórmula clásica, llamada también Ley de Laplace así:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{número de resultados favorables}}{\text{número de resultados posibles}}$$

La probabilidad clásica y la frecuencia están estrechamente relacionadas, pues mientras sea mayor el número de veces que se realiza el experimento, la frecuencia relativa se acercará cada vez más a la probabilidad clásica. A esto se le conoce como **Ley de los grandes números**.

Si se señala el evento “obtener 3 ó 2” al lanzar un dado al aire, la probabilidad favorable de ese evento es $\frac{2}{6}$, en tanto que la desfavorable es $\frac{4}{6}$. Si se suman ambas probabilidades, se tiene:

Probabilidad favorable + probabilidad desfavorable = $\frac{2}{6} + \frac{4}{6} = 1$

La suma de la probabilidad favorable más la desfavorable en un evento determinado es siempre 1.

Observa el video, el cual te aclarará muchos aspectos acerca de la probabilidad esperada, llamada clásica, de un evento. Comparte tus experiencias con tus compañeros(as).

Con tu compañero(a) más cercano, analiza las siguientes situaciones y anota tus respuestas, en tu cuaderno.

1. En un salón de clases hay doce alumnos: José, Saúl, Joel, Carlos, Jesús, Sergio, Alfonso, Sandra, Aurora, Pilar, Julia y Maribel.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

Si se escoge una persona al azar, señala la probabilidad de que:

b) Sea hombre.

c) Sea mujer.

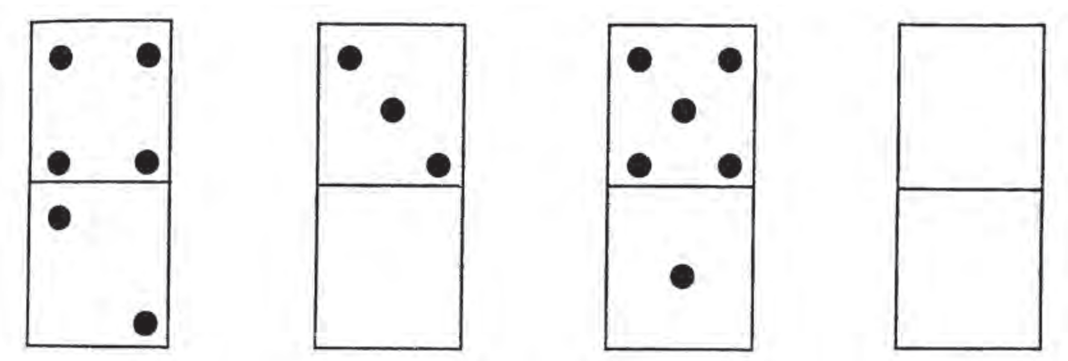
d) Sea una persona cuyo nombre inicie con la letra J.

e) Su nombre inicie con M.

2. En una caja se guarda un juego de dominó con sus fichas completas.

a) ¿Cuál es su espacio muestral?

Si se tienen las siguientes fichas de dominó y se extrae una al azar, ¿cuál es la probabilidad de obtener:



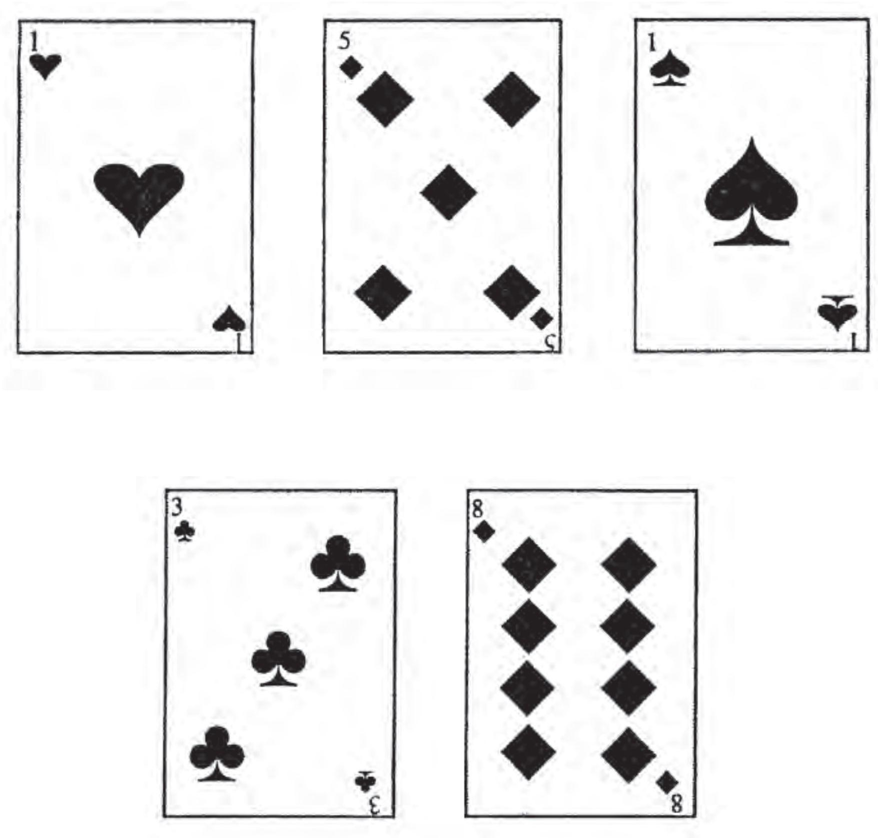
b) Una ficha cuya suma sea cero.

c) Una ficha cuya suma sea seis.

d) Una ficha cuya suma sea tres.

De manera individual, realiza el siguiente ejercicio.

Si tiene las siguientes cartas de una baraja y tomas una al azar, señala cuál es:



1. El espacio muestral.

   La probabilidad de obtener:

2. Un as
3. Corazones
4. Diamantes
5. Una carta mayor que tres
6. Una carta menor o igual que 3
7. ¿Cuál es la suma de las dos anteriores probabilidades?

Revisa tus respuestas comparándolas con las de la clave. Si hay diferencias, realiza las modificaciones necesarias. Procura ubicar el proceso donde te equivocaste, así sabrás por qué fallaste.

CLAVE

1. S: as de corazones, 5 de diamantes, as de picas, 3 de tréboles, 8 de diamantes.

2. $\frac{2}{5}$ **3.** $\frac{1}{5}$ **4.** $\frac{2}{5}$ **5.** $\frac{2}{5}$ **6.** $\frac{3}{5}$ **7.** 1

92 ¡PARA NADA!

170-3

Probabilidad nula
Manejo de la probabilidad nula de un evento

Al estudiar otras sesiones se ha observado que la probabilidad de que suceda un evento siempre ha resultado ser mayor que cero o menor que uno. ¿Sabían que también se dan situaciones en dónde la probabilidad es cero?

Trabaja con tus compañeros(as) de grupo sobre la siguiente situación.

En un cajón del armario hay veinte medias blancas y dos negras. Ordena los siguientes eventos del más probable al de menor probabilidad.

Hazlo en forma cualitativa, no necesitas hacer cálculos.

Sacar sin mirar.

- Dos medias que sean blancas
- Una media blanca y otra negra
- Tres medias negras
- Dos medias negras

- Tres medias, donde dos sean del mismo color.

Compara tu trabajo con el de tus compañeros(as).

Observa con atención el video ya que en este se mostrarán algunos ejemplos en donde la probabilidad es cero y se explicará a qué se debe ello. Después comenta con tu compañero(a) más próximo los aspectos más interesantes del video.

Lee y analiza el siguiente texto. Luego comenta con tus compañeros(as) las dudas surgidas y aclláralas.

PROBABILIDAD NULA

Existen problemas que aparentemente son difíciles de solucionar, sobre todo cuando tienen que ver con la probabilidad. Pero en sí su resolución es muy sencilla; observa el siguiente ejemplo:

En un equipo hay 20 estudiantes: 7 son mujeres que tienen ojos cafés, otras 4 tienen cabello castaño y ojos cafés, 5 son hombres de ojos cafés y los 4 restantes son hombres de cabellos castaños y ojos negros. Si se selecciona un estudiante al azar, qué probabilidad habría de que sea:

a) Una mujer

b) Un hombre

c) Una mujer con ojos negros

a) Para obtener la probabilidad de que sea una mujer, se tiene lo siguiente:

n(A) = resultados del evento. En este caso 11, ya que son en total 11 mujeres.
n(S) = número total de resultados posibles, en este caso 20.
P(A) = probabilidad del evento.
La probabilidad de que al seleccionar un estudiante, éste sea mujer es:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{11}{20}$$

b) Para obtener la probabilidad de que sea un hombre, se tiene que:

n(A) = 9, ya que aquí se consideran los 9 hombres.
n(S) = 20

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{9}{20}$$

La probabilidad de que al seleccionar un estudiante, éste sea hombre es de:

$$\frac{9}{20}$$

c) Para obtener la probabilidad de que sea una mujer con ojos negros, se tiene:

De acuerdo con los datos del problema, únicamente se hace referencia a ojos cafés y a mujeres con cabello castaño y ojos cafés.

Como no existe información de mujeres con ojos negros, el resultado favorable de que este evento ocurra es cero, por consiguiente:

$$n(A) = 0$$
$$n(S) = 20$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{20} = 0$$

Esto indica que la probabilidad de seleccionar una estudiante que sea mujer con ojos negros es cero, ya que dicho elemento no existe en el espacio muestral.

Cuando esto ocurre, el evento que no forma parte del evento muestral se llama **evento imposible**, debido a que nunca va a ocurrir. Si dicho evento no va a ocurrir, esto trae como consecuencia que su probabilidad sea cero.

Cuando esto sucede, a dicha posibilidad se le conoce como **probabilidad nula**.

Observa otro ejemplo.

En una caja hay cinco tarjetas, en cada una de ellas está escrita una vocal diferente.

¿Cuál es la probabilidad de sacar una tarjeta que tenga la letra **e** y cuál la de sacar una tarjeta que tenga una consonante?

n(A) = 1, ya que se trata de una sola letra
n(S) = 5, debido a que son las cinco vocales
P(A) = ?

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{5}$$

La probabilidad de sacar una tarjeta que tenga la letra **e** es de $\frac{1}{5}$.

La probabilidad de que la tarjeta que se saque tenga una consonante es:

n(A) = 0, ya que en las tarjetas únicamente hay vocales.
n(S) = 5

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{5} = 0$$

La probabilidad de que al sacar una tarjeta, esta tenga una consonante es cero, ya que no hay consonantes en las tarjetas y nuevamente se considera que es un evento imposible de que suceda.

Sigue con tu equipo de trabajo, plantea y resuelve un problema en el cual se obtenga una probabilidad nula.

Espera a que el profesor(a) indique al integrante de cada equipo que lea su problema y exponga la forma de resolverlo.

Individualmente resuelve los siguientes problemas.

1. Al lanzar un dado:

a) ¿Cuál es el espacio muestral de este evento?

b) ¿Cuál es la probabilidad esperada de obtener cada uno de los sucesos del espacio muestral, si el dado es correcto?

c) Encuentra las siguientes probabilidades:

P(5) = ; P(6) = ; P(0) =

P(obtener un número par) = ; P(obtener un número menor que 4) =

P(obtener un número diferente de 2) =

P(obtener un número menor que 1) =

P(obtener un número múltiplo de 3) =

2. Una baraja francesa tiene 52 cartas. Hay cuatro pintas: corazones, tréboles, diamantes y picas. De cada pinta hay 13 cartas: tres figuras, K, Q y J y diez números as, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

a) ¿Cuál es el espacio muestral?

b) ¿Cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los sucesos del espacio muestral?

c) Calcula las probabilidades.

P(corazón) = ; P(K) = ; P(carta roja) =

P(un número) = ; P(una figura) =

P(un número mayor que 10) = ; P(no sacar figura) =

Organiza una sesión con tus compañeros(as) y el profesor(a) para discutir el resultado de sus trabajos.

94 DEMUESTRA ¡QUÉ SABES!

Evaluación de lo aprendido

Enfrentarte a la evaluación personal es un reto que te invita a superarte día a día. Te da la oportunidad de superar alguna dificultad que aún tengas y además de alegrarte con tus propios logros.

Trabaja individualmente en la resolución de los siguientes ejercicios.

1. Explica con un ejemplo lo que entiendes por población y muestra.

2. A cada estudiante de un curso se le preguntó cuántos hermanos eran en su casa. Los resultados de la encuesta son los siguientes:

3, 2, 4, 5, 4   1, 3, 3, 5, 2

3, 4, 3, 3, 4   2, 2, 4, 2, 7

a) ¿Cuántos hermanos hay en la familia más numerosa de estos estudiantes?

b) ¿Hay algunas familias que tengan un único hijo? ¿Cuántas?

c) Calcula la media, la mediana y la moda de estos datos.

d) Calcula la desviación media.

3. ¿Son sucesiones aritméticas las siguientes?

a) –11, –7, –3, 1, 5 … ¿Por qué?

b) 1, 3, 9, 27… ¿Por qué?

c) $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2... ¿Por qué?

4. De cierta progresión geométrica se conoce el primer término: $a = 2$ y la razón $r = 3$. Escribe sus cinco primeros términos.

5. En el lanzamiento de un dado el experimento se ha repetido 120 veces con los siguientes resultados:

Calcula la probabilidad experimental para cada suceso. Comprara cada una de estas

Puntaje obtenido	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
Frecuencia	14	16	18	19	20	23

probabilidades con la probabilidad esperada o teórica en el lanzamiento de un dado.

6. En el experimento anterior, ¿cuál es la probabilidad de sacar un número impar?

Compara la probabilidad esperada de lanzar un dado y obtener un número impar con la probabilidad encontrada en el experimento para este suceso.

Comparte los resultados de tu trabajo con los de tus compañeros(as). Invita a tu profesor(a) a esta actividad.

¡Has alcanzado otra meta en el horizonte
de las matemáticas, felicitaciones!