¡Amigo, amiga!

¿Sabías que durante tus doce años de escolaridad, básica y media, recibirás sin costo un total de 52 libros de estudio?

Profesores, expertos en las distintas disciplinas, diseñadores, editores, imprentas y repartidores han participado en preparar estos libros y en hacerlos llegar hasta donde tú estás. Aprende a quererlos, son tuyos y de todos los chilenos, que con trabajo y esfuerzo hacen posible que recibas este apoyo para mejorar día a día tus aprendizajes.

Úsalos en clase, estudia diariamente en tu casa, busca en ellos las respuestas a tus preguntas, aprovéchalos al máximo.

No escribas en ellos, no los recortes y no los rayes.

Da el ejemplo, cuida tus libros y entrégalos en buen estado para que otro estudiante tenga la misma oportunidad que tú tienes ahora.

Datos

Establecimiento: ______________________________

Dirección: ______________________________

Teléfono: ______________________________

Año 2009:

Nombre del Estudiante: ______________________________

Curso: ______________________________

Año 2010:

Nombre del Estudiante: ______________________________

Curso: ______________________________

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

textos@mineduc.cl

Aprendiendo a ser mejores

EDUCACIÓN CHILENA

El material didáctico **Matemática,**
para Octavo Año de Educación Básica,
es una obra colectiva, creada y diseñada
por el Departamento de Investigaciones
Educativas de Editorial Santillana,
bajo la dirección de
MANUEL JOSÉ ROJAS LEIVA

Coordinación Área Científico-Matemática:
Gabriel Moreno Rioseco

Edición:
Ángela Baeza Peña
Marcia Villena Ramírez

Ayudante de edición:
Pablo Jorquera Rozbaczylo

Autor:
Cristián Vergara Bize

Colaboración en la autoría:
Jaime Ávila Hidalgo
Lorna Jiménez Martínez
Ana Rojas Fernández

Corrección de estilo:
Isabel Spoerer Varela

Documentación:
Paulina Novoa Venturino
Juan Carlos Reyes LLanos

La realización gráfica ha sido efectuada
bajo la dirección de
VERÓNICA ROJAS LUNA

con el siguiente equipo de especialistas:

Coordinación gráfica:
Carlota Godoy Bustos

Diseño y diagramación:
Alfredo Galdames Cid
Ximena Moncada Lomeña
Patricia López Figueroa

Fotografías:
Archivo Santillana

Ilustraciones:
Martín Oyarce

Cubierta:
Xenia Venegas Zevallos

Producción:
Germán Urrutia Garín

www.santillana.cl
areaciencias@santillana.cl

Dr. Aníbal Ariztía 1444, Providencia, Santiago (Chile)
PRINTED IN CHILE
Impreso en Chile por Quebecor World Chile S.A.
ISBN: 956 - 15 - 1263 -7
Inscripción N° 159.848

MATEMÁTICA

TEXTO PARA EL ESTUDIANTE

8º

EDUCACIÓN BÁSICA

CRISTIÁN EUGENIO VERGARA BIZE
PROFESOR DE EDUCACIÓN MEDIA EN MATEMÁTICA,
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
POSTÍTULO EN ADMINISTRACIÓN DE ORGANIZACIONES EDUCATIVAS,
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Organización del texto

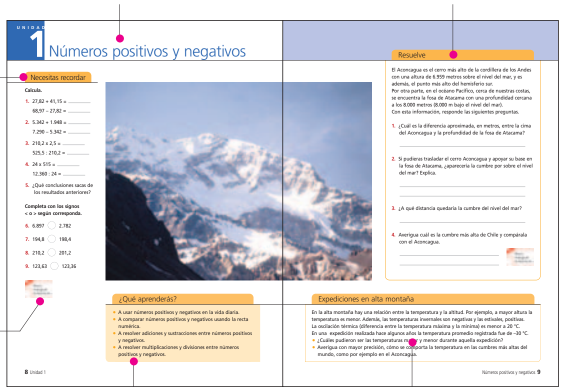
El texto **Matemática 8** se organiza en 8 **unidades** y dos **talleres de evaluación**.
A continuación se describen los tipos de páginas y secciones que encontrarás en las unidades.

1. Páginas de inicio de unidad. Su función es motivar y evaluar los contenidos que ya conoces y que podrás aplicar en la unidad. También te informa los contenidos que vas a aprender en esta unidad.

Necesitas recordar. Se proponen actividades para repasar y recordar aspectos importantes relacionados con los contenidos, antes de iniciar el trabajo de la unidad.

Título de la unidad

Actividades iniciales



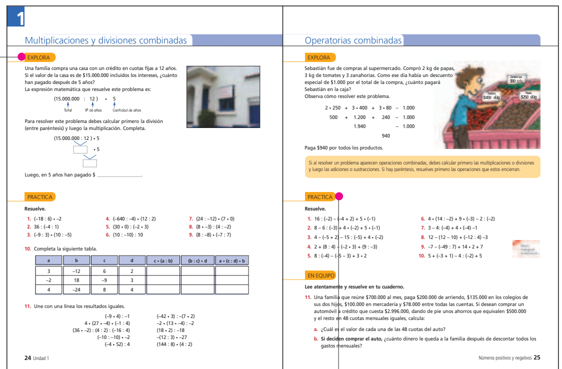
Hipertexto Sección que invita a los estudiantes a ingresar al hipertexto donde encontraran recursos y actividades interactivas que complementan el aprendizaje.

¿Qué aprenderás? Se señalan los principales objetivos a los que apunta el trabajo de la unidad.

Conexión con los objetivos transversales

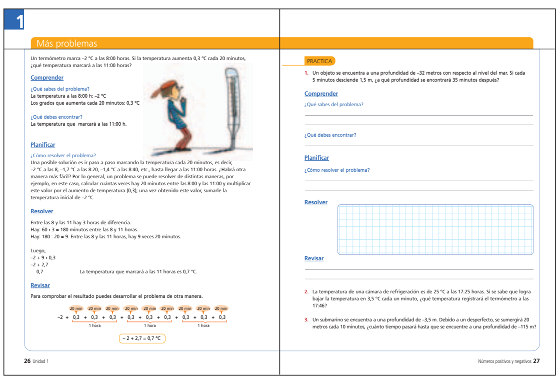
2. Páginas de desarrollo de contenidos. En estas páginas se desarrollan los contenidos y se presentan situaciones problemáticas resueltas que podrás usar como modelo. Incluyen tres importantes secciones: ***Explora***, ***Practica*** y ***En equipo***.

Explora. Se presenta la situación problemática resuelta y se resaltan los procedimientos fundamentales involucrados, al igual que los conceptos.



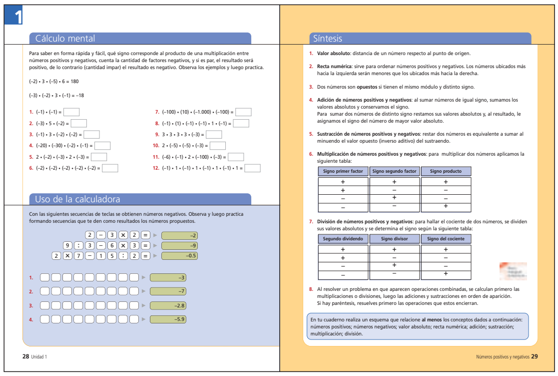
Practica. Actividades para adquirir, reforzar, razonar y consolidar los contenidos de la sección anterior.

3. Más problemas. Presenta un problema resuelto paso a paso; la compresión del problema, la planificación, la resolución y su revisión. Se deja en evidencia la estrategia utilizada y se dan actividades para que ejercites la estrategia presentada. Luego, se propone un problema de dificultad similar que tú debes resolver.



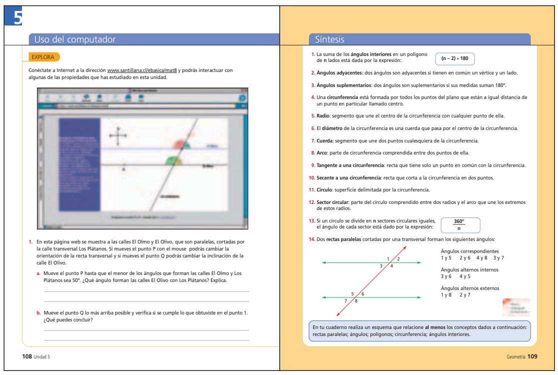
4. Cálculo mental. Se entregan distintas estrategias que te permitirán realizar cálculos de una manera más rápida y ágil.

5. Uso de la calculadora. Se pone a tu disposición la utilización de la calculadora como una herramienta tecnológica que podrás incorporar a tu vida diaria.

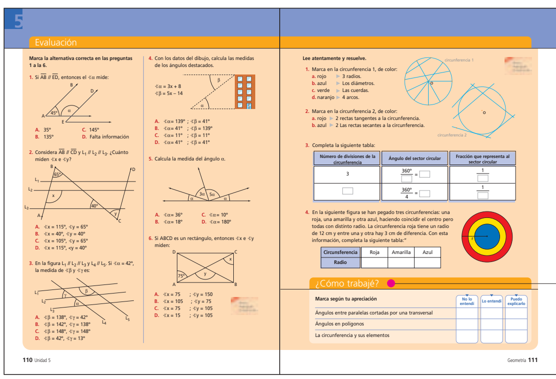


6. Síntesis. Este es un espacio en que los alumnos encontrarán un resumen de los conceptos y definiciones tratadas en la unidad. Además se les propone la creación de su propio esquema.

7. Uso del computador. Tendrás la oportunidad de conocer diversos programas y de conectar los contenidos trabajados en la unidad con esta herramienta tecnológica.

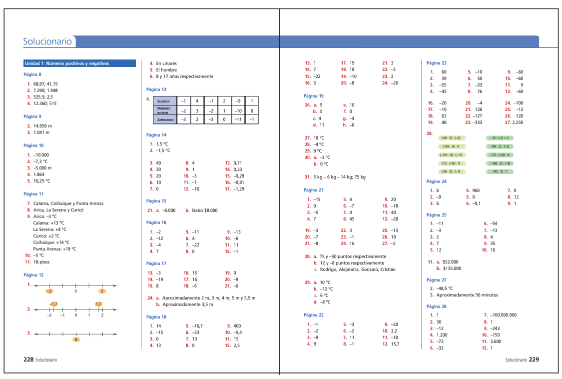


8. Evaluación. Páginas con preguntas de selección múltiple y de desarrollo orientadas a evaluar el aprendizaje de los contenidos trabajados en la unidad. Al finalizar se encuentra la sección ***¿Cómo trabajé?*** para que puedas autoevaluarte.



¿Cómo trabajé? Es una sección para la autoevaluación, en algunos casos de carácter actitudinal y en otros, procedimental.

9. Solucionario. Se dan las respuestas a las actividades formuladas en el texto.



Índice

UNIDAD 1

Números positivos y negativos

Necesitas recordar

Calcula.

1. 27,82 + 41,15 = ________

   68,97 – 27,82 = ________

2. 5.342 + 1.948 = ________

   7.290 – 5.342 = ________

3. 210,2 x 2,5 = ________

   525,5 : 210,2 = ________

4. 24 x 515 = ________

   12.360 : 24 = ________

5. ¿Qué conclusiones sacas de los resultados anteriores?

Completa con los signos < o > según corresponda.

6. 6.897 ◯ 2.782

7. 194,8 ◯ 198,4

8. 210,2 ◯ 201,2

9. 123,63 ◯ 123,36

Ahora trabaja en tu hipertexto

¿Qué aprenderás?

- A usar números positivos y negativos en la vida diaria.
- A comparar números positivos y negativos usando la recta numérica.
- A resolver adiciones y sustracciones entre números positivos y negativos.
- A resolver multiplicaciones y divisiones entre números positivos y negativos.

Resuelve

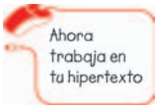
El Aconcagua es el cerro más alto de la cordillera de los Andes con una altura de 6.959 metros sobre el nivel del mar, y es además, el punto más alto del hemisferio sur.
Por otra parte, en el océano Pacífico, cerca de nuestras costas, se encuentra la fosa de Atacama con una profundidad cercana a los 8.000 metros (8.000 m bajo el nivel del mar).
Con esta información, responde las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la diferencia aproximada, en metros, entre la cima del Aconcagua y la profundidad de la fosa de Atacama?

2. Si pudieras trasladar el cerro Aconcagua y apoyar su base en la fosa de Atacama, ¿aparecería la cumbre por sobre el nivel del mar? Explica.

3. ¿A qué distancia quedaría la cumbre del nivel del mar?

4. Averigua cuál es la cumbre más alta de Chile y compárala con el Aconcagua.



Expediciones en alta montaña

En la alta montaña hay una relación entre la temperatura y la altitud. Por ejemplo, a mayor altura la temperatura es menor. Además, las temperaturas invernales son negativas y las estivales, positivas.
La oscilación térmica (diferencia entre la temperatura máxima y la mínima) es menor a 20 °C.
En una expedición realizada hace algunos años la temperatura promedio registrada fue de –30 °C.

- ¿Cuáles pudieron ser las temperaturas mayor y menor durante aquella expedición?
- Averigua con mayor precisión, cómo se comporta la temperatura en las cumbres más altas del mundo, como por ejemplo en el Aconcagua.

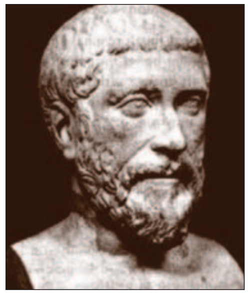
El uso de los números positivos y negativos

EXPLORA

Para señalar siglos o años antes de Cristo (a.C.) o después de Cristo (d.C.) se pueden utilizar los números positivos y negativos. Por ejemplo,

2750 a.C. correspondería al año: –2.750

1914 d.C. correspondería al año 1914



Pitágoras de Samos
580 a.C. al 500 a.C.

El signo "–" delante de un número indica que este es un número negativo, es decir, que es menor que cero.

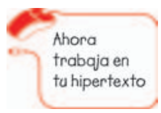
En una recta numérica, los números negativos están ubicados a la "izquierda" del cero, mientras que los números positivos (aquellos mayores que cero), se encuentran ubicados a la "derecha" del cero.

Ejemplo:

PRACTICA

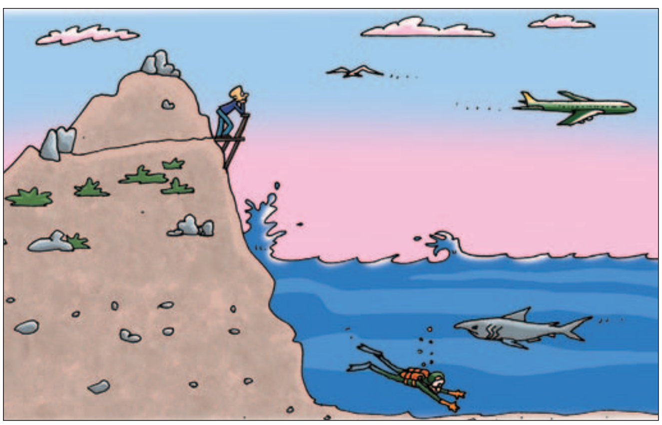
Expresa usando números positivos o negativos las siguientes situaciones.

1. El cultivo de las plantas y la domesticación de los animales se inició alrededor del año 10000 a.C.
2. Un termómetro marca 7,3 °C bajo cero.
3. El mar Mediterráneo tiene una profundidad máxima de 5.000 m.
4. En 1864 se creó la Cruz Roja.
5. La temperatura disminuyó a 10,25 °C en la noche.



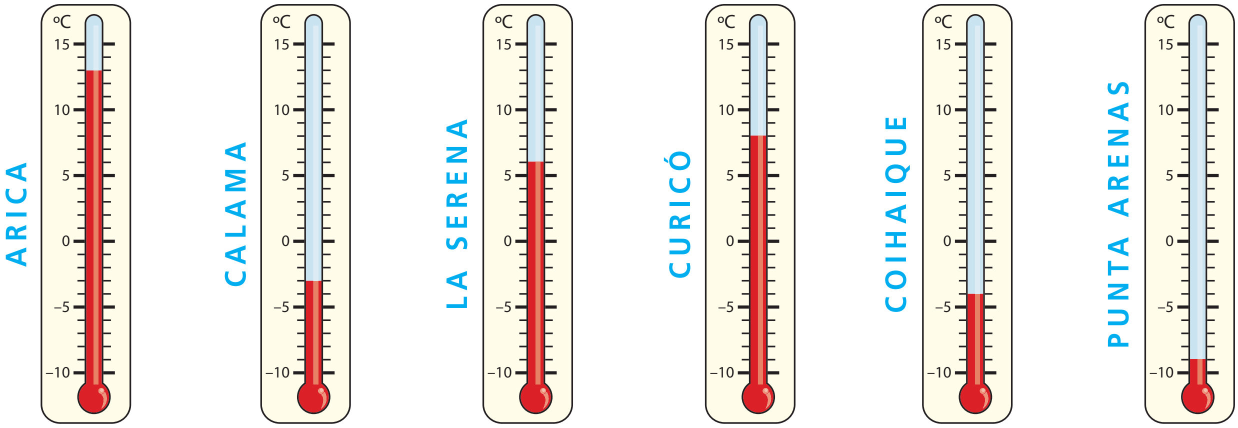
Observa la ilustración y resuelve.

6. ¿Qué elementos se encuentran sobre el nivel del mar y cuáles por debajo? Completa.



Sobre el nivel del mar	Bajo el nivel del mar

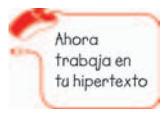
Observa las temperaturas mínimas registradas en un día en distintas ciudades de nuestro país y luego responde.



7. ¿En qué ciudades la temperatura alcanzó valores bajo cero?
8. ¿Qué ciudades tienen temperaturas positivas?
9. Si consideras que 10 °C es una temperatura agradable, ¿cuántos **grados más** o **menos** tendría que marcar el termómetro en **cada ciudad**, para disfrutar de una temperatura agradable?

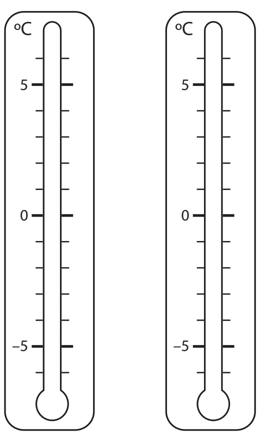
Lee y resuelve los siguientes problemas.

10. Inicialmente un termómetro marca 10 °C, en dos horas aumenta 20 °C y luego disminuye en 35 °C. ¿Cuál es la temperatura final que marca el termómetro?
11. En un edificio de 20 pisos y tres subterráneos (donde el piso 0 es el primer subterráneo) el ascensor realiza el siguiente recorrido: del piso 15 baja al 2, luego va al primer subterráneo, subiendo nuevamente al piso 3. ¿Cuántos pisos recorrió el ascensor en el recorrido dado? Para responder representa la situación en una recta numérica.



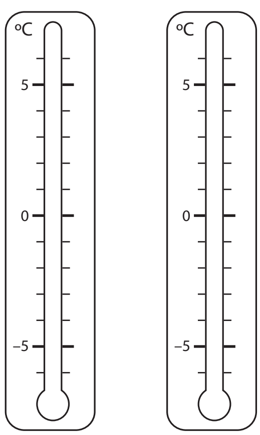
Marca en cada termómetro las temperaturas que se indican.

12. De 5 °C baja 3,5 °C



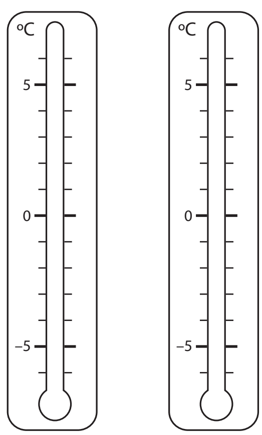
Antes Después

13. De –2,5 °C sube 1 °C



Antes Después

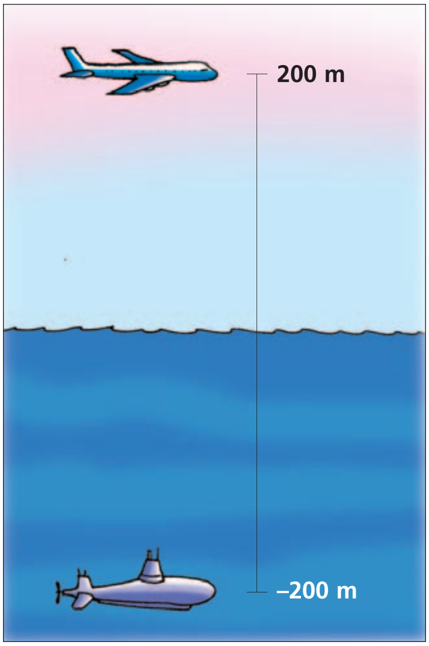
14. De 3,5 °C baja 4,5 °C



Antes Después

Valor absoluto

EXPLORA

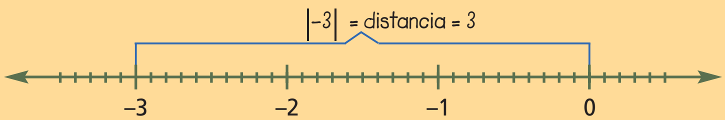


Observa la posición del avión y del submarino que aparecen en el dibujo. Ambas naves se encuentran a una distancia de 200 m del nivel del mar. Debes tener presente que para hablar de distancias **no** importa el signo del número.

Se llama módulo o valor absoluto de un número a la distancia que este tiene con respecto al punto cero u origen.

$|-3{,}2| = 3{,}2$ ▶ el módulo o valor absoluto de –3,2 es 3,2

$|2{,}7| = 2{,}7$ ▶ el módulo o valor absoluto de 2,7 es 2,7



PRACTICA

Ubica en la recta numérica los números cuya característica se indica.

1. Su valor absoluto es 2.
2. Su módulo es 1,7.
3. Su módulo es 0.

Resuelve los siguientes problemas.

4. En un día de invierno, Linares registró una temperatura mínima de 2,8 °C bajo cero y en Calama alcanzó los 3,2 °C bajo cero. ¿En qué ciudad la temperatura fue mayor? Revisa tu respuesta con tus compañeros(as).

5. Cierto hombre nació el año 8 a.C. y cierta mujer el año 17 a.C.
   a. ¿Cuál de los dos nació más próximo al nacimiento de Cristo?
   b. ¿Qué edad tiene cada uno a la fecha en que nace Cristo?

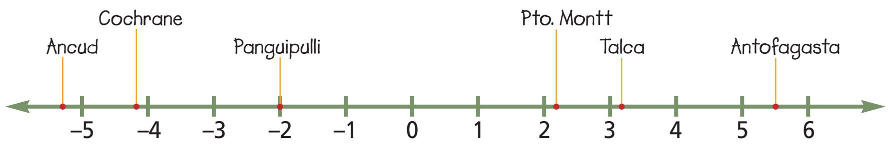
Comparación de números positivos y negativos

EXPLORA

Ciudad	Tº mínima
Antofagasta	5,5
Talca	3,2
Panguipulli	–2
Puerto Montt	2,2
Ancud	–5,3
Cochrane	–4,2

Al transmitir el informe del tiempo, un canal de televisión mostró las temperaturas mínimas registradas en varias ciudades de nuestro país.

Al ordenar estas temperaturas en una recta numérica podemos compararlas y así determinar cuál es la temperatura menor y la temperatura mayor.



En una recta numérica, los números que se encuentren más hacia la izquierda serán menores que los que se encuentren más hacia la derecha. Por ejemplo:

▶ $-2 < -1$

PRACTICA

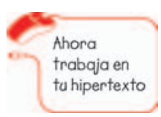
Ubica los números en cada recta y luego ordénalos de menor a mayor.

1. –3; 2; –5; –9 ☐ < ☐ < ☐ < ☐
2. –2,3; 1,5; –2,1; –1,6 ☐ < ☐ < ☐ < ☐
3. 0; 3; –3,8; –4 ☐ < ☐ < ☐ < ☐

Resuelve en cada caso.

4. Completa la tabla con los valores que faltan.

Sucesor			–1		–9	
Número entero	–2	3				
Antecesor				0		–1



5. Completa con los signos <, > o =, según corresponda.

a. –7 ◯ –3
b. –2 ◯ 5
c. |–8| ◯ 8
d. |–11| ◯ –12
e. |–2| ◯ |–5|
f. |–3,3| ◯ |–3,21|

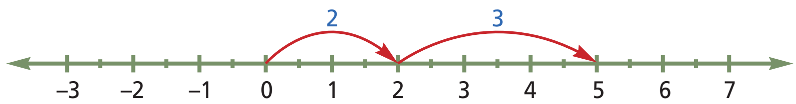
Adición de números positivos y negativos

EXPLORA

En un campeonato de fútbol, el 8° A ganó el primer partido con un marcador de 2 goles a favor.

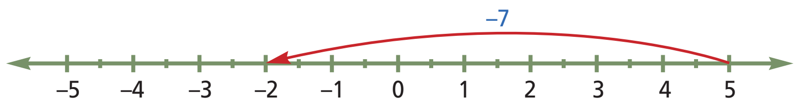
El partido siguiente lo ganó también, esta vez con 3 goles a favor. ¿Cuántos goles a favor lleva en total?

Esto lo escribimos así: 2 + 3 = 5



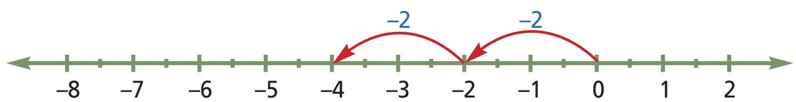
En el siguiente partido, el equipo tuvo peor suerte y perdió por 7 goles en contra. ¿Cuál es la diferencia de goles para este equipo hasta el momento?

Lo expresamos así: 5 + (–7) = –2



En el último partido, aún afectados por la derrota anterior, volvieron a perder, esta vez por 2 goles en contra. ¿Cuál es, finalmente, la diferencia de goles para este equipo?

Lo indicamos así (–2) + (–2) = –4

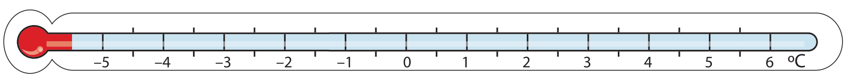


Entonces, podemos decir que le convirtieron 4 goles más de los que lograron hacer.

- Para sumar a un número otro de igual signo, se suman los valores absolutos y conservamos el signo.
- Para sumar números de distintos signos restamos sus valores absolutos y al resultado le asignamos el signo del número con mayor valor absoluto.

PRACTICA

Observa el ejemplo y usa el termómetro para responder.



Si había 2,5 °C bajo cero y la temperatura subió 4 °C, la temperatura final es de 1,5 °C.

1. Si había 0,5 °C bajo cero y la temperatura subió 2 °C, la temperatura final es: ____________
2. Si había 3 °C bajo cero y la temperatura subió 1,5 °C, la temperatura final es: ____________

Calcula.

3. 20 + 20
4. 20 + 10
5. 20 + 0
6. 20 + (–10)
7. 20 + (–20)
8. (–3) + 7
9. (–3) + 4
10. (–3) + 0
11. (–3) + (–4)
12. (–3) + (–7)
13. (–0,29) + 1
14. (–0,29) + 0,52
15. (–0,29) + 0
16. (–0,29) + (–0,52)
17. (–0,29) + (–1)

Resuelve en cada caso.

18. Completa los cuadrados mágicos de modo que la suma de cada fila, columna y diagonal sea la misma.

a.

9		5
	3	
1		–3

b.

–9		–5
	–3	
–1		3

c.

–6		–2
4	0	
		6

d.

6		2
–4	0	
		–6

19. Completa cada pirámide respetando la regla.

a + b	
a	b

a.

–2			
	–5	0	
–2			15

b.

0			
–10		0	
–7			–8

20. Completa la tabla.

a	b	c	a + b	a + c	c + b
2	–3	–4			
–1	4	2			
1	2	3			
–2	–2	–3			

Ahora trabaja en tu hipertexto

Observa cómo resolver y completa.

21. En mi cuenta corriente tengo un saldo de –$5.000 y gasté $3.000 más. ¿Cuánto dinero me queda?

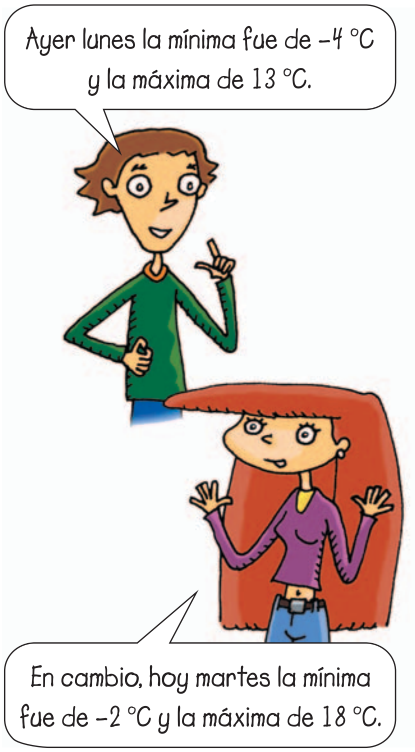
a. Planteo la suma: –5.000 + (–3.000) = ____________

b. Resuelvo usando la recta numérica:

c. Respondo: ____

Sustracción de números positivos y negativos

EXPLORA



¿En cuántos grados varió la temperatura en cada día? Observa cómo obtener la resta en cada caso.

Variación del día lunes:

$$13 - (-4) = 13 + 4 = 17$$

Variación del día martes:

$$18 - (-2) = 18 + 2 = 20$$

Es decir, el día martes hubo mayor variación de temperatura.
¿Cuál es la diferencia entre la temperatura mínima del lunes y la del martes?

$$-4 - (-2) = -4 + 2 = -2$$

Es decir, 2 °C de diferencia. El signo indica, en este caso, que la temperatura aumentó.
¿Cuál es la diferencia entre la temperatura máxima del lunes y la del martes?

$$13 - 18 = 13 + (-18) = -5$$

Es decir, 5 °C de diferencia. El signo indica, en este caso, que la temperatura aumentó.

- Dos números son opuestos si tienen el mismo valor absoluto y distinto signo. Por ejemplo, –2 y 2 son opuestos.
- Para restar dos números cualesquiera, al minuendo se le suma el valor opuesto del sustraendo.

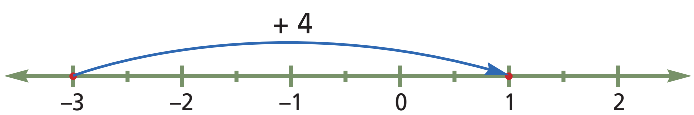
Ejemplo: $\underbrace{-4}_{\text{Minuendo}} - \underbrace{(-1)}_{\text{Sustraendo}} = -4 + \underbrace{(+1)}_{\text{Opuesto al sustraendo}} = -3$

PRACTICA

Ahora trabaja en tu hipertexto

Observa cómo representar en la recta numérica y luego resuelve en tu cuaderno.

$-3 - (-4) = -3 + 4$ ▶



▶ $-3 - (-4) = 1$

1. $-5 - (-3) =$ ______	**5.** $-9 - 2 =$ ______	**9.** $-5 - 8 =$ ______
2. $-7 - 5 =$ ______	**6.** $-4 - (-8) =$ ______	**10.** $-12 - (-6) =$ ______
3. $-5 - (-1) =$ ______	**7.** $-6 - 16 =$ ______	**11.** $4 - (-7) =$ ______
4. $3 - (-4) =$ ______	**8.** $-7 - (-7) =$ ______	**12.** $7 - 8 =$ ______

Completa con el número que falta.

13. 6 – ☐ = 9

14. –5 – ☐ = 14

15. 3 – ☐ = –5

16. 11 – ☐ = –4

17. 8 – ☐ = –8

18. ☐ + 6 = 0

19. ☐ –3 = –3

20. ☐ – (–2) = –7

21. –6 – ☐ = 0

Resuelve y completa.

22. ¿Cuál fue la variación de temperatura en cada día?

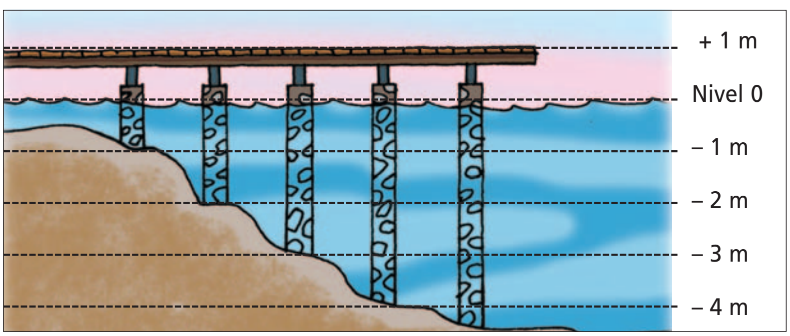
	Máxima	Mínima	Variación
Lunes	22,3 °C	12,3 °C	
Martes	17 °C	–2,5 °C	
Miércoles	15,8 °C	–4,3 °C	
Jueves	18,6 °C	12,5 °C	
Viernes	19,9 °C	–3,1 °C	

Ahora trabaja en tu hipertexto

23. Completa la tabla.

a	b	c	a – b	b – a	b – c	c – b	a – c
–3	–8	5					
10	–9	–4					
6	–15	3					
0	–1	1					

24. El esquema muestra los pilares de un puerto.



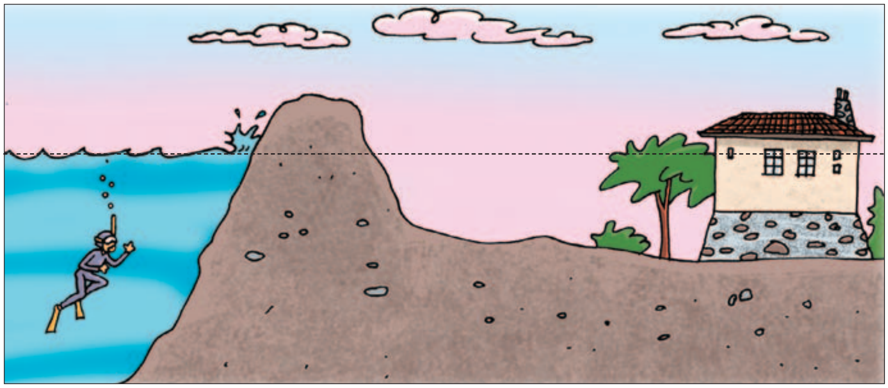
a. Considerando el muelle del puerto, ¿cuál es la longitud aproximada de cada pilar?

b. ¿Cuánto más largo es el pilar de mayor longitud que el de menor longitud?

Adiciones y sustracciones combinadas

EXPLORA

Algunos países de Europa, como Holanda, son llamados países bajos, debido a que gran parte de sus territorios se encuentran bajo el nivel del mar, y no porque la gente que ahí habita sea pequeña. En la ilustración aparece un esquema de niveles muy frecuentes en estos países y un buzo recorriendo sus costas.



Si un buzo se sumerge 4 metros, luego sube 2 metros y finalmente desciende 5 metros más, ¿a qué profundidad se encuentra al final de su recorrido?

Esta situación se puede expresar matemáticamente de la siguiente manera:

$$0 + (-4) + 2 + (-5)$$

Para resolver problemas como estos te sugerimos agrupar todos los números positivos y sumarlos; luego, agrupar todos los números negativos y sumarlos. Para terminar, suma los valores obtenidos.

$$0 + (-4) + 2 + (-5) = 0 + 2 + (-4) + (-5) = 2 + (-9) = -7$$

Si en un problema aparecen sustracciones de números, transfórmalas en adiciones. Por ejemplo:

$$-2 + 3 - (-4) + (-5) -2 = -2 + 3 + 4 + (-5) + (-2) = 3 + 4 + (-2) + (-5) + (-2) = 7 + (-9) = -2$$

PRACTICA

Calcula.

1. $7 - (-4) - (-3)$
2. $-3 + (-8) - 4$
3. $10 - (-19) + (-29)$
4. $18 - 6 - 8 + 5 - 3 + 7$
5. $2{,}7 - (-4{,}1) + (-15{,}2) - 8{,}3$
6. $-6 - 3 - (-8) + (-5) - 17$
7. $7 - (-9) - (-11) - 13 - 1$
8. $-15 - 10 - 25 - 50 + 100$
9. $-100 - 500 - (-400) + 600$
10. $(-5{,}3) - (-4{,}4) + 7{,}2 - 11{,}7$
11. $6{,}2 - (-7{,}8) + 1$
12. $1 - (3{,}2) + 4{,}7$

Resuelve calculando primero lo que está dentro de los paréntesis.

13. $-(-2 + 6) + (9 - 4)$
14. $-2 - (-6 - 4 + 3 - 2)$
15. $-4 - 9 + (-6 - 2) -1$
16. $[-4 - (-2 - 3) + 5] -1$
17. $(-24) + 43$
18. $8 - (-4 - 6)$
19. $-(-2 + 8) - (9 - 5)$
20. $-10 - (7 - 9)$
21. $-(-1 + 4) - (-7 + 1)$
22. $-3 - (-5 + 7 - 2)$
23. $-3 - (4 - 7 - 2)$
24. $(4 - 17) - (17 - 4)$

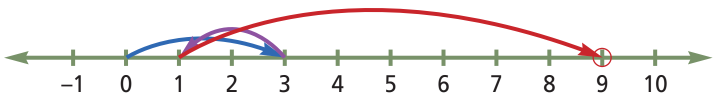
Resuelve en cada caso.

25. Une con una línea los resultados iguales.

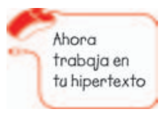
3 + (4 – 3)	–2 – (–4 + 5)	(3 – 5) – (–7 + 6)	3 – (4 – 3)	–2 + (–4 + 5)
–2 – 4 + 5	3 – 5 + 7 – 6	3 + 4 – 3	3 – 4 + 3	–2 + 4 – 5

26. Observa el ejemplo para resolver con una recta numérica.

3 + (–2) – (–8) = 3 + (–2) + 8 ▶



a. (–4) + 5 – (–4)
b. (–6) – (–8) – (–1)
c. 5 – (–3) + (–4)
d. 20 + (–3 – 5) + (–3) – (–2)
e. 10 – (–3) – 4 – (3 – 4)
f. 2 + (–2) – (13 – 4) + 9
g. (–4) – 5 + (3 + 1) – (–1)
h. (–3) – 3 + (–2 + 5) – (2 + 1)



Resuelve los siguientes problemas utilizando una recta numérica.

27. Desde 5 °C sobre cero, la temperatura se eleva 10 °C, luego desciende 3 °C y, finalmente, sube 6 °C. ¿Cuál es la temperatura final?

28. Comenzamos en 7 °C sobre cero, la temperatura desciende 4 °C, luego se eleva 1 °C y vuelve a descender 8 °C. ¿Cuál es la temperatura final?

29. ¿En cuántos grados descendió la temperatura si en el día hubo 12 °C y en la noche la temperatura fue de 3 °C?

30. El termómetro marcaba 3 °C y después de una hora la temperatura descendió 6 °C. Una hora más tarde bajó 4 °C. Finalmente la temperatura subió 7 °C.

a. ¿En cuánto varió la temperatura desde que el termómetro marcó 3 °C?
b. ¿Qué temperatura marcó finalmente el termómetro?

Expresa la siguiente situación usando números positivos y negativos y luego resuelve.

31. Los cambios bruscos de masa no son buenos para la salud. A partir del 1 de enero, la masa de un alumno varió así: ganó 5 kg, después perdió 6 kg, luego perdió otros 14 kg, pesando tres meses después 60 kg. ¿Qué masa tenía el día 1 de enero?

Multiplicación de números positivos y negativos

EXPLORA

Emilia está estudiando cómo se expande un virus computacional al mandar un e–mail que tiene un virus. Ella separó en 4 casos su información.

Primer caso

Cada día hay 5 nuevos computadores infectados (+5), entonces en 6 días más (+6) habrá:
(+5) • (+6) = + 30
30 computadores infectados.

Segundo caso

¿Cuántos computadores infectados menos había hace 4 días?
Sabemos que cada día hay 5 nuevos computadores infectados (+5), luego hace 4 días (–4):
(+5) • (–4) = –20
Había 20 computadores infectados menos de los que hay ahora.

Tercer caso

Si desde hace 2 días se infectan 7 computadores diariamente, ¿cuántos computadores infectados menos había hace 2 días?
(–2) • (+7) = –14
Había 14 computadores infectados menos de los que hay ahora.

Cuarto caso

Si desde hace 5 días (–5) dejan de infectarse 4 computadores (–4) diariamente, ¿cuántos computadores no se han infectado en los últimos 5 días?
(–5) • (–4) = 20
En los últimos 5 días tenemos 20 computadores sin problemas de virus.

En general, para multiplicar números positivos y negativos debes multiplicar sus valores absolutos y determinar el signo según la siguiente tabla:

+	•	+	=	+
–	•	+	=	–
+	•	–	=	–
–	•	–	=	+

PRACTICA

Calcula el resultado de los siguientes productos.

1. 3 • (–5)
2. 0 • (–3)
3. (–5) • 1
4. (–1) • (–7)
5. (–4) • (–1)
6. 1 • (–7)
7. 7 • 0
8. (–9) • (–5)
9. 2 • 10
10. (–6) • 3
11. (–5) • (–8)
12. 4 • (–7)

Expresa como producto de dos factores los siguientes números.

13. –1
14. +1
15. –16
16. +8
17. 0
18. –5

Completa con el factor que falta.

19. ☐ • (–7) = 21
20. 5 • ☐ = –35
21. ☐ • 9 = –72
22. 6 • ☐ = 18
23. (–4) • ☐ = 4
24. 4 • ☐ = 64
25. ☐ • (–7) = 91
26. (–10) • ☐ = –100
27. (–24) • ☐ = 48

Lee atentamente y resuelve.

28. Un grupo de 4 grandes amigos inventaron un juego en el que obtenían puntos al realizar ciertas tareas. Si no las cumplían, se anotaban puntos negativos. Aquí está el resumen después de 5 tareas.

    Rodrigo obtuvo 15 puntos en cada una de las tareas.
    Cristián obtuvo –10 puntos en cada tarea.
    Alejandra terminó con 60 puntos y en cada etapa obtuvo la misma cantidad de puntos.
    Gonzalo hizo la misma cantidad de puntos en cada tarea y al final terminó con –40 puntos.

    a. ¿Cuántos puntos obtuvieron Rodrigo y Cristián?
    b. ¿Cuántos puntos obtuvieron Alejandra y Gonzalo en cada etapa?
    c. Haz una lista ordenada según el puntaje obtenido.

29. Clemente ha comprado un aparato de aire acondicionado y lleva un rato haciendo pruebas con él. ¿Qué diferencia de temperatura respecto a la temperatura actual hay en cada uno de los siguientes casos?

    a. Si aumenta la temperatura 5 °C cada hora durante 2 horas.
    b. Si disminuye la temperatura 3 °C cada hora durante 4 horas.
    c. Si desde hace 2 horas está aumentando la temperatura 3 °C por hora.
    d. Si desde hace 4 horas está bajando la temperatura 2 °C por hora.

División de números positivos y negativos

EXPLORA

Para hallar el cociente de dos números, se dividen sus valores absolutos.
La siguiente tabla resume la regla de los signos para la división de dos números.

Signos del dividendo	Signos del divisor	Signos del cociente
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	+

Observa lo siguiente:

$4 \cdot 6 = 24$ → $24 : 6 = 4$; $24 : 4 = 6$

$12 \cdot 5 = 60$ → $60 : 5 = 12$; $60 : 12 = 5$

$(-4) \cdot 6 = (-24)$ → $(-24) : 6 = (-4)$; $(-24) : (-4) = 6$

$12 \cdot (-5) = (-60)$ → $(-60) : (-5) = 12$; $(-60) : 12 = (-5)$

Como tú ya sabes, y como puedes observar, **la división es la operación inversa de la multiplicación**, por lo tanto, al igual que esta operación, el signo del cociente de dos números, será positivo si ambos números tienen igual signo; de lo contrario, el cociente será negativo.

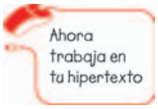
Al dividir dos números:

- que tienen igual signo, el resultado es siempre positivo.

  Ejemplos
  1. $120 : 10 = 12$
  2. $(-36) : (-9) = 4$

- que tienen diferentes signos, el resultado es negativo.

  Ejemplos
  1. $(-54) : 6 = -9$
  2. $20 : (-4) = -5$



PRACTICA

Calcula.

1. 120 : 2 =
2. 156 : 4 =
3. 164 : (–3) =
4. (–225) : 5 =
5. 270 : (–27) =
6. (–350) : (–7) =
7. (–333) : 11 =
8. (–456) : (–6) =
9. 120 : (–2) =
10. (–300) : 5 =
11. (–108) : (–12) =
12. 300 : ((–30) ÷ 6) =

Obtén dos números cuyo cociente sea el siguiente.

13. ☐ : ☐ = 48
14. ☐ : ☐ = –54
15. ☐ : ☐ = –1.024

Escribe en cada recuadro el número que falta para que se cumpla la igualdad.

16. 180 : (–9) = ☐
17. 240 : ☐ = –24
18. ☐ : (–9) = 7
19. ☐ : 12 = 4
20. 256 : ☐ = –64
21. ☐ : (–14) = –9
22. 1.524 : (–12) = ☐
23. ☐ : (–3) = 111
24. ☐ : 2 = –50
25. (–1.236) : ☐ = 103
26. (–720) : ☐ = –6
27. ☐ : (–15) = –150

28. **Une con una línea las divisiones cuyos resultados sean iguales (no olvides respetar la prioridad de las operaciones).**

(20 : 5) : (–2)	10 : (–5) : 2
(108 : 4) : 9	(48 : 2) : (–2)
(–120 : 6) : (–10)	(72 : (–9)) : 4
(72 : (–9)) : 8	– (48 : 2) : (–8)
(36 : 3) : (–1)	(42 : 3) : 7

Ahora trabaja en tu hipertexto

Multiplicaciones y divisiones combinadas

EXPLORA

Una familia compra una casa con un crédito en cuotas fijas a 12 años. Si el valor de la casa es de $15.000.000 incluidos los intereses, ¿cuánto han pagado después de 5 años?

La expresión matemática que resuelve este problema es:

$$\underbrace{(15.000.000}_{\text{Total}} : \underbrace{12}_{\text{Nº de años}}) \cdot \underbrace{5}_{\text{Cantidad de años}}$$

Para resolver este problema debes calcular primero la división (entre paréntesis) y luego la multiplicación. Completa.

$(15.000.000 : 12) \cdot 5$

$\boxed{} \cdot 5$

$\boxed{}$

Luego, en 5 años han pagado $ ____________________.

PRACTICA

Resuelve.

1. (–18 : 6) • –2
2. 36 : (–4 : 1)
3. (–9 : 3) • (10 : –5)
4. (–640 : –4) • (12 : 2)
5. (30 • 0) : (–2 • 3)
6. (10 : –10) : 10
7. (24 : –12) • (7 • 0)
8. (8 • –3) : (4 : –2)
9. (8 : –8) • (–7 : 7)

10. Completa la siguiente tabla.

a	b	c	d	c • (a : b)	(b : c) • d	a • (c : d) • b
3	–12	6	2			
–2	18	–9	3			
4	–24	8	4			

11. Une con una línea los resultados iguales.

(–9 • 4) : –1	(–42 • 3) : –(7 • 2)
4 • (27 • –4) • (–1 : 4)	–2 • (13 • –4) : –2
(36 • –2) : (4 : 2) : (–16 : 4)	(18 • 2) : –18
(–10 : –10) • –2	–(12 : 3) • –27
(–4 • 52) : 4	(144 : 8) • (4 : 2)

Operatorias combinadas

EXPLORA

Sebastián fue de compras al supermercado. Compró 2 kg de papas, 3 kg de tomates y 3 zanahorias. Como ese día había un descuento especial de $1.000 por el total de la compra, ¿cuánto pagará Sebastián en la caja?

Observa cómo resolver este problema.

$$2 \bullet 250 \;+\; 3 \bullet 400 \;+\; 3 \bullet 80 \;-\; 1.000$$

$$500 \;+\; 1.200 \;+\; 240 \;-\; 1.000$$

$$1.940 \;-\; 1.000$$

$$940$$

Paga $940 por todos los productos.

Si al resolver un problema aparecen operaciones combinadas, debes calcular primero las multiplicaciones o divisiones y luego las adiciones o sustracciones. Si hay paréntesis, resuelves primero las operaciones que estos encierran.

PRACTICA

Resuelve.

1. $16 : (-2) - (-4 + 2) + 5 \bullet (-1)$
2. $8 - 6 : (-3) + 4 \bullet (-2) + 5 \bullet (-1)$
3. $4 - (-5 + 2) - 15 : (-5) + 4 \bullet (-2)$
4. $2 + (8 : 4) - (-2 \bullet 3) + (9 : -3)$
5. $8 : (-4) - (-5 - 3) + 3 \bullet 2$
6. $4 \bullet (14 : -2) + 9 \bullet (-3) - 2 : (-2)$
7. $3 - 4: (-4) + 4 \bullet (-4) -1$
8. $12 - (12 - 10) + (-12 : 4) -3$
9. $-7 - (-49 : 7) + 14 \bullet 2 + 7$
10. $5 + (-3 + 1) - 4 : (-2) + 5$

Ahora trabaja en tu hipertexto

EN EQUIPO

Lee atentamente y resuelve en tu cuaderno.

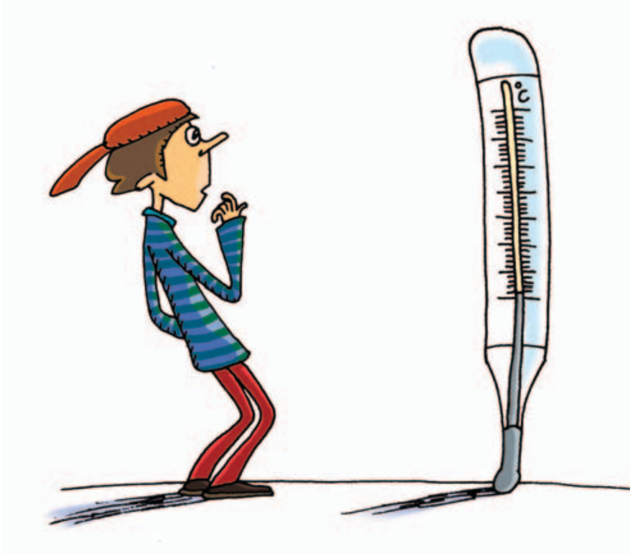
11. Una familia que reúne $700.000 al mes, paga $200.000 de arriendo, $135.000 en los colegios de sus dos hijos, $100.000 en mercadería y $78.000 entre todas las cuentas. Si desean comprar un automóvil a crédito que cuesta $2.996.000, dando de pie unos ahorros que equivalen $500.000 y el resto en 48 cuotas mensuales iguales, calcula:

   a. ¿Cuál es el valor de cada una de las 48 cuotas del auto?

   b. **Si deciden comprar el auto,** ¿cuánto dinero le queda a la familia después de descontar todos los gastos mensuales?

Más problemas

Un termómetro marca –2 °C a las 8:00 horas. Si la temperatura aumenta 0,3 °C cada 20 minutos, ¿qué temperatura marcará a las 11:00 horas?



Comprender

¿Qué sabes del problema?

La temperatura a las 8:00 h: –2 °C
Los grados que aumenta cada 20 minutos: 0,3 °C

¿Qué debes encontrar?

La temperatura que marcará a las 11:00 h.

Planificar

¿Cómo resolver el problema?

Una posible solución es ir paso a paso marcando la temperatura cada 20 minutos, es decir, –2 °C a las 8, –1,7 °C a las 8:20, –1,4 °C a las 8:40, etc., hasta llegar a las 11:00 horas. ¿Habrá otra manera más fácil? Por lo general, un problema se puede resolver de distintas maneras, por ejemplo, en este caso, calcular cuántas veces hay 20 minutos entre las 8:00 y las 11:00 y multiplicar este valor por el aumento de temperatura (0,3); una vez obtenido este valor, sumarle la temperatura inicial de –2 °C.

Resolver

Entre las 8 y las 11 hay 3 horas de diferencia.
Hay: 60 • 3 = 180 minutos entre las 8 y 11 horas.
Hay: 180 : 20 = 9. Entre las 8 y las 11 horas, hay 9 veces 20 minutos.

Luego,
–2 + 9 • 0,3
–2 + 2,7
0,7 La temperatura que marcará a las 11 horas es 0,7 °C.

Revisar

Para comprobar el resultado puedes desarrollar el problema de otra manera.

$$-2 + \underbrace{\overset{20\text{ min}}{0{,}3} + \overset{20\text{ min}}{0{,}3} + \overset{20\text{ min}}{0{,}3}}_{1\text{ hora}} + \underbrace{\overset{20\text{ min}}{0{,}3} + \overset{20\text{ min}}{0{,}3} + \overset{20\text{ min}}{0{,}3}}_{1\text{ hora}} + \underbrace{\overset{20\text{ min}}{0{,}3} + \overset{20\text{ min}}{0{,}3} + \overset{20\text{ min}}{0{,}3}}_{1\text{ hora}}$$

$$\boxed{-2 + 2{,}7 = 0{,}7\ °C}$$

PRACTICA

1. Un objeto se encuentra a una profundidad de –32 metros con respecto al nivel del mar. Si cada 5 minutos desciende 1,5 m, ¿a qué profundidad se encontrará 35 minutos después?

Comprender

¿Qué sabes del problema?

¿Qué debes encontrar?

Planificar

¿Cómo resolver el problema?

Resolver

Revisar

2. La temperatura de una cámara de refrigeración es de 25 °C a las 17:25 horas. Si se sabe que logra bajar la temperatura en 3,5 °C cada un minuto, ¿qué temperatura registrará el termómetro a las 17:46?

3. Un submarino se encuentra a una profundidad de –3,5 m. Debido a un desperfecto, se sumergirá 20 metros cada 10 minutos, ¿cuánto tiempo pasará hasta que se encuentre a una profundidad de –115 m?

Cálculo mental

Para saber en forma rápida y fácil, qué signo corresponde al producto de una multiplicación entre números positivos y negativos, cuenta la cantidad de factores negativos, y si es par, el resultado será positivo, de lo contrario (cantidad impar) el resultado es negativo. Observa los ejemplos y luego practica.

(–2) • 3 • (–5) • 6 = 180

(–3) • (–2) • 3 • (–1) = –18

1. (–1) • (–1) = ☐
2. (–3) • 5 • (–2) = ☐
3. (–1) • 3 • (–2) • (–2) = ☐
4. (–20) • (–30) • (–2) • (–1) = ☐
5. 2 • (–2) • (–3) • 2 • (–3) = ☐
6. (–2) • (–2) • (–2) • (–2) • (–2) = ☐
7. (–100) • (10) • (–1.000) • (–100) = ☐
8. (–1) • (1) • (–1) • (–1) • 1 • (–1) = ☐
9. 3 • 3 • 3 • 3 • (–3) = ☐
10. 2 • (–5) • (–5) • (–3) = ☐
11. (–6) • (–1) • 2 • (–100) • (–3) = ☐
12. (–1) • 1 • (–1) • 1 • (–1) • 1 • (–1) • 1 = ☐

Uso de la calculadora

Con las siguientes secuencias de teclas se obtienen números negativos. Observa y luego practica formando secuencias que te den como resultados los números propuestos.

[2] [–] [3] [X] [2] [=] ▶ –2

[9] [:] [3] [–] [6] [X] [3] [=] ▶ –9

[2] [X] [7] [–] [1] [5] [:] [2] [=] ▶ –0.5

1. [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] ▶ –3
2. [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] ▶ –7
3. [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] ▶ –2.8
4. [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] [ ] ▶ –5.9

Síntesis

1. **Valor absoluto**: distancia de un número respecto al punto de origen.

2. **Recta numérica**: sirve para ordenar números positivos y negativos. Los números ubicados más hacia la izquierda serán menores que los ubicados más hacia la derecha.

3. Dos números son **opuestos** si tienen el mismo módulo y distinto signo.

4. **Adición de números positivos y negativos**: al sumar números de igual signo, sumamos los valores absolutos y conservamos el signo.
   Para sumar dos números de distinto signo restamos sus valores absolutos y, al resultado, le asignamos el signo del número de mayor valor absoluto.

5. **Sustracción de números positivos y negativos**: restar dos números es equivalente a sumar al minuendo el valor opuesto (inverso aditivo) del sustraendo.

6. **Multiplicación de números positivos y negativos**: para multiplicar dos números aplicamos la siguiente tabla:

Signo primer factor	Signo segundo factor	Signo producto
+	+	+
+	–	–
–	+	–
–	–	+

7. **División de números positivos y negativos**: para hallar el cociente de dos números, se dividen sus valores absolutos y se determina el signo según la siguiente tabla:

Segundo dividendo	Signo divisor	Signo del cociente
+	+	+
+	–	–
–	+	–
–	–	+

Ahora trabaja en tu hipertexto

8. Al resolver un problema en que aparecen operaciones combinadas, se calculan primero las multiplicaciones o divisiones, luego las adiciones y sustracciones en orden de aparición.
   Si hay paréntesis, resuelves primero las operaciones que estos encierran.

En tu cuaderno realiza un esquema que relacione **al menos** los conceptos dados a continuación: números positivos; números negativos; valor absoluto; recta numérica; adición; sustracción; multiplicación; división.

Evaluación

Marca la alternativa correcta en las preguntas 1 a la 8.

1. ¿Cuál de las siguientes frases **no** se relaciona con el número –37?

A. Él nació en el año 37 a.C.
B. La temperatura es 37 °C bajo cero.
C. Un termómetro varió 37 °C.
D. Un submarino está a 37 m bajo el nivel del mar.

2. ¿Cuál de las siguientes frases es **incorrecta**?

A. –2 y 2 son números opuestos.
B. $|-3| + 3$ es cero
C. La distancia de –5 al 0 es mayor que la de 2 a 0.
D. Si se suman dos números negativos el resultado es negativo.

3. Aristófanes, autor de comedias, nació en el año 386 a.C. ¿Cuántos años aproximadamente han pasado desde su nacimiento hasta el año 2003?

A. 1.163 años
B. 1.617 años
C. 2.383 años
D. 2.389 años

4. El resultado de $-2 \cdot \big(-10 - (5 \cdot (-3))\big)$ es:

A. 50
B. 24
C. 10
D. –10

5. Los números que están ordenados de **mayor a menor** son:

A. –2,5; –2,4; –2; 0; 1
B. 3; –3; –3,1; –3,15; –4
C. 5; 3; –3,2; –3,15; –3,21
D. –2,73; –2,72; –2,71; –2,7; –2,68

6. La temperatura mínima en una ciudad fue de –2 °C y la máxima fue de 7 °C. ¿Cuál fue la variación de temperatura en el día?

A. 9 °C
B. 5 °C
C. –5 °C
D. –14 °C

7. Si a un número positivo le restas un número negativo el resultado es:

A. Positivo
B. Cero
C. Negativo
D. No se puede determinar

8. Un clavadista se lanza de una altura de 12 m a una piscina. Si la profundidad que logra es un tercio de la altura a la que se lanzó, ¿qué número representa la profundidad que logra con respecto al nivel del agua?

A. 2
B. 4
C. –2
D. –4

Ahora trabaja en tu hipertexto

Lee atentamente y resuelve.

1. Arquímedes, un famoso matemático griego, nació en el año 287 a.C. y vivió hasta el año 212 a.C.
   - **a.** ¿Cuántos años vivió? ______________________
   - **b.** ¿Cuántos años separan su muerte del nacimiento de Cristo? ______________________
   - **c.** ¿En qué año se cumple el 2.000 aniversario de su muerte? ______________________

2. Calcula.
   - **a.** $-((-2) + 3) - (5 - 2)$ ▶ __________
   - **b.** $-3 + 2 \bullet (4 \bullet (-1))$ ▶ __________
   - **c.** $-9 + 3 : (-2 + (-1))$ ▶ __________
   - **d.** $(-5) \bullet (-3) + (12 \bullet (-9) - 10) : (-2)$ ▶ __________
   - **e.** $24 : 6 - ((-3) - (8 : (-4) - 3) + 2)$ ▶ __________
   - **f.** $2{,}8 : (-0{,}7) + (-3) : 0{,}2 \bullet (-0{,}2 \bullet 5) - 5$ ▶ __________

Ahora trabaja en tu hipertexto

3. Escribe la expresión numérica en cada caso y resuelve.
   - **a.** A 13 le restas el cociente entre –22 y –11 y le sumas 15. ▶ ______________________
   - **b.** Al cuádruple de 9 le restas el producto entre 7 y –7. ▶ ______________________
   - **c.** Al triple de –7 le sumas el cuádruple de 8. ▶ ______________________
   - **d.** A –25 le restas el triple de –10. ▶ ______________________

¿Cómo trabajé?

Marca según tu apreciación	No lo entendí	Lo entendí	Puedo explicarlo
Números positivos y negativos en la vida diaria			
Comparación de números positivos y negativos usando la recta numérica			
Adición y sustracción entre números positivos y negativos			
Multiplicación y división entre números positivos y negativos			
Operatoria combinada			

UNIDAD

2 Potencias

Necesitas recordar

Expresa como potencia las siguientes multiplicaciones.

1. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
2. $(2) \cdot (2) \cdot (2) \cdot (2) \cdot (2)$
3. $(1) \cdot (1)$
4. $\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$
5. $(0{,}2) \cdot (0{,}2) \cdot (0{,}2) \cdot (0{,}2)$

Escribe el desarrollo de cada potencia.

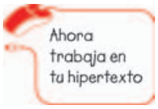
6. $(0{,}3)^2$
7. $(3)^2$
8. $(0)^5$
9. $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

Calcula el valor de cada potencia.

10. 2^5
11. $(1)^6$
12. $\left(\frac{1}{3}\right)^3$
13. $(1{,}2)^2$

Lee y completa.

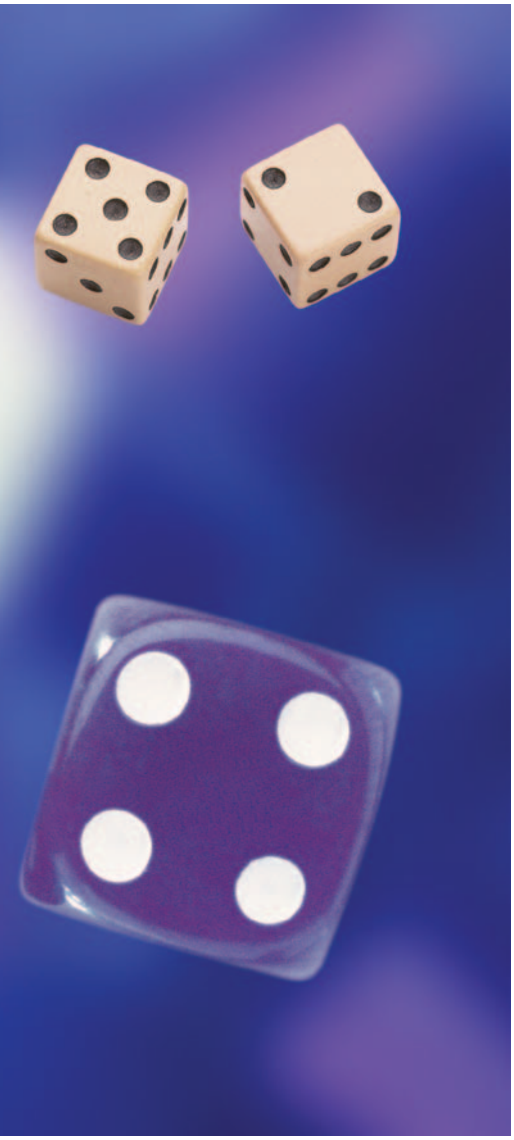
14. ¿Qué indica la base y el exponente de una potencia?



¿Qué aprenderás?

- A desarrollar potencias de bases enteras y fraccionarias.
- A aplicar las propiedades de las potencias.
- A comprender y calcular potencias de exponentes negativos.
- A resolver problemas de crecimiento y decrecimiento exponencial.
- A calcular potencias de 10.

Resuelve



Ya sabes que al lanzar un dado puedes obtener 6 resultados posibles: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.

a. ¿Cuántos resultados posibles hay si se lanzan 2 dados a la vez? Escríbelos.

b. ¿Y tres dados a la vez?

c. ¿Qué relación tienen tus resultados con las potencias? ¿Cuántos resultados posibles habría si se lanzan 8 dados a la vez?

d. Si se quiere analizar la suma de los puntos al lanzar 2 dados, ¿cuál sería el resultado más probable de obtener? Compara tu respuesta con tus compañero(as).

Ahora trabaja en tu hipertexto

Los juegos de azar

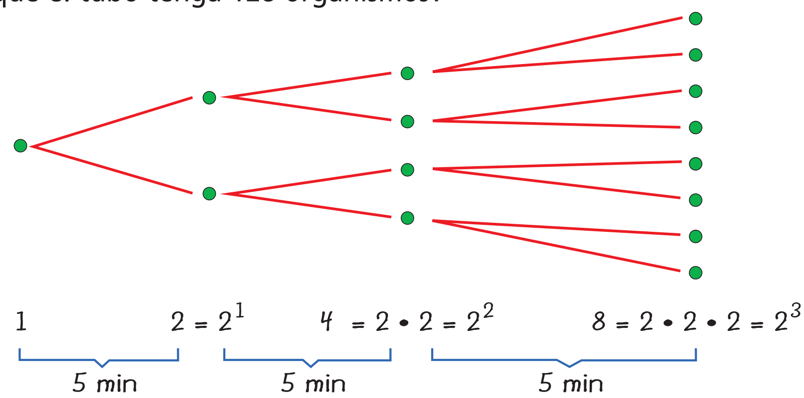
- Averigua sobre los juegos de azar que hay en Chile: en qué consisten, los premios, los más jugados, y qué instituciones se benefician con la ganancia de estos juegos.
- En alguna de las fases de uno de esos juegos, ¿es posible representarlo mediante el uso de potencias? Es decir, en el desarrollo del juego, en alguna de sus reglas, en la manera cómo se acrecienta el premio, etc. Da un ejemplo.

Potencias de exponente natural

EXPLORA

Las bacterias se reproducen por bipartición, esto quiere decir que una bacteria se divide en dos iguales en un tiempo determinado. Si se introduce en un tubo de ensayo una bacteria que se divide en dos cada 5 minutos, ¿cuánto tiempo pasa hasta que el tubo tenga 128 organismos?

Joaquín observa que puede representar la población de bacterias cada 5 minutos, utilizando un diagrama de árbol y potencias de 2.



Luego de algunos cálculos, Joaquín determinó que había $128 = 2^7$, esto quiere decir que pasaron 7 veces 5 minutos, por lo tanto, al transcurrir 35 minutos habrá una población de 128 organismos en el recipiente.

En una potencia $a^b = c$, a es la base de la potencia, b es el exponente y **c** es el valor de la potencia. El exponente b indica las veces que la base a se multiplica por sí misma.

Ejemplo: $\underbrace{2}_{\text{base}}^{\overbrace{7}^{\text{exponente}}} = \underbrace{128}_{\text{Valor de la potencia}}$ → Se lee: "dos elevado a siete es igual a ciento veintiocho".

PRACTICA

Escribe como potencia los siguientes enunciados.

1. Dos elevado a cuatro ▶ ________
2. Cinco elevado a uno ▶ ________
3. Un medio elevado a cinco ▶ ________
4. Siete al cuadrado ▶ ________
5. Menos dos al cubo ▶ ________
6. Dos tercios cuadrado ▶ ________

Completa.

7. $(-2)^2 =$ ________
8. $(-2)^4 =$ ________
9. $(-2)^6 =$ ________
10. $(-2)^8 =$ ________
11. $(-2)^3 =$ ________
12. $(-2)^5 =$ ________
13. $(-2)^7 =$ ________
14. $(-2)^9 =$ ________

15. Cuando el exponente de una potencia de base negativa es par, el valor de la potencia es ________.

16. Cuando el exponente de una potencia de base negativa es impar, el valor de la potencia es ________.

Desarrolla y calcula el valor de cada potencia.

17. 3^4 ▶ ____________________ = ________

18. $(-3)^5$ ▶ ____________________ = ________

19. $(-5)^3$ ▶ ____________________ = ________

20. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ ▶ ____________________ = ________

21. $(-0{,}2)^4$ ▶ ____________________ = ________

22. $(0{,}3)^5$ ▶ ____________________ = ________

Completa para que la igualdad sea verdadera.

23. $2^{\square} = 8$

24. $(-2)^{\square} = -32$

25. $(-5)^{\square} = -125$

26. $(-1)^{\square} = 1$

27. $(-1)^{\square} = -1$

28. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\square} = \frac{1}{4}$

29. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{\square} = -\frac{1}{27}$

30. $(-10)^{\square} = 1.000.000$

31. $0{,}2^{\square} = 0{,}008$

32. $0{,}5^{\square} = 0{,}125$

33. $(-0{,}5)^{\square} = -\frac{1}{8}$

34. $(0{,}25)^{\square} = \frac{1}{16}$

Utilizando potencias, escribe las siguientes expresiones, sin calcularlas.

35. $18 \cdot 18 \cdot 18 + 9 \cdot 9 \cdot 9$

36. $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) + (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) + (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$

Ahora trabaja en tu hipertexto

Compara los resultados en cada caso y completa con < o >.

37. $(3 + 2)^2 \bigcirc 3^2 + 2^2$

38. $(3 - 2)^2 \bigcirc 3^2 - 2^2$

39. $\left((-2) + 1\right)^2 \bigcirc (-2)^2 + 1^2$

40. $\left(2 - (-1)\right)^2 \bigcirc 2^2 - (-1)^2$

Escribe la potencia relacionada con cada situación, identifica la base, el exponente y el valor de la potencia. Luego calcula.

41. En una caja vienen 3 tarros de pelotas de tenis y en cada tarro hay 3 pelotas. Si se venden 3 cajas diarias,

a. ¿cuántas pelotas se venden en 3 días? ____________________

b. ¿Y en una semana? ____________________

Multiplicación de potencias de igual base

EXPLORA

Rocío tiene 8 poleras, 4 pantalones y 2 pares de zapatos. Ella desea saber de cuántas formas diferentes se puede vestir combinando su vestuario, para lo cual calcula:

$$8 \bullet 4 \bullet 2 = 64$$

Al observar su resultado, Rocío escribe cada factor como potencias en base 2 y hace un gran descubrimiento:

$$2^3 \bullet 2^2 \bullet 2^1 = 64 \text{ y } 2^6 = 64, \text{ entonces } 2^3 \bullet 2^2 \bullet 2^1 = 2^6$$

Existe una relación entre los exponentes de los factores y el exponente del resultado. ¿Cuál es esta relación?

Para multiplicar potencias de igual base, puedes conservar la base y sumar los exponentes.

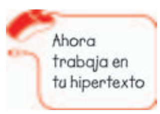
Ejemplo: $(-2)^3 \bullet (-2)^2 = \underbrace{(-2)(-2)(-2)}_{3 \text{ veces}} \bullet \underbrace{(-2)(-2)}_{2 \text{ veces}}$

$$= \underbrace{(-2) \bullet (-2) \bullet (-2) \bullet (-2) \bullet (-2)}_{5 \text{ veces}} = (-2)^5 = -32$$

PRACTICA

Lee y resuelve en tu cuaderno.

1. El equipo de fútbol de un colegio debe eligir su tenida deportiva para el próximo año. Como propuesta llegaron 3 marcas distintas de zapatos de fútbol, 9 poleras y 27 pantalones. ¿Cuántas combinaciones de ropa pueden formar? Usa las potencias para resolver.



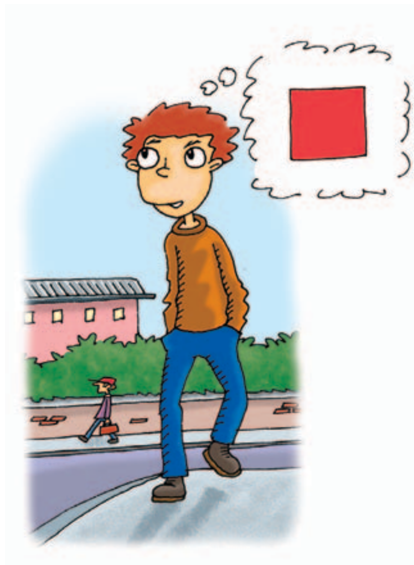
2. El casino de un colegio ofrece para la hora de colación 2 platos distintos, con 4 opciones de postre y 4 tipos distintos de jugos. ¿De cuántas maneras puedes pedir tu colación en este casino? Usa las potencias para resolver.

Escribe en forma de una sola potencia y luego calcula su valor.

3. $2^3 \bullet 2^5$
4. $(-3)^2 \bullet (-3)^4$
5. $(-5)^1 \bullet (-5)^3$
6. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \bullet \left(\frac{1}{2}\right)^2$
7. $(-0{,}3)^3 \bullet (-0{,}3)^2$
8. $(-1)^2 \bullet (-1)^5 \bullet (-1)^3$
9. $(-2)^3 \bullet (-2)^2 \bullet (-2)^4$
10. $(0{,}2) \bullet (0{,}2) \bullet (0{,}2)^3$
11. $\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \bullet \left(-\frac{1}{3}\right)^2$

División de potencias de igual base

EXPLORA



Rodrigo sabe que el área del rectángulo de la figura es 32 cm^2.
Si el ancho es 4 cm, entonces se puede saber cuánto mide el largo haciendo la siguiente división:

$$32 : 4 = 8$$

Al escribir estos números como potencias podrás descubrir una interesante relación matemática entre los exponentes cuando divides potencias de igual base.

$$2^5 : 2^2 = 2^3$$

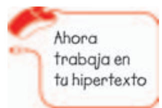
Dividendo Divisor Cociente

¿Qué descubres?

Para dividir potencias de igual base, puedes conservar la base y restar los exponentes.

Ejemplo: $5^4 : 5^2 \blacktriangleright \dfrac{5^4}{5^2} = \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5} = 5^2 = 5^{4-2}$

Debes tener presente que el divisor siempre debe ser distinto de cero.



PRACTICA

Calcula cada potencia, divide y completa.

1. $5^6 : 5^4 = \square : \square = \square = 5^{\square}$
2. $2^8 : 2^3 = \square : \square = \square = 2^{\square}$
3. $(-3)^8 : (-3)^5 = \square : \square = \square = (-3)^{\square}$
4. $(-7) : (-7) = \square : \square = \square = \square^{\square}$

Resuelve como el ejemplo.

5. $10^5 : 10^3 =$ 10^2 $=$ 100
6. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 : \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 =$ ________ = ________
7. $(-3)^4 : (-3) =$ ________ = ________
8. $(0{,}2)^5 : (0{,}2)^2 =$ ________ = ________
9. $3^{10.000} : 3^{9.997} =$ ________ = ________
10. $(-10)^{100} : (-10)^{95} =$ ________ = ________

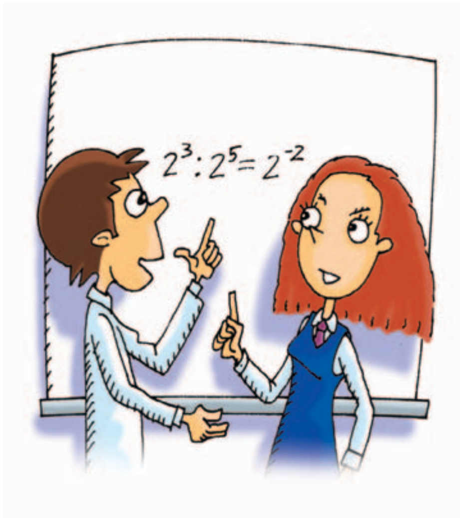
Completa para que las igualdades sean verdaderas.

11. $5^{\square} : 5^3 = 5^5$
12. $(-2)^4 : (-2)^{\square} = (-2)$
13. $(0{,}5)^{\square} : (0{,}5)^3 = \dfrac{1}{4}$

Potencias de exponente negativo

EXPLORA

Dos compañeros de curso discuten cómo resolver una división de potencias de igual base, en la cual el exponente del divisor es mayor que el exponente del dividendo. Uno de ellos propone usar la propiedad de la división para potencias de igual base.



$$2^3 : 2^5 = 2^{3-5} = 2^{-2}$$

¿Qué representa esta expresión? ¿Qué valor tiene? Veamos.

$$2^{-2} = 2^{3-5} = 2^3 : 2^5 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$$

Luego: $\boxed{2^{-2} = \frac{1}{2^2}}$

Una potencia de exponente negativo y base distinta de cero, es igual al valor recíproco de la base elevado al mismo exponente pero positivo.

Ejemplos:

1. $3^{-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{3}$
2. $(-2)^{-3} = \left(\frac{1}{-2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$
3. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{\frac{2}{3}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$
4. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{3}{1}\right)^4 = (-3)^4 = 81$
5. $(0{,}2)^{-2} = \left(\frac{2}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 5^2 = 25$

PRACTICA

Ahora trabaja en tu hipertexto

Calcula en cada caso guiándote por el ejemplo.

1. $2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
2. $3^{-2} =$ ______ = ______
3. $(-2)^{-1} =$ ______ = ______
4. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} =$ ______ = ______
5. $(-0{,}2)^{-3} =$ ______ = ______ = ______
6. $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-4} =$ ______ = ______

Expresa como potencia de exponente negativo.

7. $\frac{1}{4} = $ 2^{-2} **10.** $\left(\frac{1}{-27}\right) = $ ________   **13.** $\left(\frac{3}{4}\right)^{3} = $ ________

8. $\left(-\frac{1}{4}\right) = $ ________   **11.** $\frac{1}{1.024} = $ ________   **14.** $2^{5} = $ ________

9. $\frac{4}{9} = $ ________   **12.** $\frac{1}{(-2)^{2}} = $ ________   **15.** $(-3)^{2} = $ ________

Calcula aplicando las propiedades conocidas hasta ahora.

16. $(-3)^{4} \cdot (-3)^{-4} =$ **18.** $3^{5} : 3^{-2} =$ **20.** $2^{-5} : 2^{-3} =$

17. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} =$ **19.** $2^{-3} : 2^{4} =$ **21.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} =$

Calcula el resultado de los siguientes ejercicios.

22. $2^{-3} \cdot 2^{-2} + 2^{-3} : 2^{2}$ **23.** $3^{4} : 3^{2} - 3^{2} : 3^{-1}$ **24.** $4^{3} : 4^{-5} - 4^{8} : 4^{0}$

Observa el ejemplo y calcula.

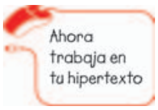
Recuerda que toda potencia cuya base sea distinta de cero y de exponente cero, es igual a uno.

25. $\frac{2^{-2} \cdot 3}{2^{-1} \cdot 3} = 2^{-2} \cdot 2^{1} \cdot 3 \cdot 3^{-1} = 2^{-1} \cdot 3^{0} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

26. $\frac{3^{-2} \cdot 5^{3}}{5^{-2} \cdot 3} =$

27. $\frac{2^{0} \cdot 3^{2}}{3^{5} \cdot 2^{3}} =$

28. $\frac{2 \cdot 3^{2} \cdot 2^{5}}{125 \cdot 2^{3} \cdot 3^{-2}} =$



Resuelve en tu cuaderno.

29. Si un cordel mide 256 cm de longitud,

a. ¿cuánto mide la mitad de la mitad del cordel? Expresa tu resultado usando una potencia con exponente negativo.

b. Si se desea calcular la mitad de la mitad de la mitad del cordel, ¿cuál es la potencia relacionada con el problema? ¿Cuál es el valor de esta longitud?

Multiplicación y división de potencias de igual exponente

EXPLORA

Una empresa productora de lácteos ha sacado al mercado un nuevo envase de su producto. Sus medidas son las siguientes: ancho de 4 cm, largo de 9 cm y alto de 16 cm. ¿Qué volumen tiene esta nueva caja?

Volumen = $16 \cdot 9 \cdot 4 = 576$ cm^3

Sin embargo, lo entretenido de la matemática es que, a veces, hay otros caminos para resolver un problema. Observa.

Volumen= $4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = (4 \cdot 3 \cdot 2)^2 = 24^2 = 576$ cm^3

Es decir, es lo mismo multiplicar potencias de igual exponente que multiplicar las bases y luego elevar al exponente respectivo.

Para multiplicar potencias con igual exponente, se multiplican las bases y se conserva el exponente. Ejemplos:

$2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$ $\qquad$ $(-2)^3 \cdot 5^3 = ((-2) \cdot 5)^3 = (-10)^3$

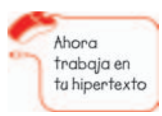
El ancho de una pista de patinaje rectangular es 9 m y el largo es desconocido. Francisco quiere saber el largo de la pista sabiendo que la superficie de la pista es 225 m^2. Él hizo el siguiente cálculo:

$$225 : 9 = 25$$

Entonces, el largo mide 25 m. Sin embargo, Francisco descubrió lo siguiente al escribir los números como potencias.

$$15^2 : 3^2 = 5^2$$

Puedes observar que la división de 15 por 3 es 5.



Para dividir potencias con igual exponente, se dividen las bases y se conservan los exponentes. Ejemplos:

$25^2 : 5^2 = (25 : 5)^2 = 5^2$ $\qquad$ $81 : 3^2 = 9^2 : 3^2 = (9 : 3)^2 = 3^2 = 9$

PRACTICA

Completa y calcula.

1. $9^2 \cdot 5^2 = \square^{\square} = $ ______

2. $9^2 : 3^2 = \square^{\square} = $ ______

3. $(-2)^3 \cdot (3)^3 = \square^{\square} = $ ______

4. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \left(\frac{\square}{\square}\right)^{\square} = $ ______

5. $\left(-\frac{1}{4}\right)^2 : \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\square}{\square}\right)^{\square} = $ ______

6. $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 : (2)^3 = \left(\frac{\square}{\square}\right)^{\square} = $ ______

Resuelve como el ejemplo.

7. $(10 \cdot 3)^2 = 10^2 \cdot 3^2 = 900$

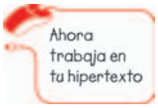
8. $(100 : 10)^3 = $ ______ $=$ ______

9. $\left((-3) \cdot 2\right)^3 = $ ______ $=$ ______

10. $(50 : 25)^{-2} = $ ______ $=$ ______

11. $(2 : 0{,}5)^2 = $ ______ $=$ ______

12. $\left((-2) \cdot (-5)\right)^3 = $ ______ $=$ ______



EN EQUIPO

Completen siguiendo el ejemplo.

13. $\left(2^2\right)^2 = 4^2 = 16 = 2^4$

14. $\left(2^3\right)^2 =$

15. $\left((-2)^3\right)^2 =$

16. $\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)^2 =$

17. $\left(5^2\right)^2 =$

18. $\left(-2^2\right)^5 =$

19. $\left(0{,}2^2\right)^2 =$

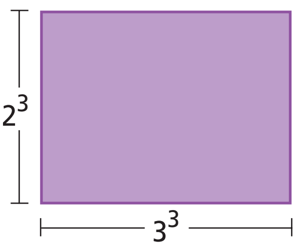
20. $\left((-1)^3\right)^4 =$

21. $\left(4^2\right)^2 =$

¿Qué pueden concluir?

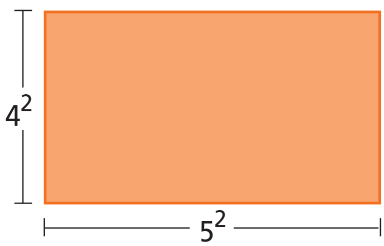
Completa y resuelve en cada caso.

22.



Área $= \square^{\square} \cdot \square^{\square} = \square^{\square}$

23.



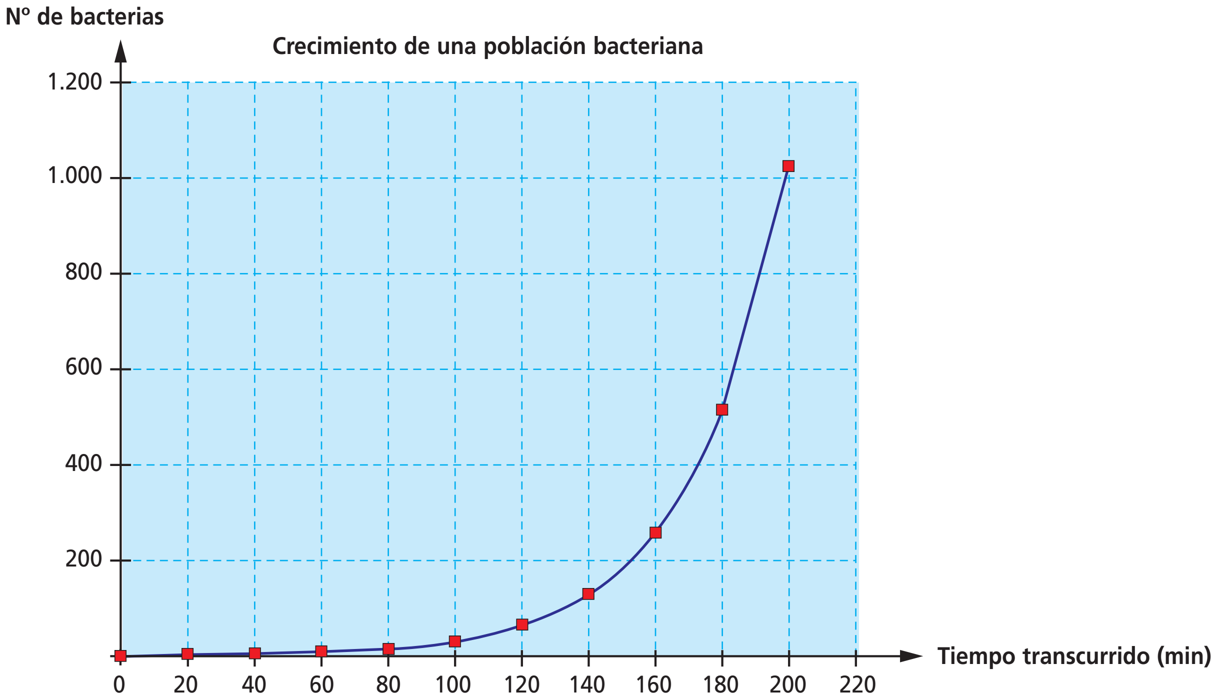
Área $= \square^{\square} \cdot \square^{\square} = \square^{\square}$

Crecimiento exponencial

EXPLORA

Macarena está analizando el grado de descomposición de un alimento. Ella considera que el alimento está contaminado si la cantidad de bacterias por milímetro cuadrado es 512 o más. Si en un comienzo hay una bacteria por milímetro cuadrado y se sabe que esta bacteria tarda cerca de 20 minutos en reproducirse, ¿cuánto tiempo tardará el alimento en estar descompuesto? Observa la tabla que construyó.

Tiempo transcurrido	Período de 20 min	Número de bacterias	Número de bacterias como potencias
0	0	1	2^0
20 min	1	2	2^1
40 min	2	4	2^2
1 h	3	8	2^3
1 h, 20 min	4	16	2^4
1 h, 40 min	5	32	2^5
2 h	6	64	2^6
2 h, 20 min	7	128	2^7
2 h, 40 min	8	256	2^8
3 h	9	512	2^9
3 h, 20 min	10	1.024	2^{10}



Este tipo de gráfico lo estudiarás con más detalle en tus cursos posteriores de matemática, pero por ahora puedes observar que a medida que el tiempo transcurre la cantidad de bacterias aumenta mucho más que al principio. Este tipo de crecimiento se llama **crecimiento exponencial**.

PRACTICA

Responde con respecto al problema anterior.

1. Si se continúa observando el comportamiento de las bacterias, ¿cuántas habrá por mm^2 pasado los siguientes períodos de tiempo?

   a. En 240 minutos b. En 6 horas c. En 4 horas, 40 minutos

2. ¿En cuánto tiempo es posible esperar 65.536 bacterias por mm^2?

3. Si el experimento comenzó a las 12:20 horas,

   a. ¿a qué hora hay 128 bacterias por mm^2?

   b. ¿A qué hora el alimento se considera contaminado?

   c. ¿Cuántas bacterias por mm^2 hay a las 18:40?

Lee atentamente y resuelve.

4. Luisa llama a tres compañeras y les informa de una campaña de recolección de alimentos. Cada una de estas 3 amigas llama a otras tres amigas distintas para contarles sobre la campaña y así, una a una van contando a 3 nuevas amigas. Completa la tabla, el gráfico y luego responde.

Nivel de llamados	Personas informadas en el nivel	Potencia relacionada
0	1	3^0
1	3	3^1
2		
3		
4		
5		

   a. ¿Cuántas personas son informadas en el nivel 6?

   b. ¿Cuántas personas son informadas hasta el nivel 4?

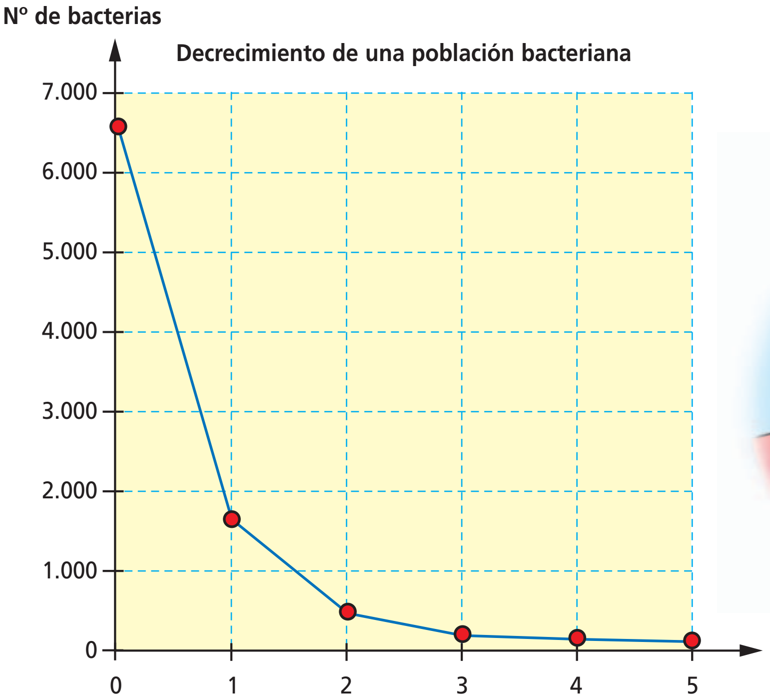
Decrecimiento exponencial

EXPLORA

Como ya vimos, las bacterias crecen exponencialmente, lo que les permite colonizar rápidamente un cierto medio, normalmente vacío. Luego de alcanzar grandes densidades poblacionales experimentan grandes reducciones en su número e incluso la extinción total debido, por ejemplo, a la falta de alimento o a la acumulación de residuos tóxicos. La disminución del número de bacterias producto de la sobrepoblación también puede ser exponencial, pero como una potencia de base fraccionaria menor que 1.

Considera un grupo de 65.536 bacterias que decrecen exponencialmente a un cuarto de su población cada día. La siguiente tabla relaciona los días transcurridos y la cantidad de bacterias.

Días transcurridos	Factor de crecimiento	Cantidad de bacterias
0	$\left(\frac{1}{4}\right)^0$	$\left(\frac{1}{4}\right)^0 \bullet 65.536 = 65.536$
1	$\left(\frac{1}{4}\right)^1$	$\left(\frac{1}{4}\right)^1 \bullet 65.536 = 16.384$
2	$\left(\frac{1}{4}\right)^2$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \bullet 65.536 = 4.096$
3	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3 \bullet 65.536 = 1.024$
4	$\left(\frac{1}{4}\right)^4$	$\left(\frac{1}{4}\right)^4 \bullet 65.536 = 256$
5	$\left(\frac{1}{4}\right)^5$	$\left(\frac{1}{4}\right)^5 \bullet 65.536 = 64$



Si divides el número de bacterias de un día por el número de bacterias del día anterior obtendrás en todos los casos el valor 0,25.

$$\frac{256}{1.024} = \frac{16.384}{65.384} = 0{,}25 = \frac{1}{4} = 4^{-1}$$

PRACTICA

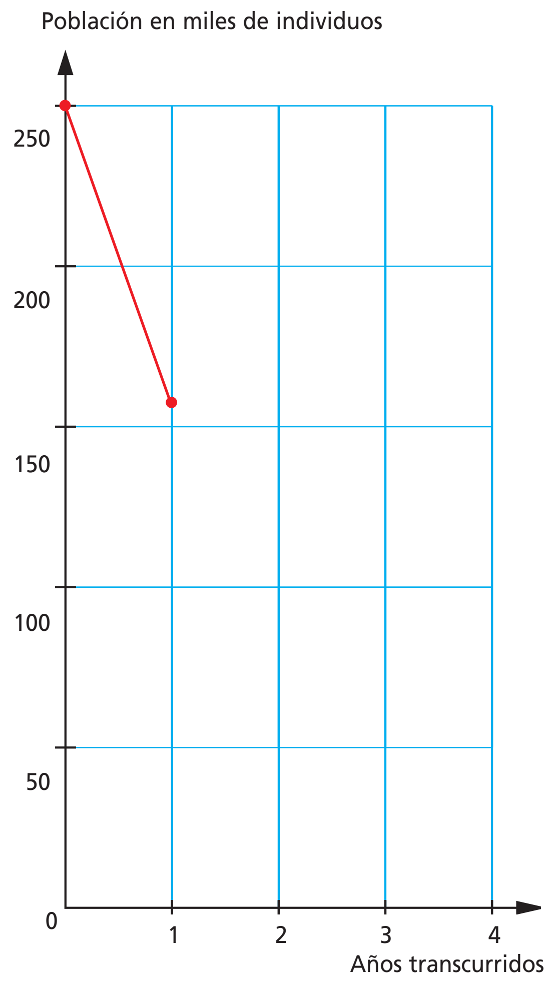
Responde respecto al problema anterior.

1. ¿Qué día quedan 16 bacterias? ______
2. ¿En qué momento la población se puede considerar extinta? ______
3. ¿Cuántas bacteria han muerto al primer día? ______
4. ¿Cuántas bacterias han muerto al tercer día? ______
5. ¿Qué día mueren 3.072 bacterias? ______

Lee y resuelve.

6. Una población de 250.000 insectos decrece por acción de un depredador natural a $\frac{2}{3}$ cada año. Completa la tabla, grafica y luego responde.

Años transcurridos	Factor de crecimiento	Tamaño de la población
0	$\left(\frac{2}{3}\right)^0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot 250.000 = 250.000$
1	$\left(\frac{2}{3}\right)^1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot 250.000 = 166.666,\overline{6}$
2		
3		
4		



a. ¿En qué año la población es de 74.074 insectos?

______

b. ¿Cuántos insectos hay al 5º y 6º año, respectivamente?

______

c. ¿Después de cuántos años se extinguiría este tipo de insecto?

______

Potencias de base 10

EXPLORA

Los astrónomos trabajan cotidianamente con valores numéricos muy elevados. Por ejemplo, se calcula que la distancia que nos separa de la nebulosa Andrómeda, en kilómetros, se expresa por el número $95 \cdot 10^{17}$.

Observa que:

$$95 \cdot \boxed{10^{17}} = 95 \cdot \boxed{100.000.000.000.000.000}$$

$$= 9.500.000.000.000.000.000 \text{ km}$$

En una potencia de base 10 con el exponente positivo, el exponente indica la cantidad de ceros que acompañan a la unidad. Ejemplos:

$10^3 = 1.000$ $\quad 10^8 = 100.000.000$ $\quad 10^{11} = 100.000.000.000$

Los biólogos, por su parte, trabajan permanentemente con valores numéricos muy pequeños. Por ejemplo, se calcula que el tamaño de una bacteria, en metros, se expresa por el número $2 \cdot 10^{-6}$ y el de un virus por $5 \cdot 10^{-7}$ m.

Observa que:

$$2 \cdot \boxed{10^{-6}} = 2 \cdot \frac{1}{10^6} = 2 \cdot \frac{1}{1.000.000} = 2 \cdot \boxed{0{,}000001} = 0{,}000002$$

$$5 \cdot \boxed{10^{-7}} = 5 \cdot \frac{1}{10^7} = 5 \cdot \frac{1}{10.000.000} = 5 \cdot \boxed{0{,}0000001} = 0{,}0000005$$

En una potencia de base 10 con el exponente negativo, el exponente indica la cantidad de cifras decimales del número. Por ejemplo,

$10^{-2} = 0{,}01$ $\quad 10^{-5} = 0{,}00001$ $\quad 10^{-8} = 0{,}00000001$

Ahora trabaja en tu hipertexto

PRACTICA

Completa la siguiente tabla y averigua el nombre de los prefijos usados en el sistema métrico decimal.

1.

Número	Potencia de 10	Forma decimal	Prefijo
1.000.000	10^6	1.000.000,0	Mega
	10^3		
100			
10			
	10^0		
	10^{-2}	0,01	
$\frac{1}{1.000}$	10^{-3}		

Ahora trabaja en tu hipertexto

Completa guiándote por el ejemplo.

2. 12.000 = $12 \cdot 10^3$

3. 800 = __________

4. 85.000.000 = __________

5. 45.600.000 = __________

6. 0,022 = $22 \cdot 10^{-3}$

7. 0,00003 = __________

8. 0,00000035 = __________

9. 0,125 = __________

Lee y resuelve.

10. La luz viaja a una velocidad de $3 \cdot 10^5$ kilómetros por segundo.

a. ¿Cómo se expresa dicho número en forma decimal? __________

b. ¿Cuál es la velocidad de la luz en metros por segundo? __________

c. ¿Cuántos ceros lleva el número que representa la velocidad de la luz en $\frac{cm}{s}$ y en $\frac{mm}{s}$?

____

11. La masa de un electrón es $9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg y la masa total del universo conocido es $7{,}8 \cdot 10^{55}$ kg.

a. ¿Cuánto más grande es la masa del universo que la masa de un electrón? __________

Más problemas

Hay algunos problemas que los puedes solucionar resolviendo otros más sencillos y así obtener conclusiones acerca del problema original. Por ejemplo, ¿cuál es la última cifra de 2^{27}?

Comprender

¿Qué sabes del problema?

2^{27} es 2 • 2 • 2 ..., 27 veces

¿Qué debes encontrar?

El valor de la cifra de la unidad.

Planificar

¿Cómo resolver el problema?

Calcula 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 ... y **observa la cifra de las unidades en cada caso** para observar alguna regularidad.

Resolver

$2^1 = 2$	$2^5 = 32$	$2^9 = 512$	2^{25} = ...2
$2^2 = 4$	$2^6 = 64$	$2^{10} = 1.024$	2^{26} = ...4
$2^3 = 8$	$2^7 = 128$	$2^{11} = 2.048$	2^{27} = ...8
$2^4 = 16$	$2^8 = 256$	$2^{12} =$	

La cifra de la unidad del número equivalente a la potencia 2^{27} es 8.

Revisar

Compara la respuesta con el valor real de 2^{27}.

PRACTICA

1. José y Pedro quieren calcular la cifra de las unidades del número equivalente a la potencia 3^{22}. Ayúdalos.

Comprender

¿Qué sabes del problema?

¿Qué debes encontrar?

Planificar

¿Cómo resolver el problema?

Resolver

Revisar

2. Calcular la cifra de las unidades de los números equivalentes a cada una de las potencias.

a. 2^{35} **b.** 3^{27} **c.** 3^{57} **d.** 4^{18}

Ahora trabaja en tu hipertexto

Cálculo mental

Recordar los valores numéricos de las potencias que son utilizadas frecuentemente agilizará tus cálculos. Toma el tiempo de cuánto demoras en escribir el valor numérico de los ejercicios que se proponen a continuación.

1. 2^2 = ________
2. $(-2)^2$ = ________
3. $(-5)^0$ = ________
4. 3^3 = ________
5. 2^{-1} = ________
6. $(-2)^1$ = ________
7. $(-2)^{-1}$ = ________
8. $(-3)^2$ = ________
9. $(-3)^3$ = ________
10. $(-1)^4$ = ________
11. $(-1)^7$ = ________
12. $2^3 : 2^2$ = ________
13. $\left(2^3 + 3^2\right)^0$ = ________
14. $(-1)^{107}$ = ________
15. $(-1)^{1.070}$ = ________
16. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$ = ________
17. $(0{,}2)^2$ = ________
18. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ = ________

Obtuve ________ ejercicios buenos en ________ minutos.

Repite estos ejercicios durante la semana y compara con tu desempeño inicial.

Uso de la calculadora

En algunas calculadoras científicas existe la tecla x^y que permite calcular potencias. Observa y luego practica.

Teclas	Pantalla
2 x^y 2 =	4
(–) 2 x^y 4 =	16
(–) 2 x^y 5 =	–32
0 x^y 0 =	E
3 x^y (–) 2 =	0,1111111

1. 2^5 ▶
2. 2^{-4} ▶
3. $(-2)^3$ ▶
4. $(0)^3$ ▶
5. $(0)^{-2}$ ▶
6. $(-3)^{-2}$ ▶
8. $(-0{,}1)^2$ ▶
7. $(-2)^{-3}$ ▶
9. $(0{,}2)^3$ ▶
10. $(-0{,}2)^{-2}$ ▶

Síntesis

1. En una potencia el factor que se repite se llama **base** y a la cantidad de veces que se repite se le llama **exponente**.

2. Si la base de una potencia es positiva, el valor de la potencia es positivo.

3. Si la base de una potencia es negativa, el valor de la potencia dependerá del exponente:

   - Si el exponente es par, la potencia es positiva.
   - Si el exponente es impar, la potencia es negativa.

4. Para multiplicar potencias de **igual base**, se puede conservar la base y sumar los exponentes.

$$\boxed{a^b \cdot a^c = a^{b+c}}$$

5. Para dividir potencias de **igual base**, se puede conservar la base y restar los exponentes.

$$\boxed{a^b : a^c = a^{b-c}}$$

6. **Potencia con exponente negativo**: es igual al valor recíproco de la base elevada al exponente positivo.

$$\boxed{a^{-b} = \left(\frac{1}{a}\right)^b = \frac{1}{a^b}}$$

7. Al multiplicar o dividir potencias con igual exponente, se multiplican o dividen las bases respectivamente y se conservan los exponentes .

$$\boxed{a^c \cdot b^c = (a \cdot b)^c} \qquad \boxed{a^c : b^c = (a : b)^c}$$

8. **Potencias de base 10:**

   - Si en una potencia de base 10, el exponente es positivo, este indica la cantidad de ceros que acompaña a la unidad, de lo contrario, este indica la cantidad de cifras decimales del número.

En tu cuaderno realiza un mapa conceptual que relacione **al menos** los conceptos dados a continuación: potencias; exponente; base; crecimiento; decrecimiento; base 10; multiplicación; división; raíces.

Ahora trabaja en tu hipertexto

Evaluación

Marca la alternativa correcta en las preguntas 1 a la 8.

1. ¿Cuál de los siguientes valores es equivalente a 2^{-2}?

   A. -4

   B. $-\frac{1}{4}$

   C. $\frac{1}{4}$

   D. 4

2. ¿Cuál de las siguientes expresiones **no** es equivalente a $(-3)^{-2}$?

   A. $\frac{1}{9}$

   B. 9^{-1}

   C. 3^{-2}

   D. $-\frac{1}{9}$

3. La afirmación **falsa** es:

   A. $0^3 = 0$

   B. $(-1)^{-2} = 1$

   C. $2^3 \cdot 2^5 = 2^{-5} \cdot 2^{-3}$

   D. $(-2)^{-1} = -\frac{1}{2}$

4. Cierta bacteria se duplica cada 10 minutos. Si en un comienzo había 3 bacterias, ¿cuántas hay al cabo de 30 minutos?

   A. 24
   B. 12
   C. 8
   D. 6

Ahora trabaja en tu hipertexto

5. 0,00002 es equivalente a:

   A. $2 \cdot 10^6$
   B. $2 \cdot 10^{-6}$
   C. $2 \cdot 10^{-5}$
   D. $2 \cdot 10^{-4}$

6. $3 \cdot 2 \cdot 81 \cdot 4$ es equivalente a:

   A. $2^3 \cdot 3^5$
   B. $2^4 \cdot 3^5$
   C. $2^3 \cdot 3^4$
   D. $2 \cdot 3^5$

7. Al resolver $2^2 : 2^5 \cdot 2^{-6}$ resulta:

   A. 2^{-3}
   B. 2^{14}
   C. 2^{-9}
   D. 2^{12}

8. El valor que **falta** en la expresión

   $(2^5 : 2^{-1}) = 2^{12} \cdot \boxed{}^{-6}$

   y que hace que esta sea verdadera es:

   A. -3
   B. 2
   C. 3
   D. 4

9. La descomposición prima de 144 es:

   A. $4^2 \cdot 14^2$
   B. $2^2 \cdot 3^2$
   C. $2^3 \cdot 3^4$
   D. $2^4 \cdot 3^2$

Lee atentamente y resuelve.

1. Escribe como potencia los siguientes enunciados.

   a. El cubo de cuatro.

   b. El cuadrado de menos dos.

   c. El cuadrado de un quinto.

   d. La mitad del cubo de siete.

2. Completa la tabla.

x	y	x^2	y^2	x^3	y^3	$x^2 \cdot x^3$	$y^3 : y^2$	$y^2 : y^3$
–3	3							
–2	2							
1	–1							
3	–3							

3. Completa de tal forma que se cumplan las igualdades.

   a. $5^{\square} \cdot 5^3 = 5^{-2}$

   b. $2^3 : 2^{\square} = 2^8$

   c. $2^7 \cdot 3^7 = \square^7$

   d. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\square} = \frac{4}{9}$

   e. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\square} = \frac{9}{4}$

   f. $\square^{-5} = \frac{1}{32}$

   g. $(3 \cdot 4)^{\square} = 144$

   h. $(-2)^3 : (-2)^{\square} = -8$

   i. $(0{,}5)^{\square} : (0{,}5)^3 = 2^{-2}$

Ahora trabaja en tu hipertexto

4. Se coloca en un recipiente una bacteria a las 12:00 horas. A las 12:20 el recipiente está lleno de bacterias. Si se sabe que la bacteria se divide en dos cada 2 minutos, ¿a qué hora el recipiente está a la mitad de su capacidad?

¿Cómo trabajé?

Marca según tu apreciación	No lo entendí	Lo entendí	Puedo explicarlo
Potencias de base entera y fraccionaria			
Multiplicación de potencias de igual base			
División de potencias de igual base			
Potencias con exponente negativo			
Crecimiento y decrecimiento exponencial			
Potencias de base 10			

UNIDAD 3

Números decimales

Necesitas recordar

Resuelve.

1. $0{,}2 + 0{,}5$
2. $1{,}7 + 2{,}8$
3. $3{,}5 - 4{,}75$
4. $2{,}16 \bullet 0{,}5$
5. $-3{,}6 : -12$
6. $3{,}5 - \left(\frac{1}{5} \bullet (-3{,}1)\right)$
7. $(-2{,}2)^2$
8. $\frac{5}{2} : (-0{,}125) + 0{,}5\ 3$

Escribe la fracción irreductible equivalente en cada caso.

9. $\frac{2}{4}$
10. $\frac{21}{9}$
11. $\frac{10}{15}$
12. $\frac{14}{16}$

Transforma cada fracción a número mixto.

13. $\frac{9}{2}$
14. $\frac{16}{7}$
15. $\frac{8}{3}$
16. $\frac{8}{7}$

Transforma de número mixto a fracción.

17. $2\frac{1}{2}$
18. $3\frac{2}{3}$
19. $5\frac{3}{4}$
20. $8\frac{7}{9}$

Ahora trabaja en tu hipertexto

¿Qué aprenderás?

- A escribir números enteros y decimales como sumas de productos entre dígitos y potencias de 10.
- A escribir, leer e interpretar cantidades en notación científica.
- A establecer equivalencias entre decimales periódicos, semiperiódicos y fracciones.
- A realizar aproximaciones.

Resuelve

Producto	Carbohidratos (g)
Leche entera	5,0
Queso fresco	1,0
Carne de pollo	0,1
Sémola	75,5
Margarina	0,7
Almeja	0,3
Merluza	0,2
Porotos	62,3
Nueces	17,6
Frutillas	8,9
Acelga	2,4

Las cantidades en la tabla están calculadas por 100 gramos

1. Los carbohidratos son uno de los grupos de nutrientes que se deben consumir diariamente. Los otros grupos están formados por los lípidos y las proteínas. Todas estas sustancias químicas se obtienen de los alimentos que consumimos para que el cuerpo desarrolle todas sus funciones.
Los nutricionistas recomiendan el consumo regular de carbohidratos, lípidos y proteínas en las proporciones adecuadas, para tener un cuerpo sano; combinado esto con el ejercicio físico, potencia un buen desarrollo y funcionamiento del organismo.
La siguiente tabla muestra algunos alimentos con el aporte en carbohidratos.

¿Cuántos gramos de carbohidratos se consumen en:

a. 100 gramos de leche entera y 100 gramos de frutillas?

____

b. 50 gramos de margarina y 100 gramos de queso fresco?

____

c. 300 g de acelga y 200 g de porotos?

____

d. 75 g de nueces y 250 g de sémola?

____

Ahora trabaja en tu hipertexto

Comida chatarra

- ¿Qué es la comida chatarra? ¿Con qué frecuencia la consumes?
- Da un ejemplo de un almuerzo de ese tipo: averigua los componentes, calcula los gramos de carbohidratos que te aportan y compáralos con un almuerzo preparado en tu casa.
- ¿Cuál te aporta más carbohidratos?
- Averigua la cantidad de calorías que te aporta cada gramo de carbohidrato.
- Pregunta a un(a) nutricionista cuál es la mejor alimentación para ti.

Números enteros y potencias de 10

EXPLORA

Valentina y Cristián calculan el valor de la siguiente suma de productos de dígitos con potencias de 10.

$$5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$$

$$5 \cdot 100.000 + 3 \cdot 10.000 + 8 \cdot 1.000 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 1$$

$$500.000 + 30.000 + 8.000 + 70 + 2$$

$$538.072$$

Ellos observaron que la posición de cada cifra, en el resultado, depende de la potencia de 10 por la que se multiplicó.

Todo número entero se puede descomponer como la suma de los productos entre cada una de sus cifras y las potencias de 10 que correspondan al valor de posición de cada cifra.
Ejemplos:

$352 = 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$ $\qquad$ $2.503 = 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^0$

PRACTICA

Descompón usando sumas de potencias de 10.

1. 235 ▶ ____________________
2. 518 ▶ ____________________
3. 3.135 ▶ ____________________
4. 1.007 ▶ ____________________
5. 2.500 ▶ ____________________
6. 1.111.011 ▶ ____________________
7. 2.234.000 ▶ ____________________
8. 1.000.003.535 ▶ ____________________
9. 100.003.000 ▶ ____________________
10. 2.000.001 ▶ ____________________

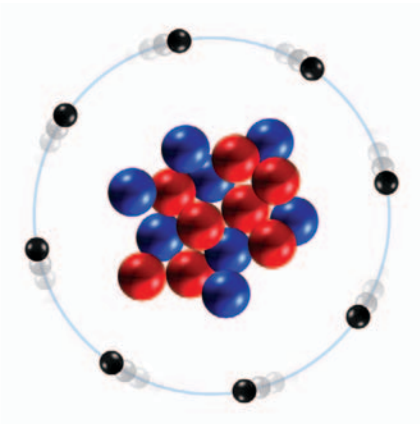
Completa la tabla.

11.

Entero como potencia de 10	Número
$2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^0$	2.005
$8 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2$	
$9 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3$	
$3 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^0$	
$6 \cdot 10^8 + 7 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^7 + 1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^9$	

Números decimales y potencias de 10

EXPLORA



La idea griega de la descomposición de la materia, suponía que esta podía subdividirse infinitamente en trozos más pequeños. Más tarde, Demócrito (460–370 a.C.) sostenía que, por el contrario, la materia estaba constituida por partículas muy pequeñas llamadas átomos (a = sin; tomos = división). John Dalton (1766–1844), 2.000 años después logró demostrar experimentalmente lo planteado por Demócrito. El error de Dalton fue afirmar que los átomos eran esferas, indivisibles e indestructibles. El descubrimiento de la electricidad y de la radiactividad, permitió a los científicos del siglo XX determinar que los átomos están formados por partículas aún más pequeñas. Las tres más importantes, aunque no las únicas, son los electrones, los protones y los neutrones.

La siguiente tabla muestra, en gramos, la masa de estas partículas subatómicas.

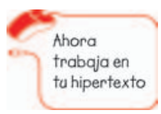
Partículas	Masa en gramos	Como suma de cifras por potencias de 10
Protón (p^+)	0,000000000000000000000001673	$1 \cdot 10^{-24} + 6 \cdot 10^{-25} + 7 \cdot 10^{-26} + 3 \cdot 10^{-27}$
Neutrón (n)	0,000000000000000000000001675	$1 \cdot 10^{-24} + 6 \cdot 10^{-25} + 7 \cdot 10^{-26} + 5 \cdot 10^{-27}$
Electrón (e^-)	0,000000000000000000000000000911	$9 \cdot 10^{-28} + 1 \cdot 10^{-29} + 1 \cdot 10^{-30}$

Todo número decimal se puede descomponer como la suma de productos entre cifras y potencias de 10. Ejemplos:

$$0{,}0023 = 2 \cdot \frac{1}{1.000} + 3 \cdot \frac{1}{10.000} = 2 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4}$$

$$1{,}305 = 1 \cdot 10^{0} + 3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-3}$$

PRACTICA

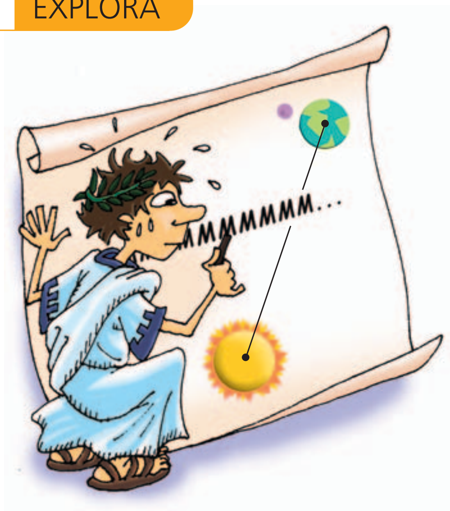


Descompón como sumas de potencias de 10.

1. 0,31 ▶ __________
2. 2,25 ▶ __________
3. 0,252 ▶ __________
4. 0,0032 ▶ __________
5. 0,3002 ▶ __________
6. 1,000001 ▶ __________

Notación científica

EXPLORA



La notación científica se estableció como un acuerdo entre los científicos, para estandarizar, en forma práctica, la escritura de números muy grandes o muy pequeños con los que trabajan a diario. Es una forma de representación que se basa en escribir números usando potencias de base 10. Por ejemplo, según la teoría del Big Bang, sobre el origen del Universo, el instante que demoró la explosión que le dio origen fue de 0,00...01 segundos (44 dígitos), que en notación científica se expresa: $1 \bullet 10^{-43}$ segundos.

Un número está expresado en notación científica cuando está escrito como el producto de una potencia de 10 y un número mayor o igual que 1 y menor que 10. El siguiente número está expresado de diferentes maneras pero solo una de ellas corresponde a notación científica.

2.358

$235{,}8 \bullet 10^1$ $\quad$ $23{,}58 \bullet 10^2$ $\quad$ $\boxed{2{,}358 \bullet 10^3}$ $\quad$ $0{,}2358 \bullet 10^4$

En notación científica

PRACTICA

Escribe en forma usual.

1. $3{,}58 \bullet 10^3$ = ______
2. $1{,}39 \bullet 10^5$ = ______
3. $5{,}07 \bullet 10^7$ = ______
4. $3{,}01 \bullet 10^9$ = ______
5. $2{,}3 \bullet 10^{-2}$ = ______
6. $3{,}95 \bullet 10^{-3}$ = ______
7. $2{,}78 \bullet 10^{-4}$ = ______
8. $1{,}93 \bullet 10^{-7}$ = ______

Escribe en notación científica.

9. 23.500 = ______
10. 7.550.000 = ______
11. 0,000023 = ______
12. 0,0000017 = ______
13. 25,3 = ______
14. 135,4 = ______
15. $232 \bullet 10^4$ = ______
16. $0{,}0027 \bullet 10^8$ = ______
17. $0{,}00354 \bullet 10^{-7}$ = ______
18. $2.356 \bullet 10^{-9}$ = ______

Completa la siguiente tabla.

19.

Crecimiento demográfico mundial (1500–2020)			
Año	Población mundial (millones)	Población mundial (forma usual)	Población mundial (notación científica)
1500	425		
1600		545.000.000	
1700	610		
1800			$9 \cdot 10^8$
1900	1.625		
1950		2.500.000.000	
2020			$8{,}5 \cdot 10^9$

a. Ingresa a la página web www.ibiblio.org/lunarbin/worldpop y podrás observar el crecimiento de la población segundo a segundo. Escribe la información en notación científica. (No olvides que las direcciones o su contenido pueden cambiar).

Ahora trabaja en tu hipertexto

Escribe en notación usual y notación científica.

20. De acuerdo a investigaciones paleontológicas, los primeros seres humanos llegaron a Europa hace $170 \cdot 10^4$ años.

21. La estrella más cercana a nuestro planeta es Épsilon Eradami, ubicada a una distancia, astronómicamente hablando, bastante pequeña: unos $100.000 \cdot 10^9$ km.

22. Júpiter se encuentra a una distancia media al Sol de $778{,}33 \cdot 10^6$ km y su diámetro es de $0{,}0142984 \cdot 10^7$ km.

23. El pez de agua dulce más pequeño que existe es un diminuto gobio de las islas Filipinas, sus especímenes adultos alcanzan una masa de $0{,}0032 \cdot 10^{-3}$ kg.

24. Los zancudos miden entre $50 \cdot 10^{-4}$ y $900 \cdot 10^{-5}$ metros.

25. El pez luna puede alcanzar hasta los 3 metros de longitud y pesar hasta una tonelada. La hembra desova hasta $90 \cdot 10^4$ huevecillos para preservar la especie. Cuando la cría nace es 60 millones de veces más pequeña que sus padres.

Decimales finitos e infinitos

EXPLORA

Al transformar el número $\frac{5}{3}$ a número decimal dividiendo el numerador por el denominador, obtenemos como resultado 1,66666..... Observarás que la división **no** termina.

$$\frac{5}{3} \quad \blacktriangleright \quad \begin{array}{l} 5 : 3 = 1{,}666\ldots \\ 20 \\ \;\;20 \\ \;\;\;\;20 \\ \;\;\;\;\;\;\ddots \end{array}$$

Como no podemos escribir el 6 infinitas veces, representaremos el resultado como **1,$\overline{6}$** y lo llamaremos decimal periódico.

Un número decimal exacto o finito es el que se obtiene de una fracción decimal (que tiene en el denominador una potencia de 10) o una simplificación de ellas. Ejemplos:

$$\frac{3}{100} = 0{,}03 \qquad \frac{25}{100} = 0{,}25 \qquad \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \qquad \frac{2}{100} = \frac{1}{50} = 0{,}02$$

Cuando el cociente se repite indefinidamente hablamos de un número decimal infinito y la parte que se repite la identificamos como el período.

Ejemplos de números decimales infinitos:

$$\frac{13}{6} = 2{,}166666\ldots = 2{,}1\underset{\text{período}}{\overline{6}} \qquad \frac{5}{11} = 0{,}4545\ldots. = 0{,}\underset{\text{período}}{\overline{45}}$$

PRACTICA

Completa la tabla con los valores correspondientes.

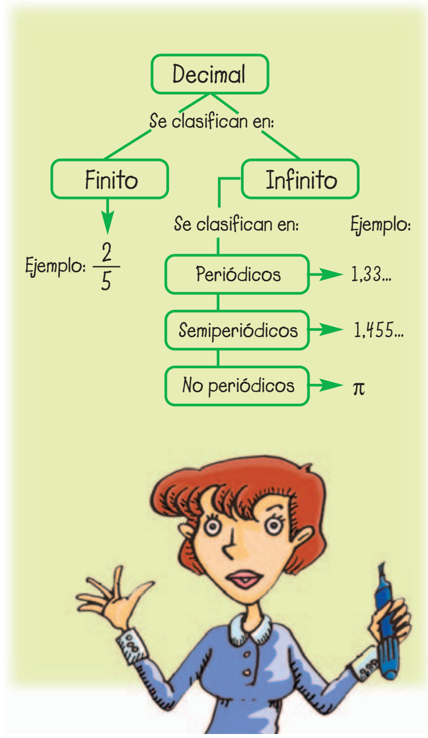
1.

Fracción	Cociente	Decimal	Período
$\frac{11}{6}$	1,8$\overline{3}$	Infinito	3
$\frac{4}{3}$			
$\frac{5}{2}$			

Decimales periódicos y semiperiódicos

EXPLORA

Una profesora de matemática construyó un esquema para presentar a sus alumnos, en forma más ordenada, la clasificación de los números decimales.



Un decimal infinito es periódico, si su período comienza inmediatamente después de la coma.

Ejemplos: 0,2525... = $0,\overline{25}$ (Parte entera: 0; Período: 25) 3,777... = $3,\overline{7}$ (Parte entera: 3; Período: 7)

Un decimal infinito es semiperiódico si el período no empieza inmediatamente después de la coma. Ejemplo:

$0,1\overline{6}$ (Parte entera: 0; Anteperíodo: 1; Período: 6) $2,23\overline{52}$ (Parte entera: 2; Anteperíodo: 23; Período: 52)

PRACTICA

Ahora trabaja en tu hipertexto

Indica qué clase de decimal resulta al hacer la división.

1. $\frac{3}{5}$ **3.** $\frac{1}{15}$ **5.** $\frac{24}{22}$ **7.** $\frac{7}{15}$

2. $\frac{4}{6}$ **4.** $\frac{7}{3}$ **6.** $\frac{4}{13}$ **8.** $\frac{199}{99}$

Completa.

9.

Fracción	Parte entera	Período	Anteperíodo	Decimal
$\frac{1}{30}$	0	3	0	Semiperiódico
$\frac{16}{15}$				
$\frac{181}{30}$				
$\frac{17}{15}$				

De un número decimal a una fracción

EXPLORA

Algunas calculadoras científicas tienen la tecla ab/c que permite ingresar fracciones y números mixtos. Por ejemplo:

Para ingresar la fracción $\frac{2}{3}$ se debe presionar 2 ab/c 3 y para

ingresar el número mixto $2\frac{1}{5}$ 2 ab/c 1 ab/c 5.

Dependiendo del modelo de la calculadora podrás obtener el número decimal asociado a la fracción ingresada, y viceversa.

¿Qué hacemos para encontrar la fracción asociada a un número decimal dado, **sin** usar calculadora? Para contestar esta pregunta separaremos los números decimales estudiados hasta ahora en 3 grupos: los finitos, los periódicos y los semiperiódicos.

Para transformar un decimal finito a fracción, se amplifica el decimal por una potencia de 10 que tenga igual cantidad de ceros como dígitos tenga la parte decimal del número. Ejemplos:

- $0,\overset{\text{dos cifras}}{23} = \dfrac{0,23 \cdot \overset{\text{dos ceros}}{100}}{\underset{\text{dos ceros}}{100}} = \dfrac{23}{100}$

- $2,5 = \dfrac{2,5 \cdot 10}{10} = \dfrac{25}{10} = 2\dfrac{1}{2}$

Para transformar un decimal infinito a fracción se debe considerar el número formado por las cifras decimales del número y el número formado por las cifras del anteperíodo. Ejemplos:

- $0,\boxed{\underset{\text{anteperíodo de 3 cifras}}{305}\underset{\text{período de 2 cifras}}{\overline{21}}} = \dfrac{\boxed{30521} - 305}{\underset{\text{2 cifras 9}}{99}\underset{\text{3 cifras 0}}{000}} = \dfrac{30216}{99000}$

- $3,21\overline{53} = 3 + 0,21\overline{53} = 3 + \dfrac{2153 - 21}{9900} = 3 + \dfrac{2132}{9900} = 3 + \dfrac{533}{2475} = \dfrac{7958}{2475}$

- $1,\overline{24} = 1 + 0,\overline{24} = 1 + \dfrac{24}{99} = \dfrac{123}{99} = \dfrac{41}{33}$

PRACTICA

Completa y escribe cada número decimal infinito como fracción.

1. $0{,}5\overline{16} = \dfrac{\square - \square}{\square} = \dfrac{511}{\square}$

2. $2{,}3\overline{21} = 2 + 0{,}3\overline{21} = \square + \dfrac{\square - \square}{\square 0} = 2 + \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$

3. $5{,}\overline{37} = 5 + \square = \square + \dfrac{\square - 0}{\square} = \square\dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$

Ahora trabaja en tu hipertexto

Lee y resuelve.

4. Ordena los siguientes números de menor a mayor y luego exprésalos en forma de fracción.

$0{,}\overline{3}$ $\quad 0{,}1\overline{6}$ $\quad 0{,}\overline{32}$ $\quad 0{,}1\overline{16}$ $\quad 0{,}\overline{23}$ $\quad 0{,}\overline{25}$ $\quad 0{,}\overline{205}$

$\square < \square < \square < \square < \square < \square < \square$

$\dfrac{\square}{\square} < \dfrac{\square}{\square} < \dfrac{\square}{\square} < \dfrac{\square}{\square} < \dfrac{\square}{\square} < \dfrac{\square}{\square} < \dfrac{\square}{\square}$

5. La siguiente tabla muestra algunos récords mundiales en atletismo registrados hasta septiembre del 2006. Transforma los números decimales a fracción.

Prueba	Hombre	Récord (s)	Lugar	Mujer	Récord (s)	Lugar
100 metros	Asafa Powell	9,77	Atenas (2005)	Florence Griffith	10,49	Indianápolis (1988)
200 metros	Michael Johnson	19,32	Atlanta (1996)	Florence Griffith	21,34	Seúl (1988)
400 metros	Michael Johnson	43,18	Sevilla (1999)	Marita Koch	47,60	Canberra (1985)
110 m vallas (varones) 100 m vallas (mujeres)	Colin Jackson	12,91	Stuttgart (1993)	Yordanka Donkova	12,21	Stara Zagora (1988)
400 m vallas	Kevin Young	46,78	Barcelona (1992)	Yuliya Pechonkina	52,34	Tula (2003)

6. Completa el cuadro con las representaciones que faltan.

Decimal	Fracción	Fracción irreductible	Número mixto
1,25			
0,32			
2,07			

Aproximaciones: redondeo y truncamiento

EXPLORA

El número π (pi) es una constante matemática que representa la relación entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro. Por eso siempre que dividamos el perímetro de cualquier circunferencia entre su diámetro obtendremos aproximadamente un mismo número, π.

En el papiro del Rhin (1650 a.C.) se propone un valor para π, este es

$$\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}16049$$

En la Biblia encontramos referencias a este número, donde recibe el valor de 3.
En la actualidad, la tecnología computacional ha permitido calcular el número π con 51.539.600.000 cifras decimales, récord adquirido por Yusumasa Kanada y Daisuke Takhashi, de la Universidad de Tokio.
π con 10 cifras decimales es **3,1415926535.**

El número π es un número con infinitas cifras decimales que no tiene período. No se puede escribir como una división de números enteros (fracción). Este tipo de números recibe el nombre de **números irracionales** y los estudiarás con más detalle en enseñanza media. Para trabajar con estos números se deben utilizar aproximaciones. Por ejemplo, para calcular el área de un círculo de radio 8 cm, se sabe que se debe multiplicar π por el cuadrado del radio. ¿Cómo hacer este cálculo? Veamos un ejemplo, aproximando el valor de π a las milésimas.

Por truncamiento de π

3,1415 ► 3,141

$Á = 3{,}141 \cdot 8^2$

$Á = 3{,}141 \cdot 64$

$Á = 201{,}024 \text{ cm}^2$

El área del círculo es 201,024 cm^2

Por redondeo de π

3,1415 ► 3,142

$Á = 3{,}142 \cdot 8^2$

$Á = 3{,}142 \cdot 64$

$Á = 201{,}088 \text{ cm}^2$

El área del círculo es 201,088 cm^2

Para truncar un número en cierta cifra decimal se eliminan las cifras decimales que le siguen. Por ejemplo, al truncar 3,1786 en las centésimas resulta 3,17.

Para redondear un número en cierta cifra decimal hay que fijarse en el valor de la siguiente cifra; si es mayor o igual a 5, sumamos 1 a la cifra a redondear, de lo contrario, la cifra se deja igual. Ejemplos:

3,235 redondeado a la centésima es 3,24

2,17353 redondeado a la diezmilésima es 2,1735

PRACTICA

Aproxima según se indique.

1. 2,357218 a la milésima

   Por truncamiento ▶ ________ Por redondeo ▶ ________

2. 3,178935 a la centésima

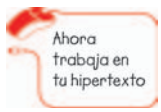
   Por truncamiento ▶ ________ Por redondeo ▶ ________

3. 0,171138 a la diezmilésima

   Por truncamiento ▶ ________ Por redondeo ▶ ________

Expresa como decimal y redondea a los centésimos.

4. $\frac{1}{6} =$ ________
5. $\frac{47}{60} =$ ________
6. $\frac{2}{3} =$ ________
7. $\frac{7}{9} =$ ________
8. $\frac{39}{50} =$ ________
9. $\frac{17}{13} =$ ________



Lee y resuelve.

10. Aproxima π a los diezmilésimos, mediante los dos tipos de aproximaciones.

    Por truncamiento ▶ ________ Por redondeo ▶ ________

    a. ¿Qué cifra se aproxima más al valor exacto? ________

11. Digita [2] [√] en tu calculadora (o [√] [2]):

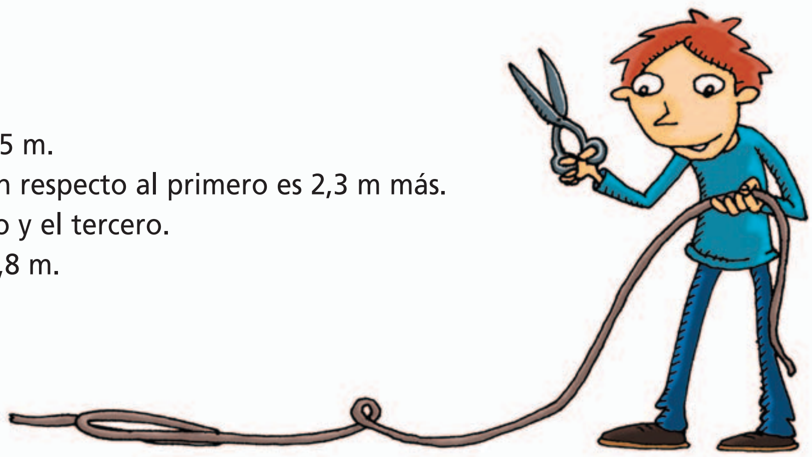
    a. ¿Qué obtienes?
    b. Aproxima tu resultado a la centésima usando ambos métodos.

    Por truncamiento ▶ ________ Por redondeo ▶ ________

    c. ¿A qué cifra se debe aproximar $\sqrt{2}$ para que al usar los dos métodos se obtengan resultados diferentes?

Más problemas

Una cuerda se divide en 3 trozos: el primero de 3,5 m, el segundo de 2,3 m más que el primero y el tercero $2\frac{1}{2}$ veces el segundo. Si la cuerda mide 23,8 m, ¿cuánto mide el tercer trozo?



Comprender

¿Qué sabes del problema?

La longitud del primer trozo es 3,5 m.
La longitud del segundo trozo con respecto al primero es 2,3 m más.
La relación entre el segundo trozo y el tercero.
La longitud total de la cuerda: 23,8 m.

¿Qué debes averiguar?

La longitud del tercer trozo.

Planificar

¿Cómo resolver el problema?

Ciertos problemas entregan datos de más y pueden resolverse de diferentes formas utilizando en cada caso un grupo de datos distinto.

Grupo de datos 1
- Longitud del 1er trozo
- Longitud más que tiene el 2º trozo respecto al 1º.
- La longitud de la cuerda.

Grupo de datos 2
- Longitud del 1er trozo
- Longitud más que tiene el 2º trozo respecto al 1º.
- Relación del 3er trozo con el 2º.

Resolver

Usando el grupo de datos 1 resulta:
1er trozo: 3,5 m
2º trozo: 3,5 + 2,3 = 5,8 m
1er trozo + 2º trozo: 3,5 + 5,8 = 9,3 m
3er trozo: 23,8 – 9,3 = 14,5 m

Revisar

Se puede comprobar usando el grupo de datos 2.
1er trozo: 3,5 m
2º trozo: 3,5 + 2,3 = 5,8 m
3er trozo: $2\frac{1}{2} \cdot 5{,}8 = 2{,}5 \cdot 5{,}8 = 14{,}5$ m

Se comprueba que el 3er trozo mide 14,5 m.

PRACTICA

1. Un triatleta debe recorrer 42,3 km entre las 3 disciplinas que compite. El tramo de nado es 5,1 km menos que el tramo de trote y, a su vez, es un cuarto del tramo de ciclismo. ¿Cuánto debe recorrer en bicicleta si el tramo de nado es 6,2 km?

Comprender

¿Qué sabes del problema?

¿Qué debes encontrar?

Planificar

¿Cómo resolver el problema?

Resolver

Revisar

2. Un recipiente contiene 7,16 litros de agua; se le agrega un litro y medio más de agua. Si faltan 2,8 litros para completarlo, ¿cuál es la capacidad total del recipiente?

Uso de la calculadora

Al realizar cálculos con algunas calculadoras científicas, aparecen a veces resultados como el siguiente:

$1{,}5^{-04}$

Este valor no corresponde a la potencia de 1,5 sino que a la expresión matemática $1{,}5 \times 10^{-4}$ y que numéricamente es 0,00015.
Para introducir números en notación científica se usa la tecla EXP.
Si quieres ingresar $3{,}52 \times 10^{-3}$ debes pulsar

3 . 5 2 EXP (–) 3

Obteniendo en la pantalla:

$3{,}52^{-03}$

Lee y resuelve.

1. Completa las teclas que permiten introducir los siguientes valores como notación científica.

a. 0,00025 ▶

b. 0,00235 ▶

c. 3.000.000 ▶

d. 2.500.000 ▶

e. 0,0000000091 ▶

2. Calcula ingresando a tu calculadora los valores como notación científica.

a. 30.000.000 • 2.500.000.000 =

b. 1.700.000 • 3.530.000 =

c. 0,0005 • 0,0000017 =

d. 0,0000003 : 500.000 =

e. 0,000025 : 2.500.000.000 =

f. 0,7 : 0,00000000000003 =

Síntesis

1. Todo número entero se puede **descomponer** como la suma de los productos entre cada una de sus cifras y las potencias de 10 que correspondan al valor de posición de cada cifra.

2. **Notación científica**: para escribir un número en notación científica, lo expresamos como el producto de una potencia de 10 y un número mayor o igual que 1 y menor que 10.

3. **Fracción decimal:** se llama fracción decimal a una fracción cuyo denominador es una potencia entera de 10.

4. **Número decimal finito**: es un número decimal que puede ser representado como una fracción decimal.

5. El **período** de una expresión decimal está compuesto por las cifras que se repiten infinitamente, se señala con una línea horizontal sobre ellas.

6. Los **números decimales infinitos se pueden clasificar en**:

   - **Periódicos**: son aquellos en que el período comienza inmediatamente después de la coma.
   - **Semiperiódicos**: tiene una parte no periódica y otra periódica, su período no comienza inmediatamente después de la coma.

7. Para escribir la **fracción decimal** correspondiente a un número **decimal finito**, escribimos como numerador el número sin considerar la coma, y como denominador, una potencia de 10 que tenga tantos ceros como cifras decimales tenga el número.

8. Para escribir la **fracción decimal** correspondiente a un número **decimal periódico** escribimos como numerador el número sin considerar la coma, y le restamos la parte entera, y como denominador, tantos nueves como cifras tenga el período.

9. Para escribir la **fracción decimal** correspondiente a un número **decimal semiperiódico** escribimos como numerador el número sin considerar la coma, y le restamos la parte entera seguida de la parte no periódica, y como denominador, tantos nueves como cifras tenga el período y tantos ceros como cifras tenga el semiperíodo.

10. Para **truncar** un número en cierta cifra decimal, se eliminan las cifras decimales que le siguen.

11. Para **redondear** un número en cierta cifra decimal debemos fijarnos en la cifra decimal que le sigue, si es mayor o igual a 5 sumamos 1 a la cifra a redondear, de lo contrario, se deja igual.

Ahora trabaja en tu hipertexto

En tu cuaderno realiza un mapa conceptual que relacione **al menos** los conceptos dados a continuación: número decimal; fracciones; notación científica; decimal finito; decimal infinito; decimal periódico; decimal semiperiódico.

Evaluación

Marca la alternativa correcta en las preguntas 1 a la 8.

1. El número 35.301 escrito usando potencias de 10 es:

A. $3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^0$
B. $3 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^0$
C. $3 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^0$
D. $3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^0$

2. $2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-3}$ es:

A. 0,301
B. 0,310
C. 2,031
D. 2,301

3. El decimal equivalente a la fracción $\frac{122}{330}$ es:

A. 0,1222
B. $0{,}1\overline{2}$
C. 0,369
D. $0{,}3\overline{69}$

4. $3{,}5 \cdot 10^6$ es igual a:

A. 3.500
B. 35.000
C. 350.000
D. 3.500.000

5. $0{,}0092 \cdot 10^2$ escrito como notación científica es:

A. $9{,}2 \cdot 10^{-1}$
B. $9{,}2 \cdot 10^0$
C. $9{,}2 \cdot 10^{-2}$
D. 9,2

6. Los decimales 0,25; 0,5; $0{,}2\overline{5}$ y 0,3 ordenados de mayor a menor, corresponden a:

A. 0,5; 0,3; $0{,}2\overline{5}$; 0,25
B. $0{,}2\overline{5}$; 0,25; 0,5; 0,3
C. 0,5; 0,3; 0,25; $0{,}2\overline{5}$
D. 0,5; 0,25; $0{,}2\overline{5}$; 0,3

7. La fracción equivalente a $0{,}12\overline{3}$ es:

A. $\frac{123}{900}$ **C.** $\frac{123}{990}$

B. $\frac{111}{900}$ **D.** $\frac{111}{990}$

8. 2,82755 redondeado a la milésima es:

A. 2,8284
B. 2,8285
C. 2,828
D. 2,827

9. El decimal $17{,}0\overline{9}$ se puede representar con el número mixto:

A. $7\frac{9}{90}$ **C.** $17\frac{1}{10}$

B. $17\frac{1}{90}$ **D.** $17\frac{9}{10}$

10. El número decimal 3,485 es:

A. finito
B. periódico
C. semiperiódico
D. entero

Ahora trabaja en tu hipertexto

Lee atentamente y resuelve.

1. Un automóvil con estanque lleno recorre 632,9 km. Si un litro de combustible rinde 17,6 km, ¿qué capacidad en litros, redondeados a la décima, tiene el estanque?

2. Rodrigo utiliza $\frac{1}{4}$ del cemento que tiene para construir un radier y $\frac{2}{3}$ de lo que le quedó para construir una pared. ¿Cuánto cemento le queda si en total tenía 12 toneladas?

Ahora trabaja en tu hipertexto

3. Completa la tabla.

Fracción	Decimal	Parte entera	Anteperíodo	Período
$\frac{7}{3}$				
$\frac{2}{5}$				
$\frac{15}{90}$				

¿Cómo trabajé?

Marca según tu apreciación	No lo entendí	Lo entendí	Puedo explicarlo
Números enteros y potencias de 10			
Números decimales y potencias de 10			
Notación científica			
Equivalencias entre decimales y fracciones			
Aproximaciones: redondeo y truncamiento			

UNIDAD 4

Ecuaciones de primer grado

Necesitas recordar

Calcula.

1. El triple de ocho.
2. El doble de doce disminuido en seis.
3. La mitad de cuatro aumentada en dos.
4. Tres cuartos de ocho disminuido en un tercio de doce.

Escribe el número que falta para que se cumpla la igualdad.

5. $-8 + \_\_\_\_\_ \cdot 3 = -2$
6. $4 \cdot \_\_\_\_\_ - 7 = 5$
7. $-3 + \_\_\_\_\_ (-6 + (-3)) = 15$
8. $\_\_\_\_\_ \cdot 5 \cdot (4 - 8) = -40$

Determina si las siguientes igualdades son verdaderas (V) o falsas (F).

9. $\frac{3}{4} + 2 \cdot (-2) = -\frac{1}{2} : \frac{2}{3} - \frac{3}{5}$
10. $-3 \cdot (-2) + 5 = -6 + 5 \cdot 1$
11. $-50 : 5 - 10 = 1 - 5 \cdot 4 - 1$
12. $0{,}5 - 0{,}25 \cdot 30 - 2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

Ahora trabaja en tu hipertexto

¿Qué aprenderás?

- A comprender las igualdades y sus propiedades.
- A traducir enunciados verbales al lenguaje matemático.
- A planear y resolver ecuaciones.
- A resolver problemas usando ecuaciones.

Resuelve

En la fotografía aparece Don Pedro y su puesto de frutas. Observa los datos que ahí aparecen y responde.

1. ¿Cuánto cuestan 6 kg de limones?

2. ¿Cuánto cuestan 4 kg de manzanas?

3. ¿Qué es más barato, comprar 4 kg de limones o 5 kg de manzanas?

4. Si el precio de los tomates es $200 por kg, ¿cuánto cuestan 5 kg de tomates?

5. Si tienes $1.500, ¿cuántos kilogramos de paltas le puedes comprar a Don Pedro?

Ahora trabaja en tu hipertexto

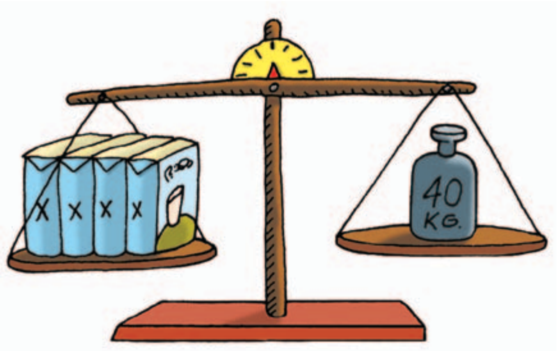
Ventas por mayor y al detalle

En general, las personas que tienen puestos de frutas o verduras compran sus productos en mercados, al por mayor, es decir, en grandes cantidades, como por ejemplo cajones de frutas o sacos con hortalizas.

- Una persona que frecuentemente se abastece en uno de estos mercados, quiso comprar una determinada cantidad de sacos de papas. El precio de cada saco es de $9.500, pero si compra más de seis sacos el precio baja $500 por unidad. Al final, gasta $57.000 en sacos de papas.
- ¿Cuántos sacos compró?, ¿qué ventajas y desventajas tiene comprar al por mayor?

Igualdades y ecuaciones

EXPLORA



La balanza que aparece en la ilustración está en equilibrio. En el lado izquierdo hay 4 cajas de **x** kg cada una, y en el lado derecho hay una caja con una masa de 40 kilogramos.

¿Cuál es la masa de cada caja que permite que la balanza se mantenga equilibrada?

Para responder esta pregunta es necesario plantear una ecuación.

Si la balanza está en equilibrio, es porque en ambos platos hay igual cantidad de kilogramos, es decir,

$$\mathbf{x} + \mathbf{x} + \mathbf{x} + \mathbf{x} = 40$$

en donde, sumar 4 veces la misma cantidad es lo mismo que multiplicarla por 4.

$$\mathbf{x} + \mathbf{x} + \mathbf{x} + \mathbf{x} = 4x$$

luego, la ecuación quedaría $4\mathbf{x} = 40$

¿Qué número multiplicado por 4 da 40? Tenemos entonces: $\mathbf{x} = 10$

Por lo tanto, cada caja tiene masa 10 kg.

¿Qué sucede si sacamos 2 cajas? ¿Cuánto deberían masar ahora las cajas?

¿Qué ocurre con la balanza si agregamos una caja de masa 5 kg en ambos platos? Completa.

$4 \cdot 10 + \square$ $\qquad$ $40 + \square$

$\square + \square$ $\qquad$ $\square$

¿Se mantiene la igualdad?

Una ecuación (por ahora llamada de primer grado) es una igualdad que contiene un valor desconocido llamado incógnita. Resolver una ecuación equivale a encontrar este valor desconocido.

PRACTICA

Completa y luego contesta.

1. Agregar 7 a:

$2 + 3 \quad = \quad 5 \cdot 1$

$\square + 7 = \square + 7$

$\square = \square$

2. Restar 8 a:

$15 - 12 \quad = \quad 3 \cdot 1$

$\square - 8 = \square - 8$

$\square = \square$

3. ¿Qué sucede si a una igualdad le sumas, restas, multiplicas o divides algún número?

   Da ejemplos en cada caso.

Resuelve y luego indica si las igualdades se mantienen.

4. Multiplicar por 2.

$7 \cdot 4 = 26 + 2$

$\square \cdot 2 = 28 \cdot \square$

$\square = \square$

5. Agregar 5.

$4 + 5 = 3 \cdot 3$

$\square + 5 = 9 + \square$

$\square = \square$

6. Multiplicar por 3.

$9 + 4 = 10 + 3$

$\square \cdot 3 = \square \cdot \square$

$\square = \square$

7. Dividir por 5.

$5 \cdot 4 = 25 - 5$

$\square : 5 = \square : 5$

$\square = \square$

8. Multiplicar por –5.

$-9 + 2 = -8 + 1$

$\square \cdot \square = \square \cdot -5$

$\square = \square$

9. Dividir por –3.

$-3 \cdot 6 = (-13) + (-5)$

$\square : -3 = \square : -3$

$\square = \square$

Considera a = –5, b = 3, c = –4, d = 2 y calcula guiándote por el ejemplo.

$2a + b - c + 3d = 2 \cdot (-5) + 3 - (-4) + 3 \cdot 2 = -10 + 3 + 4 + 6 = 3$

10. $a + b + c + d =$

11. $3a - 2b + 3c - 2d =$

12. $b - c + d + 3a =$

13. $a - 3b - 3c - d =$

14. $a + 4c + d - b =$

15. $7a - 6b - 5c - 4d =$

16. $10b - 4c + 5d =$

17. $12c - 3a + 9d =$

18. $4d + 3b + 5c + 2a =$

19. $7d + 2c - 3a + 6b =$

Ahora trabaja en tu hipertexto

Considera x = –6 y verifica si se cumple la igualdad para este valor en cada ecuación.

20. $-3x = 18$

21. $29 + x = 25$

22. $x + 12 = 6$

23. $-8x = 24$

24. $15 + 2x = 3$

25. $-5x + 15 = 45$

26. $4x + 9 = 19$

27. $-3x + 5 = 23$

28. $7x + 9 = 32$

29. $3x - 5 = 50$

30. ¿Qué sucede si x = –4?, ¿se cumplen las igualdades?

Lenguaje algebraico

EXPLORA

Un grupo de amantes de la naturaleza quiere construir un parque que tenga forma rectangular. Como todavía no saben las dimensiones, al ancho le asignaron **a** metros y al largo **b** metros. Como ya sabes, el perímetro de este parque es:

$$P = a + b + a + b \text{ (la suma de los lados)}$$

Pero esta expresión la puedes reducir aún más:

$$P = 2 \bullet a + 2 \bullet b \qquad \text{o} \qquad P = 2 \bullet (a + b)$$

En lenguaje común podemos decir que el perímetro de un rectángulo es el doble del ancho más el doble del largo, o bien, es el doble de la suma de su largo y de su ancho.

Observa cómo cambia el perímetro de un rectángulo, si damos distintos valores para a y b.

a	b	P = 2a + 2b
2	3	$P = 2 \bullet 2 + 2 \bullet 3 = 4 + 6 = 10$
3	4	$P = 2 \bullet 3 + 2 \bullet 4 = 6 + 8 = 14$
4	5	$P = 2 \bullet 4 + 2 \bullet 5 = 8 + 10 = 18$
5	6	$P = 2 \bullet 5 + 2 \bullet 6 = 10 + 12 = 22$

El lenguaje algebraico es el que nos permite expresar matemáticamente la información, es decir, con operaciones matemáticas, que contienen números y letras. En adelante, evitaremos escribir el símbolo de la multiplicación: para *2 • a* escribiremos *2a*.

PRACTICA

Observa los ejemplos y expresa en lenguaje algebraico las siguientes frases.

El doble de un número. ▶ 2x

2 aumentado en el doble de 4. ▶ 2 + 2 • 4

1. 3 disminuido en el triple de 12. ▶ ________
2. Un número disminuido en 10. ▶ ________
3. El doble de la suma de 4 y –7. ▶ ________
4. El triple de –2 disminuido en 4. ▶ ________

Escribe en lenguaje corriente las siguientes expresiones matemáticas. Fíjate en el ejemplo.

$2y - 1$ ▶ el doble de un número disminuido en 1

5. $4y - 2 =$
6. $2y + 4 =$
7. $y - \frac{5}{6} =$
8. $y + \frac{7}{6}y =$
9. $5y - \frac{8}{3}y =$
10. $3{,}4y - 2y =$
11. $\frac{y}{3} - \frac{y}{2} =$
12. $3y + 5 =$
13. $\frac{y}{2} - 4 =$
14. $2y - \frac{2}{3} =$

Expresa en lenguaje algebraico las siguientes situaciones:

15. El valor de **a** litros de jugo a $420 cada uno. ▶ ____________

16. El valor de 4 cebollas a **c** pesos cada una. ▶ ____________

17. El valor de **x** kg de manzanas a $180 cada uno. ▶ ____________

18. El valor de **y** kg de naranjas a $220 cada uno. ▶ ____________

19. El valor de 2 kg de peras a $**x** cada uno. ▶ ____________

20. El valor de 8 pimentones a **x** pesos cada uno. ▶ ____________

21. El valor de 5 cajas de chocolates a **t** pesos cada una. ▶ ____________

Si x representa la edad de Eduardo, expresa en lenguaje algebraico las siguientes proposiciones.

22. La edad que tenía hace 9 años. ▶ ____________

23. La edad que tendrá dentro de 6 años. ▶ ____________

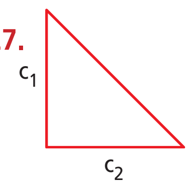
24. Los años que faltan para que cumpla 83 años. ▶ ____________

25. La edad que tendrá cuando tenga el doble de años. ▶ ____________

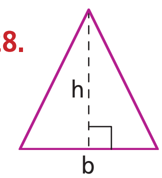
26. La edad que tenía hace **x** años. ▶ ____________

Expresa usando el lenguaje algebraico el área de las siguientes figuras.

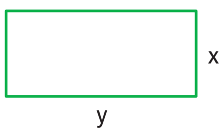
27.



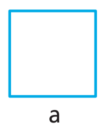
28.



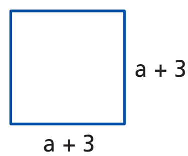
29.



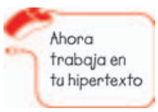
30.



31.



Expresa mediante una igualdad cada uno de los siguientes enunciados.



32. La suma de 13 y 7 es igual a 20. ▶ ____________

33. La suma de **x** e **y** es igual a 30. ▶ ____________

34. El doble de **x** es igual a 50. ▶ ____________

35. La mitad de 36 es igual a 18. ▶ ____________

36. La cuarta parte de **y** es igual a 9. ▶ ____________

37. El triple de **x** es igual a 24. ▶ ____________

38. El producto de **y** por 10 es igual a 100. ▶ ____________

39. La tercera parte de **x** es igual a 17. ▶ ____________

40. La quinta parte de **z** disminuida en 3 es igual a **z**. ▶ ____________

41. La sexta parte del cuarto de **a** es igual a 7. ▶ ____________

Ecuaciones con adiciones y sustracciones

EXPLORA

Pablo se quiere comprar una bicicleta que cuesta $118.000. Si ya tiene ahorrados $85.000, ¿cuánto dinero le falta?

Si representamos por **x** la cantidad de dinero que le falta a Pablo para comprar su bicicleta, la ecuación planteada sería la siguiente:

$$85.000 + \mathbf{x} = 118.000$$

Ahora necesitamos determinar la cantidad **x** que le falta a Pablo para comprar la bicicleta. Para ello necesitamos despejar **x**, y lo logramos restando 85.000 a ambos lados de la igualdad.

$$85.000 + \mathbf{x} - 85.000 = 118.000 - 85.000$$
$$\mathbf{x} + 0 = 33.000$$
$$\mathbf{x} = 33.000$$

Resolver una ecuación equivale a determinar el valor de la incógnita. A veces lo puedes hacer mentalmente pero en otras ocasiones deberás usar las propiedades de las operaciones para despejar o aislar la incógnita. Por ahora debes recordar que a ambos lados de una igualdad puedes sumar o restar un número y la igualdad se mantiene.

Ejemplo:

$$-2 + x = 3 \quad / \text{ sumar } 2$$
$$-2 + 2 + x = 3 + 2$$
$$0 + x = 5$$
$$x = 5$$

PRACTICA

Resuelve.

1. $x + 3 = 11$
2. $-5 + z = -3$
3. $-2 + x = -4 + 6$
4. $3 + x - 2 = -4 + 1$
5. $15 - v - 5 = 3 - 7 - 1$
6. $2 + y = -3 - 1$
7. $7 + x - 7 = 5 - 4 - 1$
8. $x - 7 = 0$
9. $3 - x = 7 + 24$
10. $40 - 1 = 2 - v + 3$
11. $4 - x - 8 = 30 - 6$
12. $4 + x - 2 = 30 + 8$
13. $2 + z - 1 = 7 + 7$
14. $2 - x + 5 = 11 - 9$

Plantea la ecuación en cada caso y luego resuelve.

15. Si a un número le quito 33 se obtiene 67. ¿Cuál es el número? ______
16. La suma de un número y 36 es igual a la diferencia entre 240 y 200. ¿Cuál es el número? ______
17. Un número aumentado en 7 unidades es igual al doble de 8. ¿Cuál es el número? ______

Inventa, para cada caso, una situación que se resuelva con las siguientes ecuaciones:

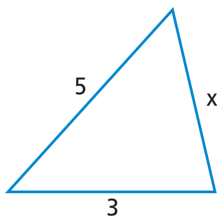
18. $3 + x - 9 = 12$

19. $3 + x = 6 - 2$

20. $5 - x = 10 - 3$

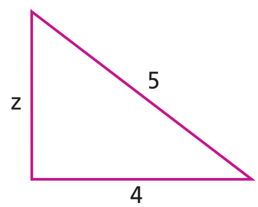
Calcula la medida del lado que falta en los siguientes triángulos sabiendo que:

21.



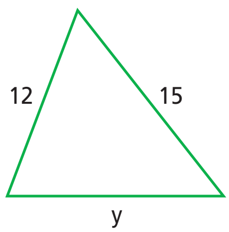
El perímetro es 12.

23.



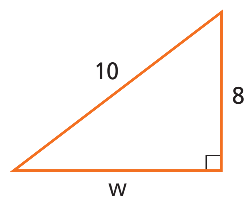
El lado z es igual a un tercio de la suma de los otros dos lados.

22.



El lado y es igual a la diferencia de los otros lados aumentado en 7 unidades.

24.



El área del triángulo es 24.

Plantea la ecuación correspondiente y resuelve.

25. Felipe quiere comprar un libro que vale $5.600. Si tiene $3.800, ¿cuánto dinero le falta?

26. Carolina compró una guitarra en $42.000. Si pagó con $50.000, ¿cuánto dinero recibió de vuelto?

27. Mónica tenía una deuda de $17.000. ¿Cuánto dinero debe pagar para que su deuda se reduzca a la mitad?

28. Si Carlos pagó con $1.000 un kilogramo de naranjas y recibió de vuelto $170, ¿cuánto cuesta cada kilo de naranjas?

29. Felipe desea invitar a su hermana a la piscina, pero como ella es pequeña su entrada vale $3.000. Si Felipe debe pagar $5.700 por su entrada, ¿cuánto dinero debe tener para pagar ambas entradas?

Ahora trabaja en tu hipertexto

Ecuaciones con multiplicaciones

EXPLORA

Sofía fue a su tienda favorita y encontró muchas ofertas, pero solo se decidió por una de ellas que consistía en llevar 3 blusas en \$18.000. Según esta promoción, ¿cuánto pagó Sofía por cada blusa?

Si representamos por **x** cada blusa que compró Sofía, el planteamiento de la ecuación es:

$$3x = 18.000$$

Para despejar la incógnita, en este caso, debemos eliminar el 3 que la acompaña. Dividiendo en ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$\frac{3x}{3} = \frac{18.000}{3}$$

$$\frac{\cancel{3}^{\,1}}{\cancel{3}_{\,1}}x = 6.000$$

$$x = 6.000$$

Luego, cada blusa costó \$6.000.

> Si se multiplican o dividen por un mismo número ambos miembros de la igualdad, esta se mantiene.

PRACTICA

Completa.

1. $2x = 24 \quad / : \boxed{}$

$$\frac{2x}{\boxed{}} = \frac{24}{\boxed{}}$$

$$x = \boxed{}$$

2. $5x = -25 \quad / : \boxed{}$

$$\frac{5x}{\boxed{}} = \frac{-25}{\boxed{}}$$

$$x = \boxed{}$$

3. $6x = 36 \quad / : \boxed{}$

$$\frac{6x}{\boxed{}} = \frac{36}{\boxed{}}$$

$$x = \boxed{}$$

Resuelve las siguientes ecuaciones. Compara tu respuesta con la de tus compañeros(as).

4. $-4m = 32$

5. $-3u = 18$

6. $5x = 35$

7. $-12v = 144$

8. $5x = 20$

9. $-100a = -1.000$

10. $7z = 70$

11. $-10y = -150$

12. $15a = 75$

13. $-6b = 48$

14. $-40x = -80$

15. $9z = 81$

16. $-16w = -64$

17. $7v = -49$

18. $18v = 144$

19. $4x = 10$

Inventa un problema que se resuelva con la ecuación dada y encuentra la solución.

20. $7x = 420$ **21.** $2x = 500$ **22.** $-4x = 320$

Lee atentamente y resuelve.

23. Observa los datos que aparecen en el cartel de un supermercado. Cada papel higiénico por separado cuesta $270. Analiza las ofertas, plantéalas y decide cuál es la mejor.

a. Si quieres llevar 4 rollos, ¿cómo te conviene hacer tu compra?

b. Si quieres llevar solo 6 rollos, ¿cómo lo harías? ¿Cuánto gastas?

Ahora trabaja en tu hipertexto

c. ¿De cuántas maneras puedes comprar 8 rollos de papel? Compara con tus compañeros y compañeras.

24. 1 kg de papas vale $278, ¿cuántos kilos se pueden comprar con $1.390?

25. Si una caja de 24 lápices vale $1.260, ¿cuál es el valor aproximado de cada lápiz?

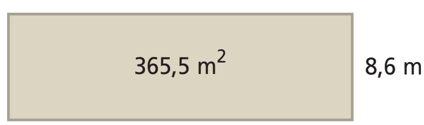
26. Un paquete con 10 cuadernos vale $6.729. ¿Cuál es el valor aproximado de cada cuaderno?

27. Se ofrece una oferta de 3 litros de leche por $1.000. ¿Cuál es el valor de cada litro?

28. Si 24 lechugas valen $2.136, ¿cuál es el valor de cada lechuga?

29. En un supermercado se ofrece el choclo congelado en tres paquetes de distintas masas. El de 500 gramos cuesta $499, el de 1.000 gramos, $999 y el de 1.500 gramos, $1.499. Si compras 3 kg de choclo, ¿cuál de los tres paquetes conviene comprar?

30. Un terreno rectangular de 365,5 m^2 de área tiene 8,6 m de frente. ¿Cuántos metros tiene de largo?



Ecuaciones con multiplicaciones y divisiones

EXPLORA

Hugo compró frutas y gastó en total $2.760. Si compró 4 kg de plátanos a $450 cada uno y 3 kg de naranjas, ¿cuánto costó el kilogramo de naranjas?

Si representamos por **x** cada kilogramo de naranjas que compró Hugo, la ecuación que representa el problema es la siguiente:

$$\overbrace{4}^{\text{kg de plátanos}} \bullet \overbrace{450}^{\text{Precio del kg de plátanos}} + \underbrace{3}_{\text{kg de naranjas}}\,\underbrace{x}_{\text{Precio del kg de naranjas}} = \underbrace{2.760}_{\text{Gasto total}}$$

Así obtenemos y resolvemos:

$$1.800 + 3x = 2.760 \qquad / - 1.800$$

$$1.800 + 3x - 1.800 = 2.760 - 1.800$$

$$3x = 960 \qquad / : 3$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{960}{3}$$

$$x = 320$$

Por lo tanto, el kilo de naranjas cuesta $320.

Para resolver este tipo de ecuaciones debes aislar el producto en el cual aparece la incógnita mediante las adiciones o sustracciones correspondientes. Luego, despejar la incógnita realizando la división que corresponda.

PRACTICA

Completa.

1. $1.500 + 5 \bullet x = 3.500$

$$\boxed{} - \boxed{} + 5x = 3.500 - \boxed{}$$

$$5x = \boxed{}$$

$$\frac{5x}{5} = \frac{\boxed{}}{5}$$

$$x = \boxed{}$$

2. $3.600 + 4 \bullet x = 4.000$

$$\boxed{} - \boxed{} + 4x = 4.000 - \boxed{}$$

$$4x = \boxed{}$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{\boxed{}}{4}$$

$$x = \boxed{}$$

Resuelve las siguientes ecuaciones.

3. $3x - 5 = 1.580$
4. $2x - 1 = 89$
5. $9x + 3 = 38$
6. $3x - 12 = 26$
7. $4{,}5x - 2 = 6{,}3$
8. $2{,}4x - 9 = 3$
9. $x + 3 = -500$
10. $x - 1 = 3$
11. $2x + 9 = -5$
12. $3x - 5 = 4$
13. $4x + 5 = -5$
14. $-9x - 9 = 72$

Inventa un problema que se resuelva con la ecuación dada y encuentra la solución.

15. $\frac{1}{2} - 2x = 500$

16. $-3 + 4x = 497$

17. $40 + 20x = 588$

Plantea las ecuaciones y resuelve.

Ahora trabaja en tu hipertexto

18. Si al triple de un número se le resta dicho número, resulta 80. ¿Cuál es el número?

19. La suma de un número y su antecesor es 1. Encuentra cuál es el número.

20. La suma de un número con su mitad es igual a 60. ¿Cuál es el número?

21. En un bolsillo Pedro tiene una cantidad de dinero y en el otro tiene el triple. Si en total tiene $600, ¿cuánto dinero tiene en cada bolsillo?

22. Sergio compró un cuaderno en $750 y cinco lápices iguales. En total pagó $1.200. ¿Cuál es el precio de cada lápiz?

23. Patricia compró un ramo de flores por $5.000 y 3 jarrones. El valor total de la compra es $11.900. ¿Cuál fue el costo de cada jarrón?

24. De una cuerda de 12 m de longitud se cortan cinco trozos iguales y sobran 0,75 m. ¿Cuál es la longitud de cada trozo de cuerda?

25. Andrea tenía $1.000. En verduras gastó **z** pesos y en frutas el doble de $300. ¿Cuánto dinero gastó en verduras?

26. Camila junta monedas de $5 y su hermano Javier de $10. Si el doble de las monedas que tiene Camila menos 7 es igual a 45 y Javier tiene nueve monedas menos que Camila:

a. ¿cuánto dinero tiene cada uno?

b. ¿cuántas monedas le faltan al que tiene menos dinero para juntar lo mismo que su hermano?

Ecuaciones con la incógnita en ambos lados

EXPLORA

Rosario le pregunta la edad a Carlos y este le plantea el siguiente acertijo: "el doble de mis años más el triple de mis años menos 50, suman el cuádruple de años que tengo menos 28". ¿Cuántos años tiene Carlos?

Si representamos por **x** la edad que tiene Carlos, la ecuación que representa el problema es la siguiente:

$$2x + 3x - 50 = 4x - 28$$

Sumamos 50 a ambos lados:

$$2x + 3x - 50 + 50 = 4x - 28 + 50$$
$$5x = 4x + 22$$

Restamos 4x a ambos lados:

$$5x - 4x = 4x - 4x + 22$$
$$x = 22$$

Carlos tiene 22 años.

Para resolver ecuaciones que tienen incógnitas a ambos lados de la igualdad, se agrupan a un lado los términos con incógnitas y al otro los números, utilizando las operaciones que correspondan.

PRACTICA

Resuelve las siguientes ecuaciones.

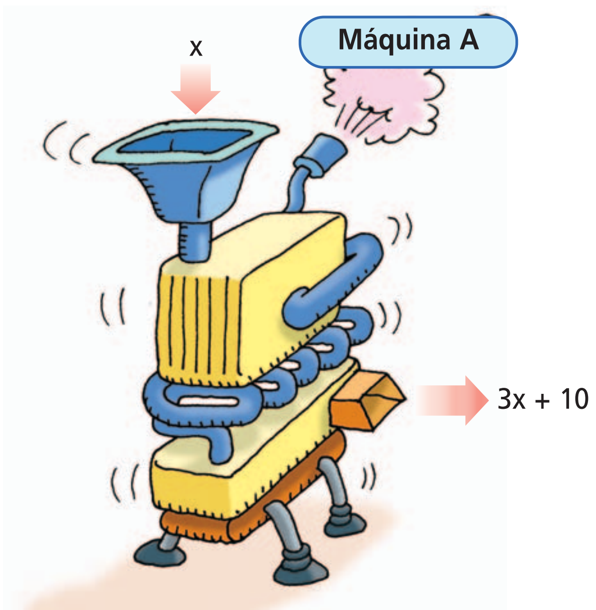
1. $10x - 3 + 5 = 5x$
2. $4 - 8v = 6 - 3v$
3. $3x + 7x - 1 = 12 + 2x$
4. $19x - 2 = 12 - 15x$
5. $2x - 10 = 4x - 36$
6. $5u - 3u = 5 - 3u$
7. $2u + 6 = 5u - 3$
8. $8y - 4 + 3y = 7y + y + 14$
9. $-x + 5x + 3 - 4 = x + 2$
10. $y - 12 + 44y = 18 - 15y$
11. $3v + 2 + 5v = 18 - 2v + 3v$
12. $35v + 5 = 21v + 15$
13. $50b + 5 + 3b = 58 + b$
14. $10z - 2 + 5z = 14 - 2z$
15. $9y + 5 + 3y = 149 + 5y$
16. $7u - 4 = 8u + 3 - 5u$
17. $4z - 7z = 9 - 6z$
18. $8v + 3v = 5 - 8v + 2$
19. $10 - 3 + u = 5u - 2 + u$
20. $w + 12 + 3w = 5 + 9w - 9$

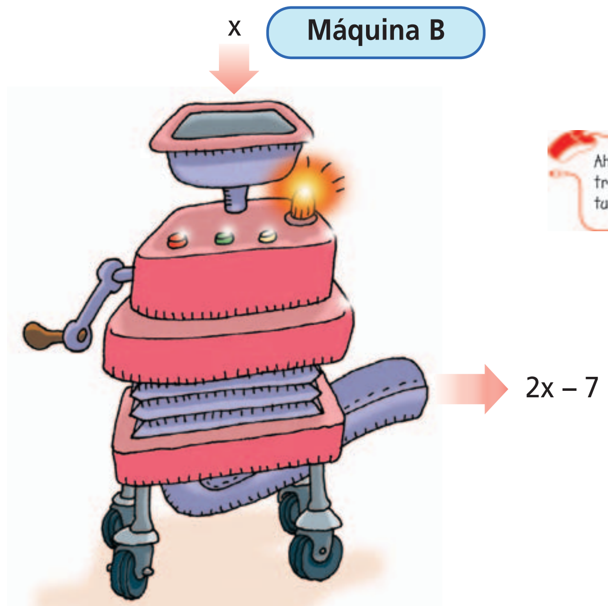
Resuelve en cada caso.

21. Une con una flecha la ecuación correspondiente a cada enunciado.

El triple de un número disminuido en dos resulta el doble del número aumentado en ocho.	$2x + 4x = 36 - 3x$
Si a un número le agregamos seis nos da el triple del número disminuido en cuatro.	$4x + 9 = x + 2x - 3$
El doble del número aumentado en su cuádruple es treinta y seis disminuido en el triple del número.	$3x - 2 = 2x + 8$
Al cuádruple de un número le agregamos nueve, nos resulta el número aumentado en su doble y disminuido en tres.	$5x - 7 = 4x + 30$
Si al quíntuple de un número le quitamos siete se obtiene cuatro veces el número aumentado en treinta.	$x + 6 = 3x - 4$

22. Las máquinas A y B transforman números. Observa lo que hace cada máquina y resuelve.





Ahora trabaja en tu hipertexto

a. ¿Cuál es el número que puede entrar a ambas máquinas y **no** tener cambio alguno?

b. ¿Cuál es el número que ingresa a la máquina A y su transformación es igual a la producida por la máquina B pero aumentada en 25?

c. ¿Cuál es el número que ingresa a la máquina B y su transformación es igual a la producida por la máquina A pero disminuida en 20?

Estudio de las soluciones

EXPLORA

Antonia, una alumna de 8º año, ha obtenido en el segundo semestre las siguientes notas en matemática: 6,0 3,5 5,2 4,1 3,4

Si quiere tener un 6,0 de promedio en el semestre, ¿qué nota debe sacarse en la última prueba?

Observa la ecuación y la solución que plantea Antonia:

$$\frac{6{,}0 + 3{,}5 + 5{,}2 + 4{,}1 + 3{,}4 + x}{6} = 6{,}0$$

$$\frac{22{,}2 + x}{6} = 6{,}0 \qquad / \cdot 6$$

$$22{,}2 + x = 36{,}0 \qquad / - 22{,}2$$

$$x = 13{,}8$$

Es evidente que Antonia no puede obtener un 6 de promedio ya que para esto debería sacarse un 13,8 en la última prueba.

Siempre debes tener presente revisar tus respuestas ya que aunque la ecuación esté bien resuelta, el resultado puede ser imposible en la realidad, como sucede en este caso.

¿Qué pasaría si solo quisiera obtener un 5,5 como promedio en el semestre? ¿Es posible?

PRACTICA

Escribe la ecuación correspondiente y luego resuelve interpretando la solución.

1. Un alumno de 8º año quiere calcular la nota que debe obtener en la última prueba de Lenguaje para asegurar un 5 de promedio final. Las notas que ha obtenido son las siguientes: 6,8 6,0 6,9 7,0 4,0 7,0 7,0.

Ecuación

Interpretación del resultado

2. Las notas de Jaime en Comprensión del Medio son: 5,0 5,0 4,0 4,0 4,0 6,6. ¿Qué nota debe sacarse en su última evaluación para obtener un 5,1 de promedio?

Ecuación

Interpretación del resultado

Resuelve los siguientes desafíos matemáticos.

3. El doble de la cantidad de dinero que tiene Juan, aumentada en $80 es igual a la misma cantidad pero aumentada en $30. ¿Cuánto dinero tiene Juan?

Ecuación	Interpretación del resultado

4. La longitud de un cable más 9 metros es igual a la mitad de la longitud del cable aumentado en 6 metros.

Ecuación	Interpretación del resultado

5. Un curso completo de 30 niñas decide ir al cine. Si la entrada cuesta $1.500 y solo disponen de $28.000, ¿para cuántas entradas les alcanza?

Ecuación	Interpretación del resultadoo

6. En un hogar para niños de escasos recursos se calcula que con $250 pueden ofrecer un desayuno por niño.

a. ¿Cuántos desayunos alcanzarían con $79.250?

Ecuación	Interpretación del resultado

b. ¿Cuánto dinero necesitan para ofrecer 500 desayunos?

Ecuación	Interpretación del resultado

Más problemas

Francisca terminará muy feliz el semestre si logra eximirse del examen de Tecnología. En esta asignatura solo le falta una nota. Las calificaciones que tiene hasta el momento son:

Lenguaje: 6,2; 6,5; Tecnología: 6,4; 6,3; 5,5; Comprensión del Medio: 6,1; 5,9; 6,3.

Los alumnos se eximen de Tecnología si el promedio de sus notas en esta asignatura es mayor o igual a 6,0, entonces ¿qué nota necesita Francisca en la última prueba para eximirse?

Comprender

¿Qué sabes del problema?

Las notas que tiene Francisca en Tecnología, en Lenguaje y en Comprensión del Medio.

¿Qué debes encontrar?

La nota que se debe sacar Francisca para eximirse de Tecnología.

Planificar

¿Cómo resolver el problema?

En algunas situaciones tenemos datos que no son relevantes para el problema que queremos resolver. Por eso es necesario identificar y seleccionar los datos que nos sirven para solucionar el problema. Te aconsejamos que taches los datos que no usarás.

Resolver

Los datos que necesitamos son las notas que tiene Francisca en Tecnología, y la nota que necesita para eximirse.

Nota Tecnología: 6,4; 6,3; 5,5
Nota para eximirse: 6,0

Planteamos la ecuación adecuada ▶ $\frac{6,4 + 6,3 + 5,5 + x}{4} = 6,0$

Resolvemos la ecuación ▶ $\frac{18,2 + x}{4} = 6,0$ ▶ $\frac{18,2 + x}{4} \cdot 4 = 6,0 \cdot 4$

$$18,2 + x = 24,0$$
$$x = 24,0 - 18,2$$
$$x = 5,8$$

Por lo tanto, Francisca necesita un 5,8 en la última prueba para eximirse en Tecnología.

Revisar

Calcular el promedio de notas que se obtiene con 5,8:

$$\frac{6,4 + 6,3 + 5,5 + 5,8}{4} = 6,0$$

y verifica que se obtiene 6,0

PRACTICA

1. Carolina quiere saber qué nota tiene que sacarse en Lenguaje para eximirse, si su promedio de notas debe ser mayor o igual que 6,5. Las notas que tiene Carolina son: Matemáticas: 5,8; 6,4; 4,2; Tecnología: 5,4; 5,7; 6,1; Lenguaje: 6,4; 5,9; 6,4; 6,5. ¿Qué nota necesita Carolina en la última prueba de Lenguaje para eximirse?

Comprender

¿Qué sabes del problema?

¿Qué debes encontrar?

Planificar

¿Cómo resolver el problema?

Resolver

Revisar

2. Las notas de Eduardo en Matemática son 5,7; 6,2; 4,8; 6,5; en Lenguaje: 6,3; 5,7; 5,9; Ciencias: 4,9; 6,7; 5,4. ¿Qué nota se sacó en la última prueba de Matemática si logró eximirse, dado que se eximen los alumnos con promedio superior a 6,0?

Cálculo mental

Encuentra el valor de la incógnita en cada caso.

1. $13 + x = 12$
2. $13 + y = 13$
3. $7 + v = 15$
4. $9 - z = 8$
5. $-x - 2 = -6$
6. $4a = 20$
7. $6y = 24$
8. $8n = 72$
9. $60 = 10y$
10. $100r = 10$
11. $20z = 80$
12. $35b = 105$
13. $x - 1 = 7$
14. $x + 7 = 20$
15. $x + 4 = 17$
16. $x - 2 = 6$
17. $3z = 12$
18. $b + 3 = 10$
19. $x + 1 = 8$
20. $7 - a = 7$

Calcula mentalmente y escribe la respuesta para cada caso.

21. ¿Por qué número hay que multiplicar 6,1 para obtener 6.100.000?

22. ¿Por qué número hay que multiplicar 5,098 para obtener 0,5098?

23. ¿Por qué número hay que multiplicar 4,7 para obtener 4.700?

24. ¿Por qué número hay que multiplicar 1,23 para obtener 0,000123?

Uso de la calculadora

La calculadora te puede ser muy útil para resolver una ecuación, siempre que tú tengas muy claro la operación matemática que hay que realizar, ya que la calculadora no “sabe” resolverlas por sí sola.

$5x = 62,5$ ▶ 6 2 . 5 : 5 = → 12.5

$12,8 + x = 25,6$ ▶ 2 5 . 6 – 1 2 . 8 = → 12.8

Resuelve.

1. $125x = 625.000$
2. $32,4 + x = 15.682,4$
3. $879x = 0,00879$
4. $2,701 + x = 0,0002701$
5. $129,5 = 32 + x$
6. $2012 = 0,00002012x$
7. $19,01 = 1.901.000 - x$
8. $1,27 = 4,07x$
9. $15,12 = 15.200 + x$

Síntesis

1. Una **ecuación** es una igualdad que contiene un valor desconocido llamado **incógnita**.

2. Resolver una ecuación equivale a encontrar el valor de la incógnita.

3. El **lenguaje algebraico** nos permite expresar matemáticamente una cierta información, utilizando números y letras.

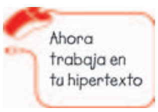
   Ejemplo:

   La afirmación "La edad de Pablo es el doble de la edad de Mauricio" se puede representar algebraicamente como $2x$, donde x representa la edad de Mauricio y $2x$ la edad de Pablo.

4. Si se realiza una operación en ambos lados de una ecuación, la igualdad se mantiene.

5. Para resolver una ecuación en la cual hay multiplicaciones, debes aislar el producto en que aparezca la incógnita mediante adiciones o sustracciones. Luego, despejar la incógnita realizando la división que corresponda.

   Ejemplo:



$$\begin{aligned} 2x + 3 &= 5 \quad / -3 \\ 2x + 3 - 3 &= 5 - 3 \\ 2x &= 2 \quad / : 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

6. Para resolver ecuaciones que tienen incógnitas en ambos lados de la igualdad, despejamos dejando a un lado las incógnitas y al otro lado los números.

   Ejemplo:

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 2x - 1 \\ 3x - 2x &= -1 - 2 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

7. Al resolver una ecuación debes interpretar el resultado obtenido, asegurándote de que este tenga sentido para la situación dada.

En tu cuaderno realiza un mapa conceptual que relacione **al menos** los conceptos dados a continuación: lenguaje algebraico; incógnita; igualdad; soluciones.

Evaluación

Marca la alternativa correcta en los ejercicios 1 al 10.

1. Se tiene la ecuación $3y - 5 = 7$. Entonces el valor de $2y - 1$ es:

   A. 7
   B. –4
   C. 9
   D. $\frac{1}{3}$

2. Se tiene la ecuación $2x + 5 = 11$. Entonces el valor de $-3x - 9$ es:

   A. 0
   B. 9
   C. –9
   D. –18

3. Si **u** es la edad de Alicia, la edad de Alicia en 10 años más será:

   A. $u + 10$
   B. $u - 10$
   C. $10u$
   D. $\frac{u}{10}$

4. Si $x = -3$, la expresión $3x + 19$ tiene un valor de:

   A. 0
   B. –1
   C. –4
   D. 10

5. Si Eduardo tiene **a** años, su edad en 15 años más será:

   A. $15a$
   B. $15 - a$
   C. $a - 15$
   D. $a + 15$

6. Alejandra hace 8 años tenía **x** años. En 6 años más tendrá:

   A. $x - 8 + 6$
   B. $x + 8 + 6$
   C. $8 + 6 - x$
   D. $8 - x - 6$

7. Un cuaderno cuesta $700 y una caja de lápices $1.000. ¿Cuánto cuestan 5 cuadernos y 3 cajas de lápices?

   A. 3.500
   B. 3.000
   C. 6.000
   D. 6.500

8. En un canasto hay 45 manzanas distribuidas en tres bolsas. La primera tiene 8 manzanas menos que la tercera y la segunda tiene 5 más que la tercera. ¿Cuántas manzanas tiene la segunda bolsa?

   A. 10
   B. 18
   C. 21
   D. 25

9. Un rectángulo tiene un largo que es el cuádruple de su ancho. Si su perímetro es de 120 cm, ¿cuál es el largo?

   A. 10
   B. 12
   C. 30
   D. 48

10. Carolina hace 7 años tenía 3 años de edad. ¿Qué ecuación nos permite determinar la edad de Carolina actualmente?

    A. $x + 7 = 3$
    B. $7 - x = 3$
    C. $x - 7 = 3$
    D. $3 - x = 7$

Ahora trabaja en tu hipertexto

Lee atentamente y resuelve los siguientes problemas en tu cuaderno.

1. El largo de un rectángulo mide el triple de su ancho. Si su perímetro es de 48 cm, ¿cuál es su área?

2. En un rectángulo, el largo es el cuádruple del ancho. ¿Cuáles son sus medidas si el perímetro es 140 cm?

3. Dos ángulos suman 180°. Si el mayor excede en 64° al menor, determina las medidas de los ángulos.

4. Sergio corrió en una competencia un cuarto más que el doble de lo que corrió Andrea. ¿Cuántos metros corrió Sergio, sabiendo que Andrea corrió 200 metros?

5. El precio de boleto de metro en tarifa baja es de \$380. Si el precio en tarifa alta es \$120 más que el de tarifa baja, ¿cuánto cuestan 10 boletos en tarifa alta?

   a. Si la diferencia entre el precio de la tarifa alta y baja se mantiene y el próximo año el precio del boleto en tarifa alta es de \$630, ¿cuánto costarán 30 boletos en tarifa baja?

6. La suma de tres números consecutivos es 30. ¿Cuáles son los números?

Ahora trabaja en tu hipertexto

¿Cómo trabajé?

Marca según tu apreciación	No lo entendí	Lo entendí	Puedo explicarlo
Noción de igualdad de expresiones algebraicas			
Traducción de enunciados verbales a lenguaje algebraico			
Resolución de ecuaciones con adiciones y sustracciones			
Resolución de ecuaciones con multiplicaciones y divisiones			
Resolución de ecuaciones con la incógnita en ambos lados			
Estudio de las soluciones			
Resolución de problemas usando ecuaciones			

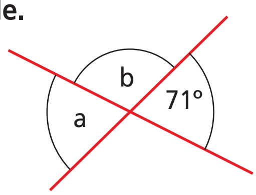
5 Geometría

Necesitas recordar

Dibuja en tu cuaderno los siguientes ángulos y luego clasifícalos.

1. 90° **2.** 45° **3.** 135° **4.** 17°

Observa la siguiente figura y responde.



5. ¿Cuál es el valor del ángulo a?

6. ¿Cuánto mide el ángulo b?

Completa las siguientes oraciones.

7. Un paralelogramo tiene ________ pares de lados paralelos.

8. Si un cuadrilátero tiene un par de lados paralelos, se denomina ____________.

9. El cuadrilátero que **no** tiene lados paralelos, se llama ____________.

10. El triángulo que tiene solo 2 lados de igual medida se llama ____________.

11. Si un triángulo **no** tiene lados de igual medida se denomina ____________.

Ahora trabaja en tu hipertexto

¿Qué aprenderás?

- A reconocer y calcular ángulos cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal.
- A calcular medidas de ángulos en triángulos.
- A calcular y relacionar ángulos en polígonos.
- A reconocer y construir circunferencias y sus elementos.
- A construir y calcular elementos de polígonos regulares.

Resuelve

Joaquín Torres García, S/T. Museo de la Solidaridad Salvador Allende.

La imagen de la izquierda corresponde a un óleo sobre cartón y sin título del pintor uruguayo Joaquín Torres García. El tamaño real es 70 x 81 cm. Como puedes ver, el cuadro está lleno de figuras geométricas y ángulos. Obsérvala atentamente y responde las siguientes preguntas.

1. ¿Qué figuras geométricas reconoces?

2. ¿Cuántos tipos de ángulos están presentes en este cuadro?

3. Escoge un cuadrilátero en la pintura y márcalo. ¿Cuántos pares de lados paralelos tiene?

4. ¿Cuánto mide la superficie de la pintura?

5. Haz tu propio diseño en tu cuaderno, en la que por lo menos aparezcan 3 triángulos isósceles y 4 cuadriláteros.

Ahora trabaja en tu hipertexto

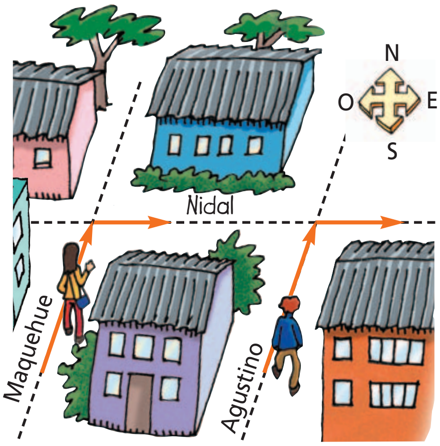
Aprendamos sobre arte

- Busca en Internet obras de Wassily Kandinsky.
- Analiza algunas de sus pinturas, específicamente las que presentan más formas geométricas. ¿Qué elementos geométricos reconoces en sus creaciones? ¿Cuáles son los que más se repiten? ¿Qué crees que trata de representar en sus obras a través de la geometría?
- Averigua sobre su vida, otras creaciones pictóricas y escritos.
- ¿Existe algún artista que también utilice elementos de la geometría euclidiana?

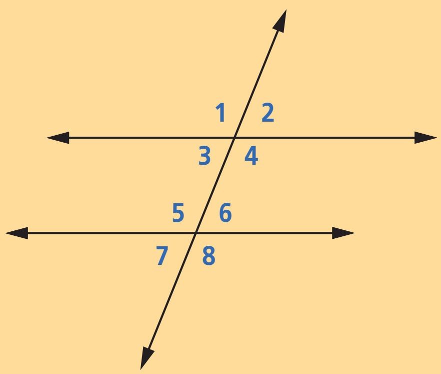
Ángulos entre paralelas cortadas por una transversal

EXPLORA

En la ilustración aparece el recorrido que Andrea y Joaquín siguen por las calles Maquehue y Agustino que son paralelas. Cuando llegan al cruce de Nidal giran hacia el este.
¿Cómo son los ángulos de giro de ambos? Si tienes transportador podrás medirlos y así observar y comprobar lo que posiblemente ya intuyas: son iguales en medida.
¿Qué sucedería con estos ángulos si las calles **no** fuesen paralelas? Comprueba tus sospechas con tus compañeros(as).



Cuando dos rectas paralelas son cortadas por una transversal se forman 8 ángulos que según su posición reciben los siguientes nombres:



∢1 y ∢5
∢2 y ∢6
∢3 y ∢7
∢4 y ∢8
Son ángulos correspondientes

∢1 y ∢8
∢2 y ∢7
Son ángulos alternos externos

∢3 y ∢6
∢4 y ∢5
Son ángulos alternos internos

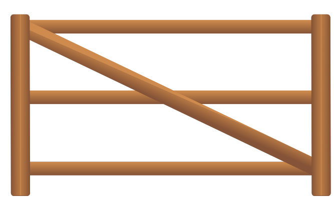
Los pares de ángulos correspondientes entre paralelas son iguales en medida.
Los pares de ángulos alternos externos entre paralelas son iguales en medida.
Los pares de ángulos alternos internos entre paralelas son iguales en medida.

PRACTICA

Resuelve en cada caso.

1. Marca en las letras H y N un par de ángulos alternos internos.

2. Marca en la tranquera dos pares de ángulos correspondientes.



Lee las definiciones y completa con verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

> Dos ángulos son contiguos cuando tienen un lado en común y ningún otro punto común.
>
> Los ángulos adyacentes son ángulos contiguos porque tienen un lado común y los otros dos lados son semirectas opuestas. Estos ángulos suman 180° y se llaman suplementarios.

3. ________ Los ángulos opuestos por el vértice miden lo mismo.

4. ________ Los ángulos alternos internos entre paralelas tienen igual medida.

5. ________ Los ángulos alternos externos entre paralelas miden lo mismo.

6. ________ Los ángulos adyacentes son suplementarios.

7. ________ Los ángulos adyacentes miden lo mismo.

Escribe todos los pares de ángulos indicados en la figura. Considera L_1 // L_2 // L_3 y L_4 transversal.

8. Ángulos opuestos por el vértice.

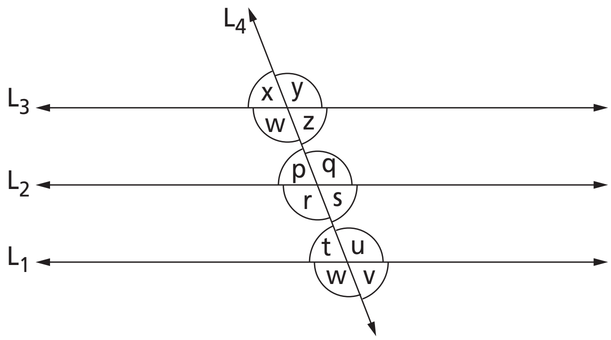
9. Ángulos correspondientes.

10. Ángulos alternos internos.

11. Ángulos alternos externos.

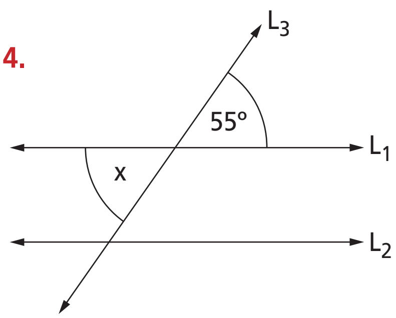
12. Ángulos suplementarios.

13. Ángulos adyacentes.

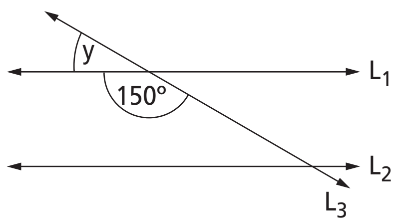


Usando las propiedades que ya conoces, encuentra la medida de los ángulos desconocidos. Considera L_1 // L_2 y L_3 transversal.

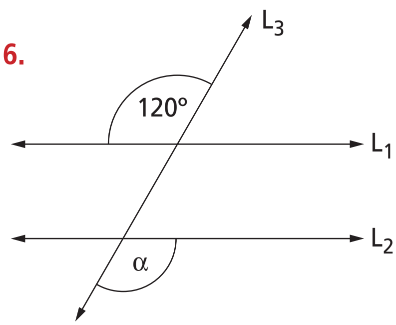
14.



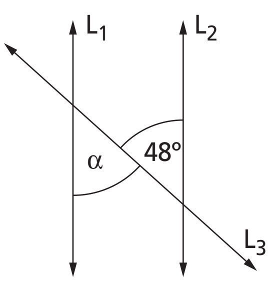
15.



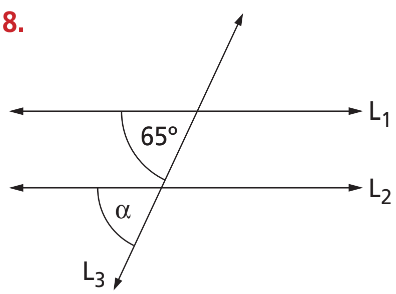
16.



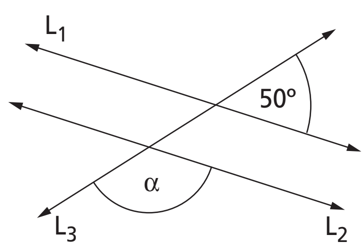
17.



18.



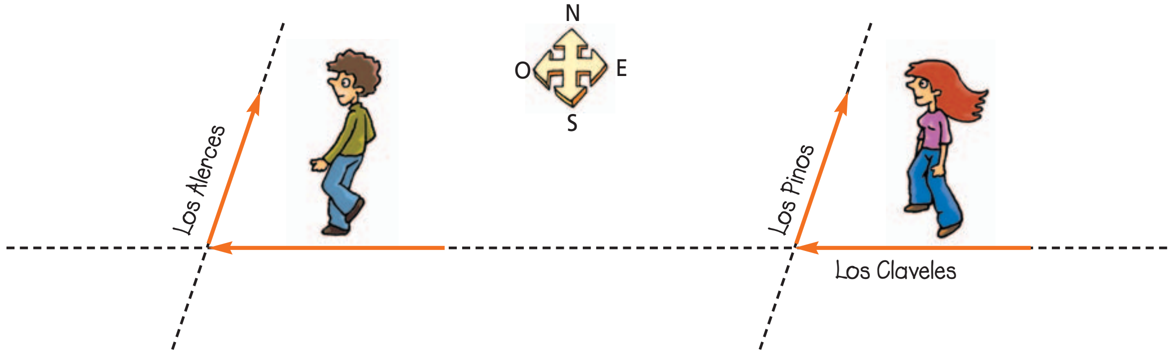
19.



Ángulos entre paralelas cortadas por una transversal

Lee atentamente y resuelve.

20. Las calles Los Alerces y Los Pinos son paralelas y ambas interceptan la calle Los Claveles. Dos personas caminan por la calle Los Claveles desde el este hacia el oeste. Cada una dobla hacia calles paralelas entre sí, como muestra el dibujo.



a. ¿Cuál es el ángulo de giro en cada caso? Márcalos.

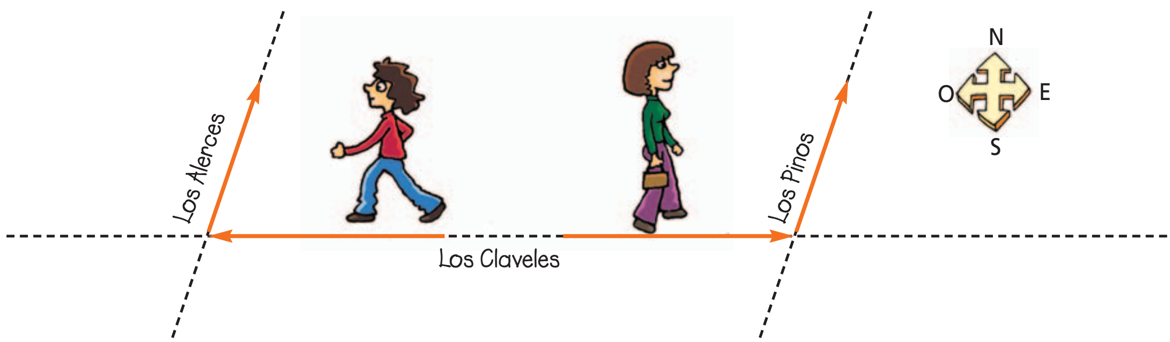
b. Para ambos casos, mide con un transportador el ángulo de giro. ____________________

c. ¿Qué relación existe entre ambos ángulos? ¿Por qué? ____________________

d. Si aumentaran ambos ángulos de giro en igual cantidad de grados, ¿se mantendría la relación?

____

21. Si ahora tuviéramos dos personas caminando en sentido contrario por Los Claveles:

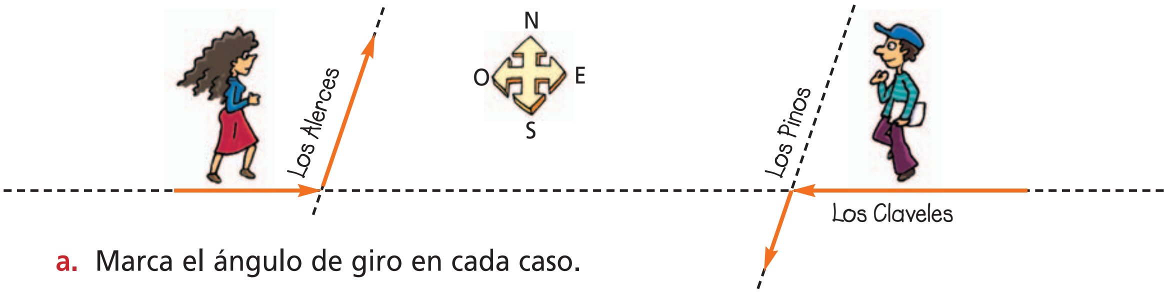


a. ¿Qué relación existe entre los ángulos de giro realizados por las 2 personas? ____________________

b. Para ambos casos, mide con un transportador el ángulo de giro. ____________________

c. ¿Se mantiene esta relación si disminuyen en igual cantidad de grados ambos ángulos de intersección de la calle Los Claveles con las calles Los Alerces y Los Pinos? ____________________

22. En las mismas calles anteriores, una mujer parte en la calle Los Claveles desde el oeste al este y dobla por la calle Los Alerces hacia el norte, y un hombre camina desde el este doblando en la calle Los Pinos hacia el sur. Observa el dibujo.



Ahora trabaja en tu hipertexto

a. Marca el ángulo de giro en cada caso.

b. Mide ambos ángulos de giro. ¿Qué relación observas? ______________________________

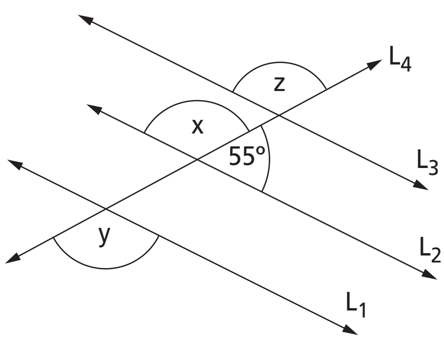
____

c. Si las calles Los Pinos y Los Alerces **no** fueran paralelas, ¿se mantendría la relación? Explica con un ejemplo. ____

____

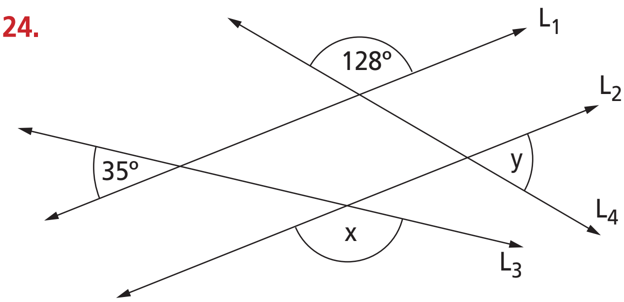
Ahora trabajarás con más de 3 rectas. Encuentra el valor de los ángulos desconocidos.

23.



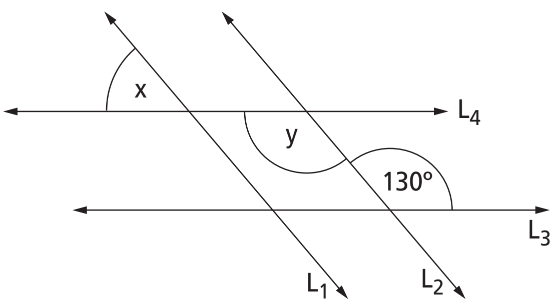
$L_1 // L_2 // L_3$

24.



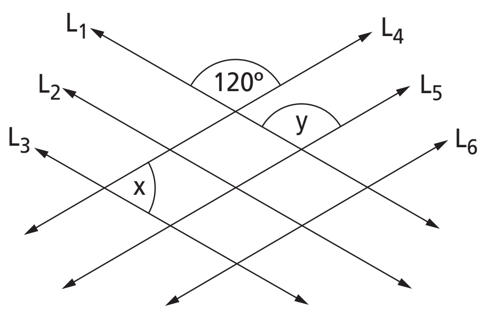
a. ¿Son paralelas las rectas L_3 y L_4? ¿Por qué?

25.



a. ¿Son paralelas las rectas L_3 y L_4? ¿Por qué?

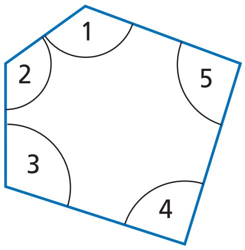
26.



$L_1 // L_2 // L_3$ $L_4 // L_5 // L_6$

Ángulos en polígonos

EXPLORA

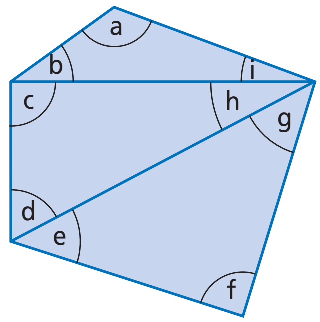


¿Cómo calcular la suma de los ángulos interiores del pentágono de la figura?

Te mostraremos que puedes resolverlo usando lo que ya has aprendido. Si tomas un vértice cualquiera y lo unes con los otros vértices puedes observar que se forman 3 triángulos.

Luego tenemos que la suma se transforma en:

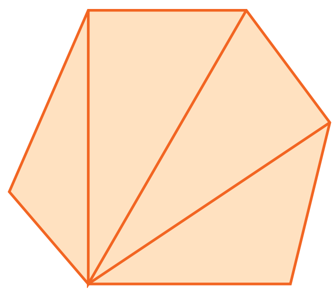
$$\sphericalangle 1 + \sphericalangle 2 + \sphericalangle 3 + \sphericalangle 4 + \sphericalangle 5 =$$
$$\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle c + \sphericalangle d + \sphericalangle e + \sphericalangle f + \sphericalangle g + \sphericalangle h + \sphericalangle i$$



Pero si los agrupamos de cierta forma obtenemos:

$$\underbrace{\sphericalangle a + \sphericalangle b + \sphericalangle i}_{180^\circ} + \underbrace{\sphericalangle c + \sphericalangle d + \sphericalangle h}_{180^\circ} + \underbrace{\sphericalangle e + \sphericalangle f + \sphericalangle g}_{180^\circ}$$

Podemos ver que la suma de los ángulos interiores de ese pentágono es 3 • 180º= 540º.



Si ahora te pidieran calcular la suma de los ángulos interiores de un hexágono, puedes usar la misma estrategia.

El hexágono puede dividirse en 4 triángulos, luego la suma de sus ángulos interiores es:

$$4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$$

Observa que en un polígono de **n** lados puedes formar **n – 2** triángulos, luego:

La suma de los ángulos interiores en un polígono de n lados es: (n – 2) • 180º.

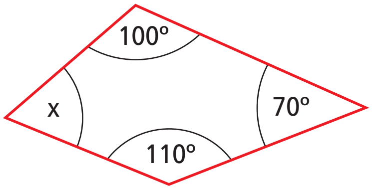
También podemos conocer la suma de los ángulos exteriores de un polígono. Te proponemos que completes la siguiente tabla tomando en cuenta que la suma de todos los ángulos exteriores y los interiores es **n veces 180º**, ya que cada ángulo exterior y su correspondiente ángulo interior forman un ángulo extendido.

Número de lados	Suma de ángulos interiores	Suma de ángulos exteriores
3	180º	3 • 180º – 180º = 360º
4	360º	
5		360º
6		

PRACTICA

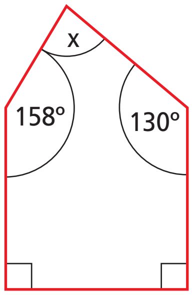
Calcula el valor de x en cada caso.

1.



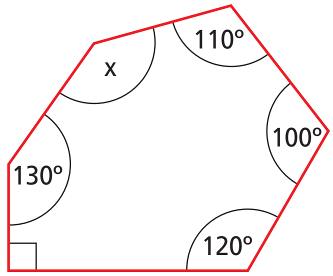
∢x = ____________

2.



∢x = ____________

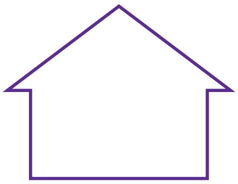
3.



∢x = ____________

Calcula la suma de los ángulos interiores en cada polígono.

4.

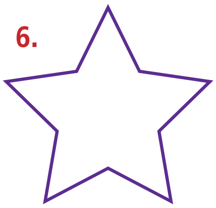


____

5.

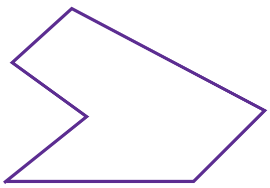
____

6.



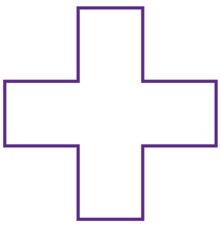
____

7.



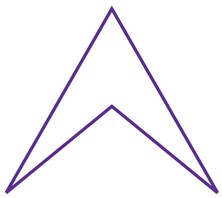
____

8.

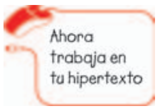


____

9.



____



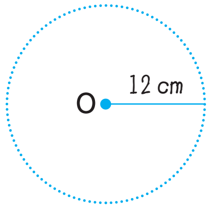
Completa la información del cuadro.

10.

La circunferencia y sus elementos

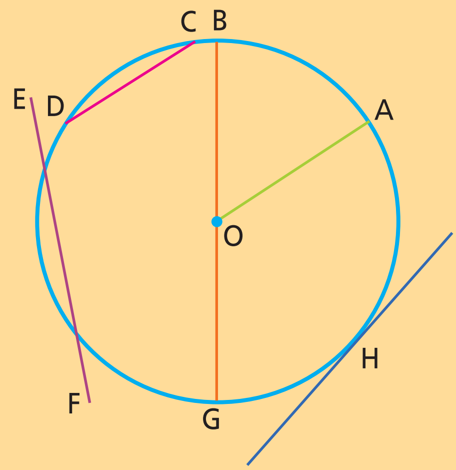
EXPLORA

Javier dibujó varios puntos que se ubican a 12 centímetros de otro punto que llamó **O**. Observa la imagen: ¿qué figura describen los puntos?



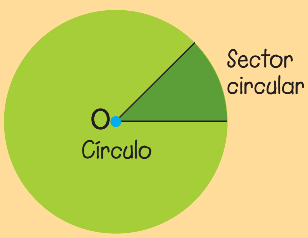
Una circunferencia está formada por todos los puntos del plano que están a igual distancia de un punto en particular llamado centro.
En una circunferencia podemos distinguir los siguientes elementos:
Cuerda (CD): segmento trazado entre dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
Radio (OA): segmento que une cualquier punto de la circunferencia con el centro.
Diámetro (BG): cuerda que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro. En toda circunferencia se tiene que la medida del diámetro corresponde al doble que la medida del radio.
Arco ($\overset{\frown}{AB}$): parte de circunferencia comprendida entre dos puntos de ella.

Una recta, según su posición respecto a una circunferencia, puede ser:
Tangente a una circunferencia (en punto H): recta que tiene solo un punto en común con la circunferencia.
Secante a una circunferencia (recta EF): recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

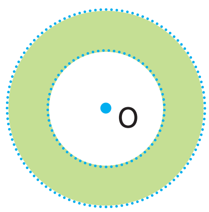


Observa que, en el caso del dibujo de Javier, el punto **O** corresponde al centro de la circunferencia, el radio mide 12 cm y, por lo tanto, el diámetro mide 24 cm.

A la superficie delimitada por la circunferencia se le llama círculo, y al sector formado por dos radios y la porción del círculo se le denomina sector circular.
Si un círculo se divide en n sectores circulares iguales, el ángulo de cada sector circular es igual a $\frac{360°}{n}$.



Imagina que Javier dibuja una segunda corrida de puntos, describiendo otra circunferencia de mayor tamaño, haciendo que sus centros coincidan. La parte de la superficie que hay entre ambos círculos (pintada de color verde) corresponde a la **corona circular.**

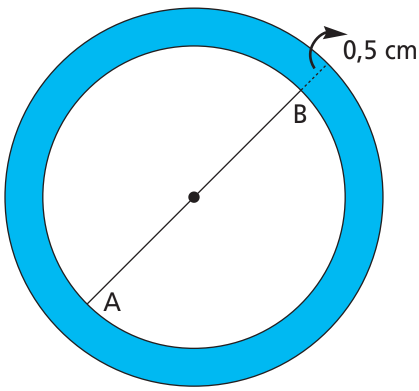


PRACTICA

Construye una circunferencia de radio 2 centímetros, sigue las instrucciones y responde las siguientes preguntas.

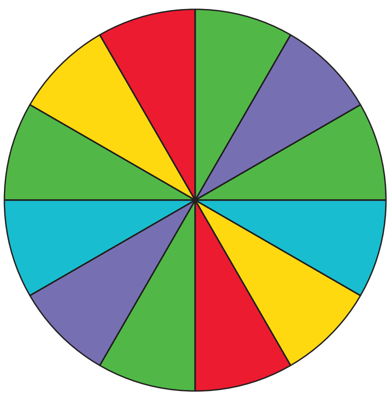
1. ¿Cuánto mide el diámetro de la circunferencia?
2. Si divides la circunferencia en 2 sectores circulares iguales, las figuras nuevas reciben el nombre de **semicírculos**. ¿Cuánto mide el ángulo de estos sectores circulares?
3. Y si divides cada semicírculo en tres, ¿cuánto mide el ángulo de esos sectores circulares?
4. Construye a partir de la circunferencia original otra circunferencia de radio 3 centímetros formando una corona circular. Compara los diámetros de ambas circunferencias. ¿Cuál es mayor?

Observa la siguiente circunferencia y completa las frases:



5. El segmento $\overline{AB}$ mide 4 centímetros y recibe el nombre de ______________________.
6. El sector pintado celeste se llama ______________________.
7. El radio de la circunferencia exterior es igual a ______________.
8. Si el ángulo de un sector circular es igual a 90º, entonces la circunferencia fue dividida en ____________ partes.

Observa el siguiente dibujo y responde.



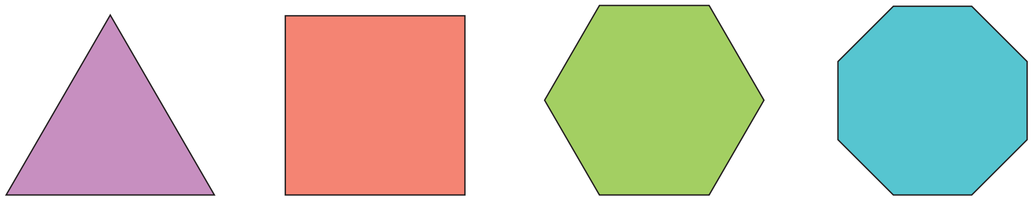
9. ¿Cuántos sectores circulares logras distinguir? ______________
10. ¿Qué porcentaje de sectores son rojos? ______________
11. ¿Qué porcentaje de sectores son verdes? ______________

12. Crea un mosaico en base a circunferencias y coronas circulares y compáralo con tus compañeros. ¿Quién usó la circunferencia de mayor diámetro? y ¿quién usó mayor cantidad de coronas circulares?

Polígonos regulares

EXPLORA

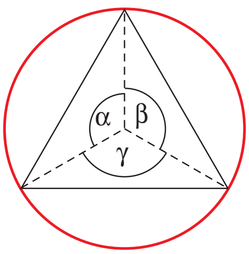
Observa los siguientes polígonos.



Se trata de un triángulo equilátero, un cuadrado, un hexágono y un octágono. Pon atención a las medidas de sus lados y sus ángulos. ¿Puedes ver alguna relación?

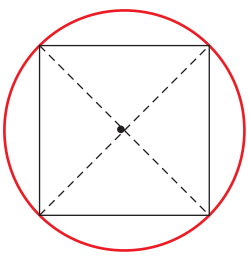
Aquellos polígonos cuyos lados tienen igual medida y tienen todos sus ángulos interiores de igual medida, son llamados polígonos regulares.

Imagina que circunscribimos al triángulo equilátero una circunferencia, es decir, que pasa por sus 3 vértices.



Si dividimos el triángulo en otros triángulos cuyo vértice es el centro de esta circunferencia, podemos ver que los triángulos formados son iguales, por lo tanto, los ángulos $\sphericalangle\alpha$, $\sphericalangle\beta$ y $\sphericalangle\gamma$ miden lo mismo. Ahora, como $\sphericalangle\alpha + \sphericalangle\beta + \sphericalangle\gamma = 360°$, tenemos que cada uno de esos ángulos mide $\frac{360°}{3} = 120°$.

Plantea la misma situación, pero esta vez con un cuadrado inscrito en una circunferencia.



Ahora formamos 4 triángulos iguales; luego los ángulos del vértice miden $\frac{360°}{4} = 90°$ cada uno.

Al dividir un polígono regular de n lados, en triángulos con uno de sus vértices en el centro de la circunferencia circunscrita, la medida de cada uno de los ángulos del vértice es igual a $\frac{360°}{n}$.

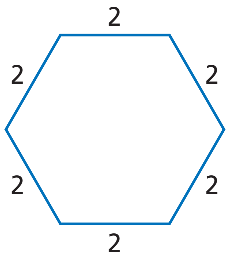
Cada ángulo interior de un polígono regular de n lados mide $\frac{180° \cdot (n - 2)}{n}$ ya que todos los ángulos tienen la misma medida.

Cada ángulo exterior de un polígono regular de n lados mide $\frac{360°}{n}$.

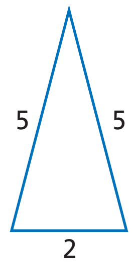
PRACTICA

En los siguientes polígonos indica cuál o cuáles son regulares.

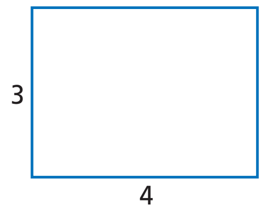
1.



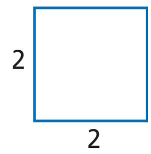
2.



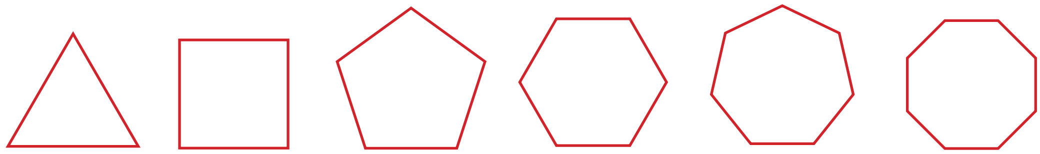
3.



4.



Observa los siguientes polígonos regulares y completa las frases.



Ahora trabaja en tu hipertexto

5. La principal característica de un polígono regular con respecto a sus lados es ______________________.

6. La principal característica de un polígono regular con respecto a sus ángulos interiores es ______________________
____.

Completa la siguiente tabla:

7.

Nombre	Número de lados	Suma ángulos interiores	Medida de cada ángulo interior
Triángulo equilátero			
	4		
			108°
			120°
			135°
Eneágono regular			

Piensa y responde las siguientes preguntas.

8. ¿Qué ocurre con las medidas de los ángulos interiores de un polígono regular a medida que la cantidad de lados crece?

____

9. Bajo la misma situación, ¿qué ocurre con la medida de los ángulos exteriores?

____

Más problemas

Dados los puntos no alineados A, B y C, construye un paralelogramo en el que $\overline{AC}$ sea una de sus diagonales.

Comprender

¿Qué sabes del problema?

A, B y C son puntos no alineados.

¿Qué debes encontrar?

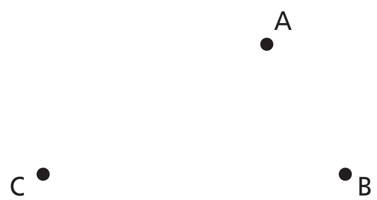
Un punto tal que forme un paralelogramo con los puntos A, B y C.

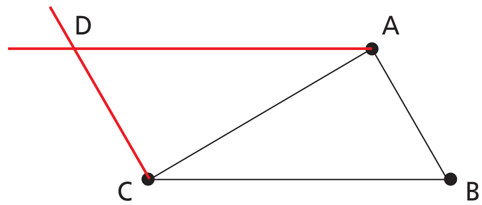
Planificar

¿Cómo resolver el problema?

Dibujar el triángulo ABC.
Trazar por A una paralela al lado BC y por C una paralela al lado AB.

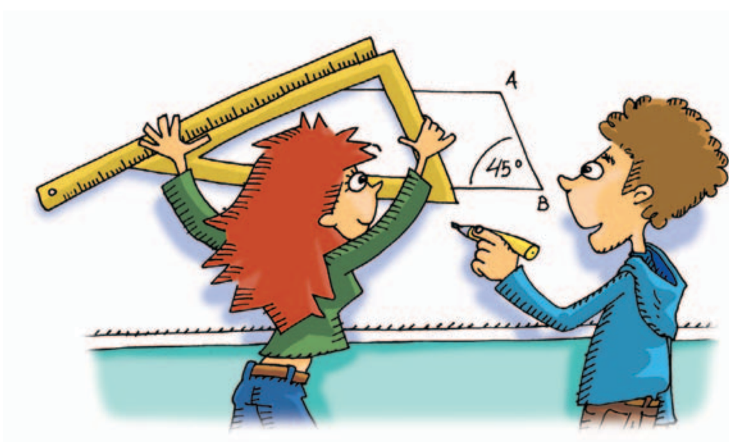
Resolver





Revisar

Chequeamos si los pares de ángulos alternos internos tienen igual medida.



PRACTICA

1. Dados los puntos no alineados A, B y C, construye un paralelogramo en el que $\overline{AB}$ sea una de sus diagonales.

Comprender

¿Qué sabes del problema?

¿Qué debes encontrar?

Planificar

¿Cómo resolver el problema?

Resolver

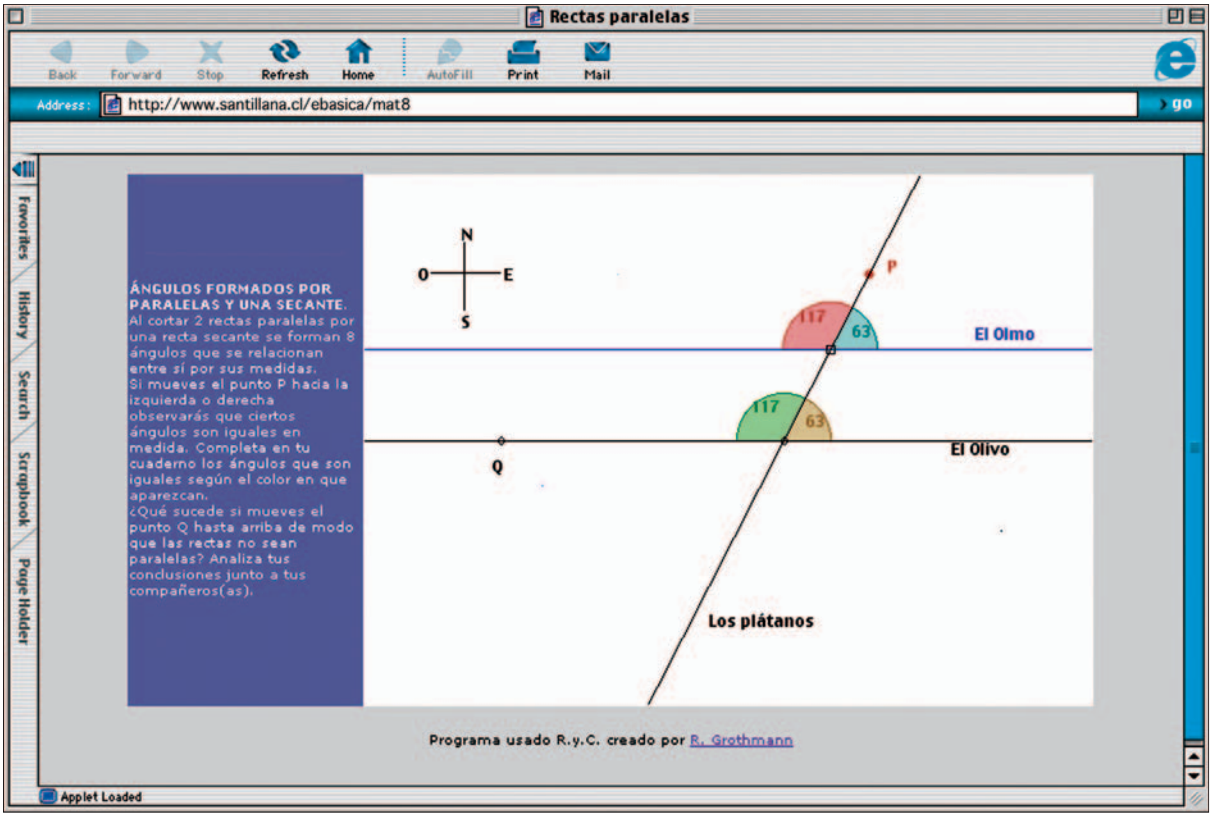
Revisar

2. Construye la circunferencia circunscrita al cuadrado que se forma con los puntos A, B y C.

Uso del computador

EXPLORA

Conéctate a Internet a la dirección www.santillana.cl/ebasica/mat8 y podrás interactuar con algunas de las propiedades que has estudiado en esta unidad.



1. En esta página web se muestra a las calles El Olmo y El Olivo, que son paralelas, cortadas por la calle transversal Los Plátanos. Si mueves el punto P con el mouse podrás cambiar la orientación de la recta transversal y si mueves el punto Q podrás cambiar la inclinación de la calle El Olivo.

   a. Mueve el punto P hasta que el menor de los ángulos que forman las calles El Olmo y Los Plátanos sea 50º. ¿Qué ángulo forman las calles El Olivo con Los Plátanos? Explica.

   ____

   ____

   b. Mueve el punto Q lo más arriba posible y verifica si se cumple lo que obtuviste en el punto 1. ¿Qué puedes concluir?

   ____

   ____

Síntesis

1. La suma de los **ángulos interiores** en un polígono de **n** lados está dada por la expresión: $\boxed{(n - 2) \cdot 180}$

2. **Ángulos adyacentes**: dos ángulos son adyacentes si tienen en común un vértice y un lado.

3. **Ángulos suplementarios**: dos ángulos son suplementarios si sus medidas suman 180º.

4. Una **circunferencia** está formada por todos los puntos del plano que están a igual distancia de un punto en particular llamado centro.

5. **Radio**: segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella.

6. El **diámetro** de la circunferencia es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.

7. **Cuerda**: segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.

8. **Arco**: parte de circunferencia comprendida entre dos puntos de ella.

9. **Tangente a una circunferencia**: recta que tiene solo un punto en común con la circunferencia.

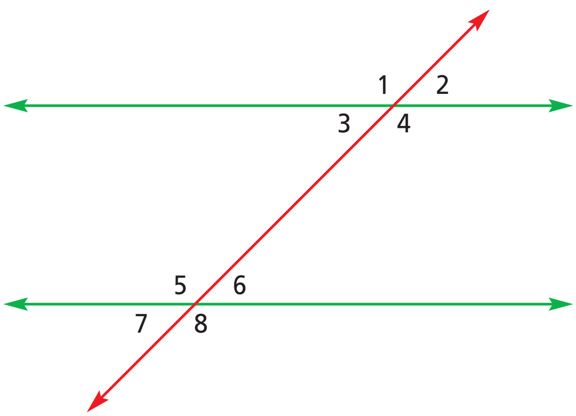
10. **Secante a una circunferencia**: recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

11. **Círculo**: superficie delimitada por la circunferencia.

12. **Sector circular**: parte del círculo comprendido entre dos radios y el arco que une los extremos de estos radios.

13. Si un círculo se divide en **n** sectores circulares iguales, el ángulo de cada sector está dado por la expresión: $\boxed{\dfrac{360^\circ}{n}}$

14. Dos **rectas paralelas** cortadas por una transversal forman los siguientes ángulos:



Ángulos correspondientes
1 y 5 2 y 6 4 y 8 3 y 7

Ángulos alternos internos
3 y 6 4 y 5

Ángulos alternos externos
1 y 8 2 y 7

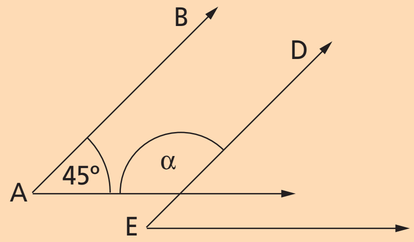
Ahora trabaja en tu hipertexto

En tu cuaderno realiza un esquema que relacione **al menos** los conceptos dados a continuación: rectas paralelas; ángulos; polígonos; circunferencia; ángulos interiores.

Evaluación

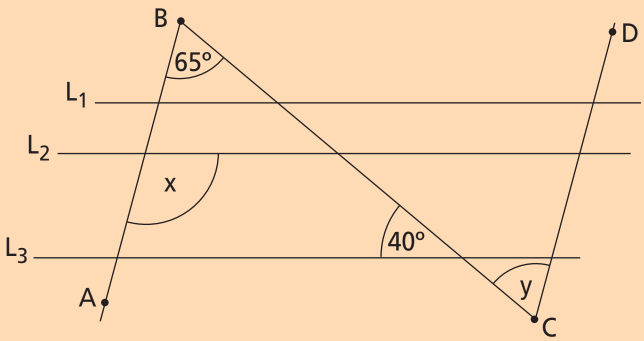
Marca la alternativa correcta en las preguntas 1 a la 6.

1. Si $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$, entonces el ∢α mide:



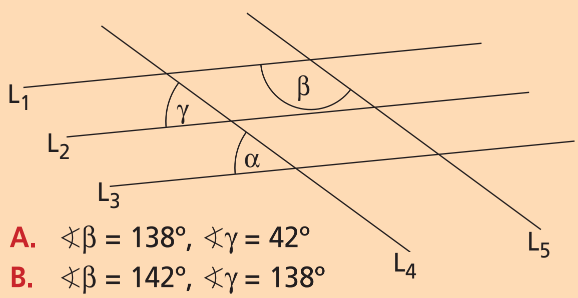
A. 35° **C.** 145°
B. 135° **D.** Falta información

2. Considera $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$. ¿Cuánto miden ∢x e ∢y?



A. ∢x = 115°, ∢y = 65°
B. ∢x = 40°, ∢y = 40°
C. ∢x = 105°, ∢y = 65°
D. ∢x = 115°, <y = 40°

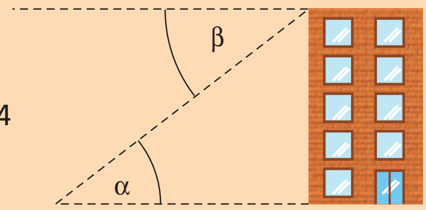
3. En la figura $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ y $L_4 \parallel L_5$. Si ∢α = 42°, la medida de ∢β y ∢γ es:



A. ∢β = 138°, ∢γ = 42°
B. ∢β = 142°, ∢γ = 138°
C. ∢β = 148°, ∢γ = 148°
D. ∢β = 42°, ∢γ = 13°

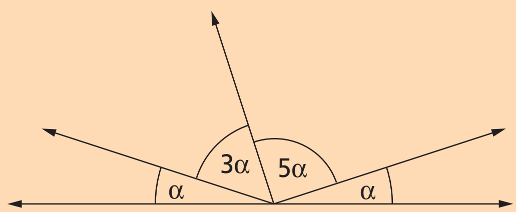
4. Con los datos del dibujo, calcula las medidas de los ángulos destacados.

∢α = 3x + 8
∢β = 5x – 14



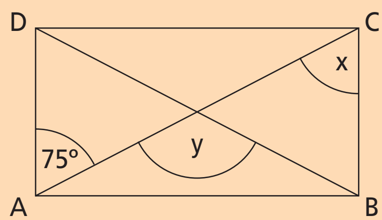
A. ∢α = 139° ; ∢β = 41°
B. ∢α = 41° ; ∢β = 139°
C. ∢α = 11° ; ∢β = 11°
D. ∢α = 41° ; ∢β = 41°

5. Calcula la medida del ángulo α.

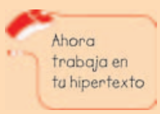


A. ∢α = 36° **C.** ∢α = 10°
B. ∢α = 18° **D.** ∢α = 180°

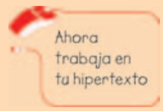
6. Si ABCD es un rectángulo, entonces ∢x e ∢y miden:



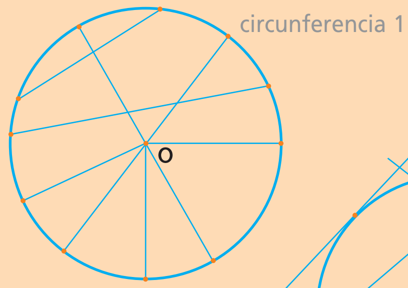
A. ∢x = 75 ; ∢y = 150
B. ∢x = 105 ; ∢y = 75
C. ∢x = 75 ; ∢y = 105
D. ∢x = 15 ; ∢y = 105



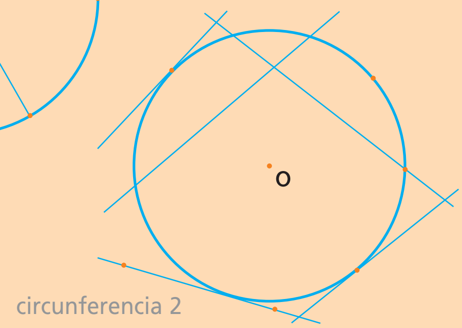
Lee atentamente y resuelve.



1. Marca en la circunferencia 1, de color:
   a. rojo ▶ 3 radios.
   b. azul ▶ Los diámetros.
   c. verde ▶ Las cuerdas.
   d. naranjo ▶ 4 arcos.



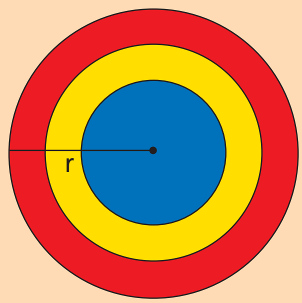
2. Marca en la circunferencia 2, de color:
   a. rojo ▶ 2 rectas tangentes a la circunferencia.
   b. azul ▶ 2 Las rectas secantes a la circunferencia.



3. Completa la siguiente tabla:

Número de divisiones de la circunferencia	Ángulo del sector circular	Fracción que representa al sector circular
3	$\frac{360°}{\square} = \square$	$\frac{1}{\square}$
$\square$	$\frac{360°}{4} = \square$	$\frac{1}{\square}$

4. En la siguiente figura se han pegado tres circunferencias: una roja, una amarilla y otra azul, haciendo coincidir el centro pero todas con distinto radio. La circunferencia roja tiene un radio de 12 cm y entre una y otra hay 3 cm de diferencia. Con esta información, completa la siguiente tabla:”



Circunsferencia	Roja	Amarilla	Azul
Radio			

¿Cómo trabajé?

Marca según tu apreciación	No lo entendí	Lo entendí	Puedo explicarlo
Ángulos entre paralelas cortadas por una transversal			
Ángulos en polígonos			
La circunferencia y sus elementos			

Taller de evaluación 1

Números positivos y negativos

1. El número que **falta** en la operación $38 - (\_\_\_\_\_) = 68$ es:

A. 30 B. 20 C. –20 D. –30

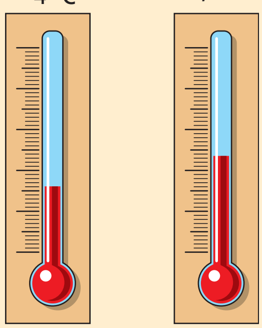
2. Los números –2; –3,1; –3,12; –3,2; –2,1 ordenados de **mayor** a **menor** son:

A. –3,2; –3,12; –3,1; –2,1; –2
B. –3,12; –3,2; –3,1; –2,1; –2
C. –2; –2,1; –3,1; –3,2; –3,12
D. –2; –2,1; –3,1; –3,12; –3,2

3. El **opuesto** del resultado de $-[-2 + 3 - 5 + 8 \cdot (-1)]$ es:

A. –12 B. –11 C. 11 D. 12

4. Los termómetros muestran la mínima y la máxima registradas en un día de invierno en Coyhaique. ¿Cuál es la variación de la temperatura?



A. 7,2 °C B. 0,8 °C C. –0,8 °C D. –7,2 °C

5. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **falsa**?

A. Todo número multiplicado por 0 es 0.
B. Al multiplicar una cantidad par de números negativos el resultado es positivo.
C. Al multiplicar 3 números positivos el resultado es negativo.
D. Al sumar dos números negativos el resultado es negativo.

6. $-3,2 + (-0,28) \cdot (-0,2) =$

A. 3,256 C. –3,144
B. –0,584 D. –3,68

7. Una cuenta corriente recibe 3 depósitos de $30.000 cada uno, 2 retiros de $25.000 y un depósito de $15.000. Si en un comienzo la cuenta tenía un saldo negativo de $40.000, ¿qué número representa el estado actual de la cuenta?

A. $55.000 C. $0
B. $15.000 D. –$15.000

8. Un caracol sube 4 m en el día y baja 1 m en la noche. ¿Cuántos días pasan hasta que alcance la superficie de un pozo de 13 m?

A. 3 C. 5
B. 4 D. 6

Potencias

9. Si el lado de un cuadrado se disminuye a la mitad, ¿qué fracción del área del cuadrado original es el área del cuadrado resultante?

A. el doble C. la cuarta parte
B. la mitad D. la octava parte

10. Un tipo de bacteria se duplica cada 5 minutos. ¿Cuántas habrá luego de $\frac{3}{4}$ de hora si en un comienzo había 2?

A. 256 B. 512 C. 1.024 D. 2.048

11. El número $97 \cdot 10^{2} \cdot 10^{15} \cdot 10^{-4}$ es:

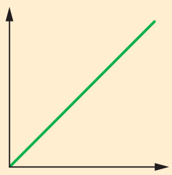
A. 0,0000000000097
B. 970.000.000.000.000
C. 9.700.000.000.000.000.000
D. 9.700.000.000.000.000.000.000.000.000.000

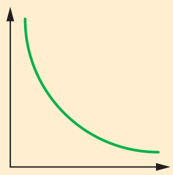
12. ¿Qué resultado **no** corresponde al desarrollo de $\dfrac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 8}{16 \cdot 9^2}$?

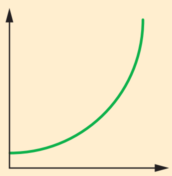
A. $\dfrac{2^2}{9}$ C. $\dfrac{4}{3^2}$

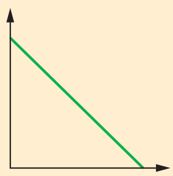
B. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$ D. $\dfrac{2^2}{3}$

13. ¿Cuál de los siguientes gráficos representa la extinción de una especie bacteriana luego de alcanzar grandes densidades poblacionales?

A. 

C. 

B. 

D. 

14. $\dfrac{2^0 \cdot 3^2 \cdot 4^{-2}}{3^{-1} \cdot 4}$ es igual a:

A. $\left(\dfrac{3}{2^2}\right)^3$ B. $\dfrac{3^3}{4}$ C. $\dfrac{3}{4^6}$ D. $\dfrac{9}{18}$

Números decimales y fracciones

15. El número entero 3.708 escrito como suma de potencias de 10 es:

A. $3 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2$

B. $3 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^1$

C. $3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1$

D. $3 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^0$

16. El número 0,00132 escrito en notación científica es:

A. $1{,}32 \cdot 10^{-4}$ C. $13{,}2 \cdot 10^{-4}$

B. $1{,}32 \cdot 10^{-3}$ D. $132 \cdot 10^{-5}$

17. El mayor número entre $0{,}\overline{45}$; $0{,}0\overline{5}$; 0,48; $0{,}\overline{5}$; 0,5 es:

A. 0,48 C. $0{,}\overline{5}$

B. $0{,}\overline{45}$ D. $0{,}0\overline{5}$

18. La fracción equivalente al decimal $2{,}1\overline{12}$ es:

A. $\dfrac{111}{990}$ C. $2\dfrac{111}{990}$

B. $2\dfrac{112}{990}$ D. $2\dfrac{111}{900}$

19. El número π redondeado a la milésima es:

A. 3,142 C. 3,1413

B. 3,141 D. 3,14

20. $2{,}3 - \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}2 + (-2) : \left(-\dfrac{1}{4}\right) =$

A. 2,8 C. 90,3

B. 2,7 D. 10,2

21. Cristina se toma $\dfrac{1}{2}$ botella de una bebida de $2\dfrac{1}{2}$ L. ¿Cuánta bebida le queda?

A. $1\dfrac{1}{2}$ litros C. $\dfrac{1}{2}$ botella

B. 2 litros D. $\dfrac{3}{4}$ de litro

22. $(0{,}\overline{3})^2 \cdot 9 + -5 : 0{,}2 - 1 =$

A. –20 C. 50

B. 19 D. –25

23. La suma de dos números es 1,25 y la diferencia entre ellos es 0,5. ¿Cuáles son los números?

A. 0,825 y 0,325 **C.** 0,775 y 0,475
B. 0,85 y 0,5 **D.** 0,875 y 0,375

Ecuaciones

24. En la ecuación $3x - 5 = 16$, el valor de $2x - 1$ es:

A. 7 **C.** –13
B. –7 **D.** 13

25. Si Esteban tiene **b** años, la edad de Esteban hace 6 años era:

A. 6**b** años **C.** (**b** + 6) años
B. $\frac{b}{6}$ años **D.** (**b** – 6) años

26. Claudia tenía 16 años hace 5 años. ¿Cuál es la ecuación que permite calcular la edad de Claudia?

A. $x + 5 = 16$ **C.** $x + 16 = 5$
B. $5 - 16 = x$ **D.** $x - 5 = 16$

27. Eduardo tiente **e** años, en 12 años más tendrá:

A. (**e** + 12) años **C.** (12 – **e**) años
B. (**e** – 12) años **D.** 12**e** años

28. El perímetro de un rectángulo es 150 cm. Si el largo es el doble del ancho, ¿cuál es la medida del largo del rectángulo?

A. 60 cm **C.** 30 cm
B. 50 cm **D.** 25 cm

29. El lado de un cuadrado mide **a** cm. La expresión que representa su perímetro es:

A. a^2 cm **C.** 4**a** cm
B. 2**a** cm **D.** 3**a** cm

30. La edad de Vania y Carolina suman 13 años. Si Vania tiene 10 años, ¿cuántos años tendrá Carolina en 2 años más?

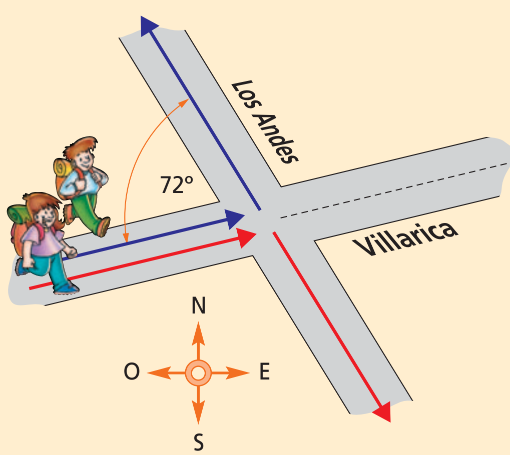
A. 16 **C.** 5
B. 13 **D.** 3

31. La suma de las medidas de dos ángulos es 180°. Si el mayor excede en 36° al menor, ¿cuánto mide el ángulo menor?

A. 144° **C.** 36°
B. 108° **D.** 72°

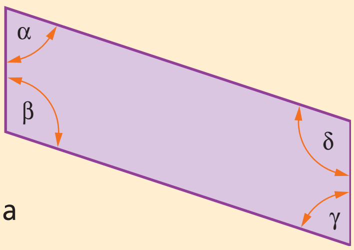
Geometría

32. Las calles Los Andes y Villarrica se intersectan como muestra el dibujo. Pablo y Cecilia caminan por Villarrica. Si Pablo gira en 72° hacia el noreste, el ángulo de giro de Cecilia, si dobla en dirección al sudoeste es:



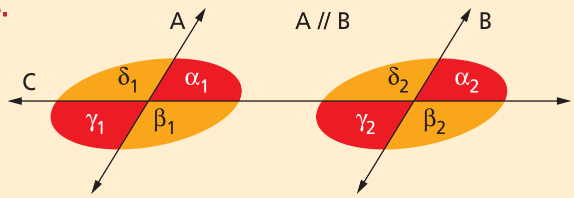
A. 72° **C.** 180°
B. 108° **D.** 172°

33. En el paralelogramo de la figura, ¿cuál de los siguientes pares de ángulos tienen la misma medida?



A. $\sphericalangle\alpha$ y $\sphericalangle\gamma$
B. $\sphericalangle\alpha$ y $\sphericalangle\beta$
C. $\sphericalangle\alpha$ y $\sphericalangle\delta$
D. Todos tienen distinta medida

34.



$\gamma_1 = 5(18° - x) + 23°$
$\beta_2 = 200° - (9x - 7°)$

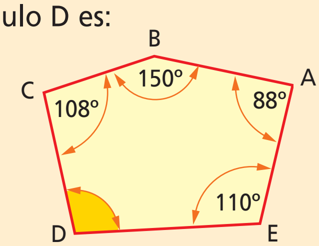
La medida del ángulo α_1 es:

A. 10° **B.** 43° **C.** 63° **D.** 117°

35. En la imagen anterior, la medida de δ_2 es:

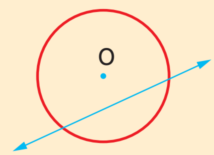
A. 10° **B.** 63° **C.** 117° **D.** 43°

36. La medida del ángulo D es:



A. 540°
B. 456°
C. 92°
D. 84°

37. En la siguiente circunferencia, el elemento marcado corresponde a:



A. una cuerda.
B. una tangente.
C. un diámetro.
D. una secante.

38. Si el diámetro de una circunferencia mide 8 m, su radio mide:

A. 2 m **C.** 8 m
B. 4 m **D.** 16 m

¿Cómo trabajé?

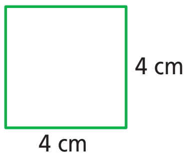
Revisa tus respuestas con un compañero y pinta, de izquierda a derecha, tantos cuadraditos como respuestas correctas tengas. Así sabrás qué temas dominas y en cuáles debes mejorar.

	Debo repasar	Bien	Muy bien	Excelente
Números positivos y negativos	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐	☐
Potencias	☐ ☐	☐ ☐	☐	☐
Números decimales y fracciones	☐ ☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐	☐
Ecuaciones	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐	☐
Geometría	☐ ☐ ☐	☐ ☐	☐	☐

UNIDAD 6
Medición

Necesitas recordar

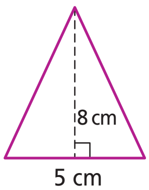
1. Dado el siguiente cuadrado:



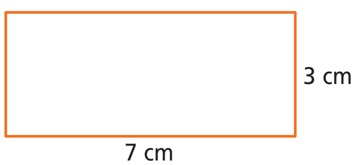
a. obtén su perímetro:

b. obtén su área:

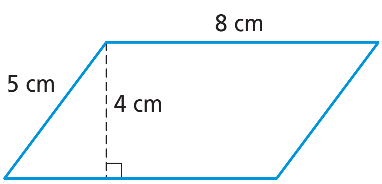
2. Calcula el área del triángulo.



3. ¿Cuál es el perímetro del rectángulo?



4. La siguiente figura es un romboide. ¿Cuál es su perímetro y área?



Ahora trabaja en tu hipertexto

¿Qué aprenderás?

- A calcular el área y el perímetro de polígonos compuestos.
- A calcular el área de un círculo y el perímetro de una circunferencia.
- A calcular el área y el perímetro de figuras compuestas.
- A establecer equivalencias entre unidades de volumen.
- A calcular el área y el volumen de algunos cuerpos geométricos.

Resuelve

El papá de Bernardo tiene un viñedo en un terreno rectangular de 800 m de ancho y 1.200 m de largo.

1. ¿Cuántos rollos de alambre de 50 m se necesitarán para cercar el terreno?

2. Si un metro cuadrado de terreno produce 10 kg de uvas, ¿cuál es el máximo de kilogramos de uvas que puede dar el terreno del papá de Bernardo?

3. Si se quiere considerar ahora un terreno cuadrado para la plantación de uvas y con el mismo perímetro del terreno anterior, ¿cuáles serían las dimensiones de este nuevo terreno?

4. ¿Cuántos kilogramos de uvas en total puede producir con este nuevo terreno? ¿Por qué sucede esto?

Ahora trabaja en tu hipertexto

La cosecha de la uva

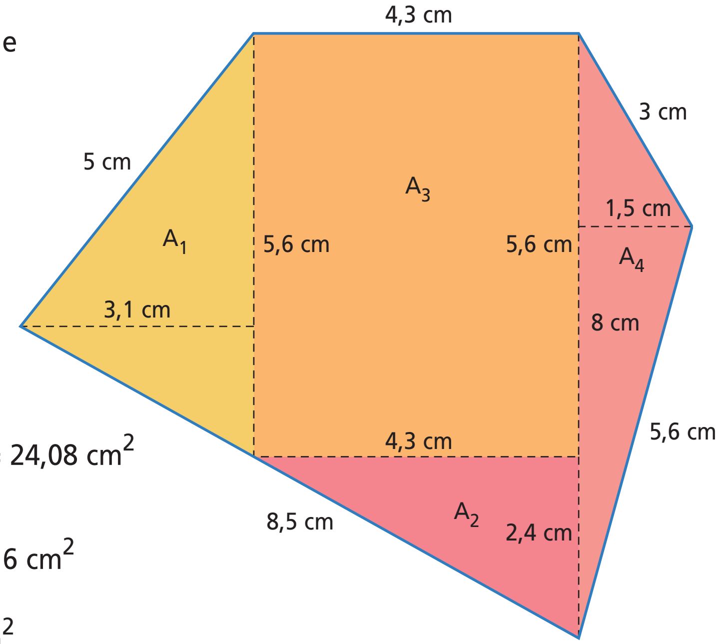
Sacar la uva de los parrones es una actividad que se ha tecnificado con el paso del tiempo. Actualmente, cada viña dispone de máquinas cosechadoras, no obstante, la cosecha de uvas para vinos más sofisticados la siguen haciendo personas en forma manual.

- Averigua cuántos kilogramos de uva es capaz de sacar una persona y cuántos una máquina, en un día. ¿Cuáles son los beneficios de trabajar con personas en esta labor? ¿y qué beneficios aporta el trabajo con máquinas?

Áreas y perímetros de polígonos compuestos

EXPLORA

La figura pentagonal de la ilustración corresponde al terreno de una casa.



¿Cuál es el perímetro del terreno?

Perímetro = 5 + 4,3 + 3 + 5,6 + 8,5 = 26,4 cm

¿Cuál es el área del terreno?

Área terreno = $A_1 + A_2 + A_3 + A_4$

$A_1 = \dfrac{5,6 \cdot 3,1}{2} = 8,68 \text{ cm}^2$ $\qquad$ $A_3 = 4,3 \cdot 5,6 = 24,08 \text{ cm}^2$

$A_2 = \dfrac{2,4 \cdot 4,3}{2} = 5,16 \text{ cm}^2$ $\qquad$ $A_4 = \dfrac{8 \cdot 1,5}{2} = 6 \text{ cm}^2$

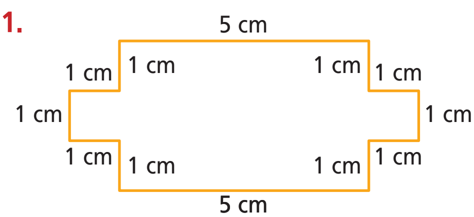
Área terreno = 8,68 + 5,16 + 24,08 + 6 = 43,92 cm^2

El perímetro de un polígono es la longitud de su frontera.
El área de un polígono compuesto se obtiene dividiendo la figura en polígonos conocidos y calculando el área de cada uno de ellos y luego sumando o restando estas áreas, según corresponda.

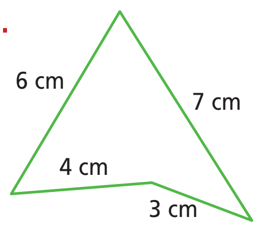
PRACTICA

Calcula el perímetro de los siguientes polígonos.

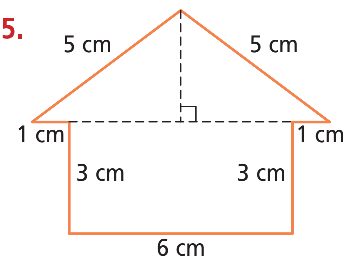
1.



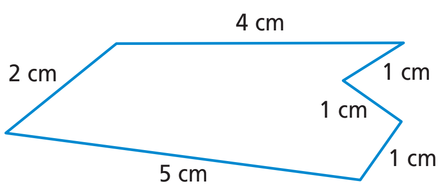
3.



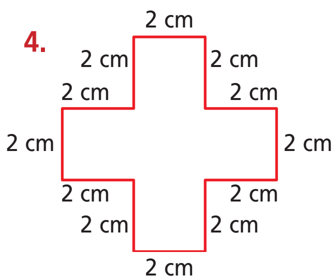
5.



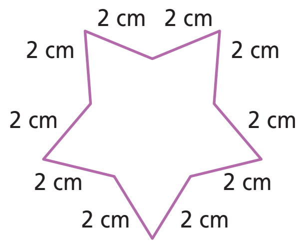
2.



4.



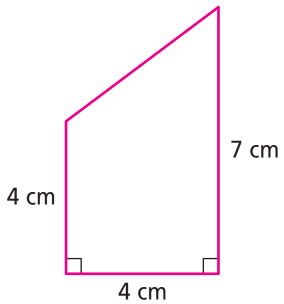
6.



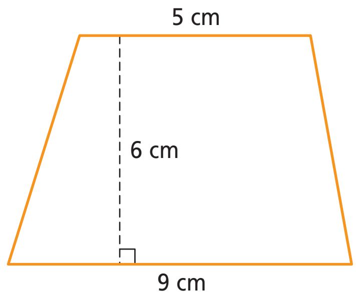
Ahora trabaja en tu hipertexto

Calcula el área de los siguientes polígonos.

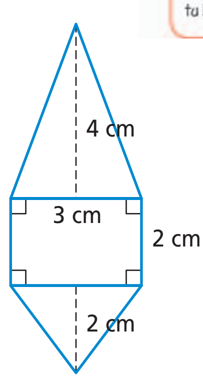
7.



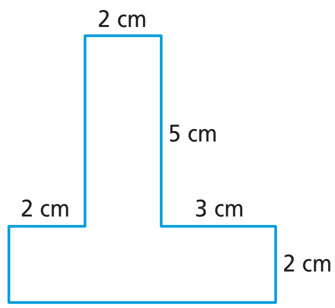
9.



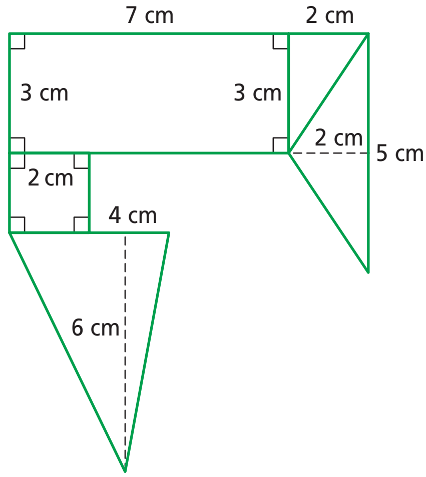
11.



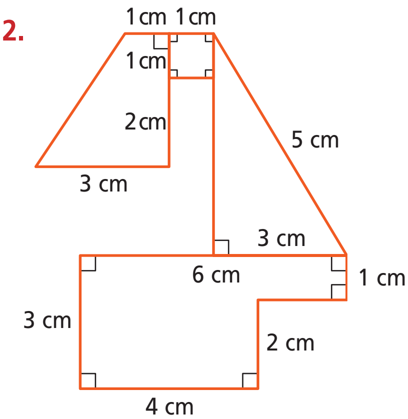
8.



10.

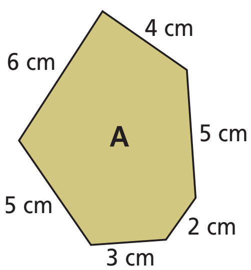


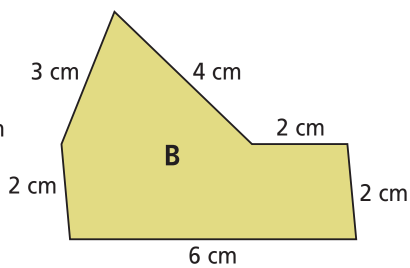
12.

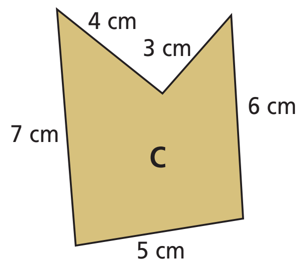


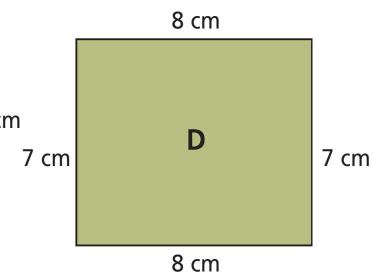
Resuelve.

13. Indica qué polígonos tienen igual perímetro.

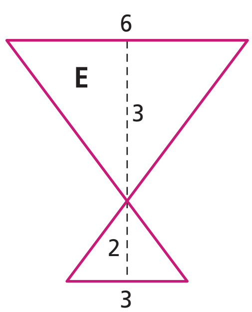


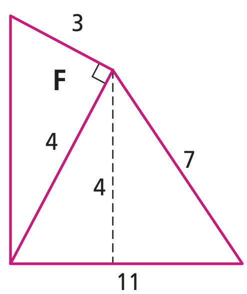


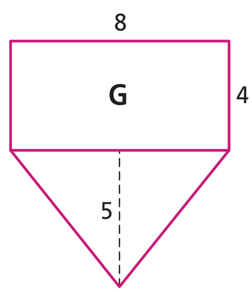


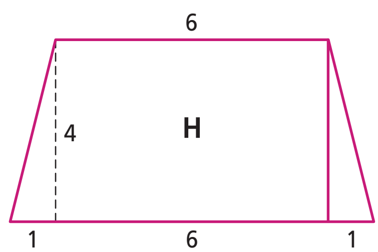


14. Indica qué polígonos compuestos tienen igual área.



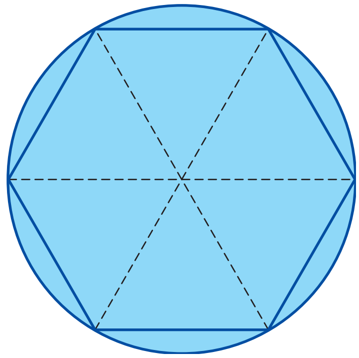






Perímetro de la circunferencia

EXPLORA



La siguiente figura muestra un hexágono regular que está inscrito en una circunferencia. El hexágono regular está dividido en 6 triángulos equiláteros, que tienen un vértice común en el centro de la circunferencia.

Si comparas las medidas, observarás que cada arco de la circunferencia es un poco mayor que el lado del triángulo, y por lo tanto, es un poco mayor que el radio.

Como sabemos, el perímetro de una figura es la longitud de su frontera, luego, el perímetro de la circunferencia es igual a la suma de todos los arcos de la circunferencia, es decir, un poco mayor que 6 radios.

$$\text{Perímetro} > 6 \text{ radios}$$

Como el diámetro es igual a 2 radios, tenemos:

$$\text{Perímetro} > 3 \text{ diámetros}$$

En otras palabras, el cociente entre el perímetro de la circunferencia y su diámetro es un poco mayor que 3. Si en vez de un hexágono tenemos un polígono regular con 20 lados y seguimos el mismo procedimiento, nos acercaremos más al valor de $\pi = 3{,}1415$.

La razón entre el perímetro y el diámetro de una circunferencia recibe el nombre de π y su valor aproximado es 3,14.
La longitud de una circunferencia es igual al producto de su diámetro por π.

$$\text{Perímetro} = \pi \cdot \text{diámetro}$$

como el diámetro es 2 veces el radio, tenemos:

$$\text{Perímetro} = 2\pi \cdot \text{radio}$$

PRACTICA

Calcula el perímetro de cada circunferencia sabiendo la medida del radio (r). Considera $\pi = 3{,}14$.

1. r = 2 cm
2. r = 6 cm
3. r = 9 cm
4. r = 7 cm
5. r = 0,5 m
6. r = 1,4 m
7. $r = \frac{7}{8}$ m
8. r = 0,6 m
9. r = 3,14 km
10. r = 0,2 km
11. $r = \frac{3}{4}$ km
12. r = 100 km

Calcula el radio de una circunferencia sabiendo la medida del perímetro (P). Considera $\pi = 3{,}14$.

13. P = 75,36 cm
14. P = 50,24 cm
15. P = 31,4 cm
16. P = 188,4 cm
17. P = 3,14 m
18. P = 314 m
19. P = 150,72 m
20. P = 62,8 m
21. P = 0,628 km
22. P = 6.280 km
23. P = 1.256 km
24. P = 942 km

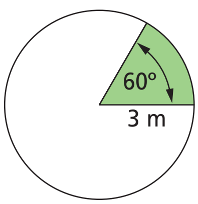
Ahora trabaja en tu hipertexto

Completa la siguiente tabla para perímetros de sectores circulares.

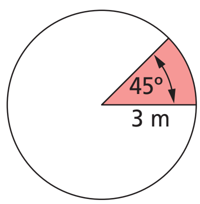
25.

Nº de divisiones de la circunferencia	Ángulo del sector circular	Fracción del sector circular	Perímetro
1	360º	1	$2\ \pi r$
2	$\frac{360º}{2} = 180º$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \bullet 2\ \pi r + 2\ r$
3			
4			
5			
6			
10			

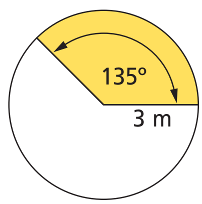
Calcula el perímetro de los siguientes sectores circulares.

26. 

▶ ________

27. 

▶ ________

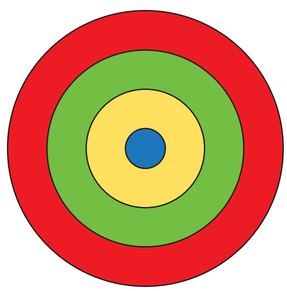
28. 

▶ ________

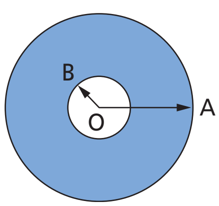
Resuelve en cada caso.

29. Observa la figura y completa.

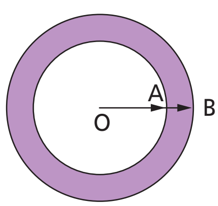
Circunferencia	Radio	Perímetro
Roja	10	
Verde		$16\ \pi$
Amarilla	6	



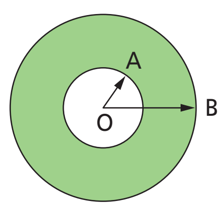
Calcula el perímetro de las siguientes coronas circulares.

30. 

OA = 15 μ
OB = 5 μ

31. 

OA = 5 μ
OB = 7 μ

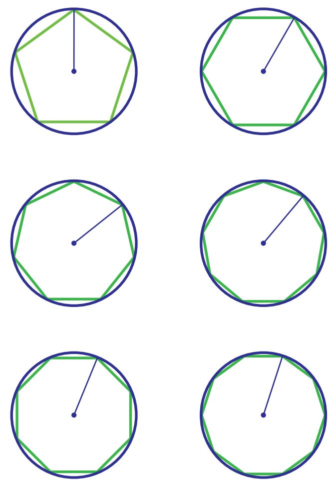
32. 

OA = 12 μ
OB = 28 μ

Área del círculo

EXPLORA

Una manera de estimar el área de una circunferencia es inscribiendo en ella polígonos regulares. Observa.



Como puedes ver en las figuras, mientras más lados tenga el polígono regular, su área será una mejor aproximación al área del círculo. Por otra parte, la medida del apotema (ρ) del polígono se aproxima cada vez más al radio del círculo. Luego, podemos calcular el área del círculo considerando que este se aproxima a un polígono regular de muchos lados, es decir:

$$A = \underbrace{\frac{\text{perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}}_{\text{Fórmula para el cálculo del área de un polígono regular}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r \cdot r}{2} = \pi \cdot r^2$$

> El área de un círculo es el producto de su radio al cuadrado por π.
>
> Área = $p \cdot r^2$

PRACTICA

Calcula el área de cada círculo sabiendo la medida del radio (r). Considera π = 3,14.

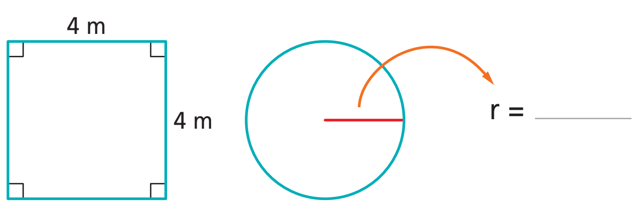
1. r = 8 cm
2. r = 4 cm
3. r = 1,2 cm
4. r = 9,3 cm
5. r = 0,3 cm
6. r = 189 cm
7. r = 3,14 cm
8. r = 0,17 cm
9. r = 3,2 cm
10. r = 20 cm
11. r = 30,8 cm
12. r = 0,15 cm

Calcula el radio de cada círculo, sabiendo la medida del área (A). Considera π = 3,14.

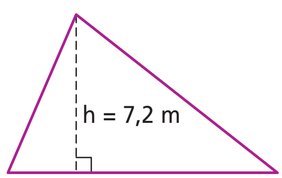
13. A = 50,24 μ^2
14. A = 12,56 μ^2
15. A = 314 μ^2
16. A = 78,5 μ^2
17. A = 0,0314 μ^2
18. A = 254,34 μ^2
19. A = 113,04 μ^2
20. A = 0,1256 μ^2
21. A = 452,16 μ^2
22. A = 31.400 μ^2
23. A = 706,5 μ^2
24. A = 530,66 μ^2

Resuelve.

25. ¿Qué valor debe tener el radio de un círculo para que su área sea igual al área del cuadrado de la figura?



26. ¿Cuál debe ser el valor del área de un círculo, si el radio es igual a la altura del triángulo de la figura?



Completa la siguiente tabla para áreas de sectores circulares.

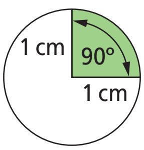
27.

Nº de divisiones de la circunferencia	Ángulo del sector circular	Fracción del sector circular	Área
1	360º	1	$\pi \bullet r^2$
2	$\frac{360º}{2} = 180º$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\pi \bullet r^2$
3			
4			
5			
6			
10			

a. Si el ángulo del sector circular aumenta al doble, ¿qué sucede con el área? Explica.

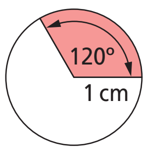
Calcula el área de los siguientes sectores circulares.

28.



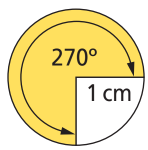
▶ ________

29.



▶ ________

30.

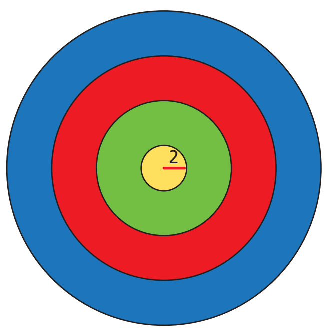


▶ ________

Resuelve.

31. Observa la figura y completa.

Círculo	Radio	Área	Área de corona circular
Celeste	15		$225\pi - 100\pi = 125\pi$
Roja	10		
Verde	5		



Lee atentamente y resuelve.

32. La forma de un CD de audio es una corona circular. ¿Cuál es su área?

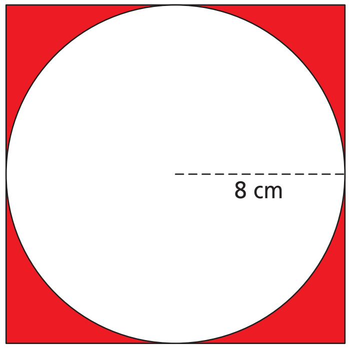
33. Identifica en una rueda de auto una corona circular, calcula su área y su perímetro. Averigua qué significa cada una de las medidas que aparecen en la rueda de un auto.

34. Si el radio de una circunferencia varía, ¿cómo varía el área de la circunferencia?

Áreas y perímetros de figuras compuestas

EXPLORA

¿Cuál es el área y la suma de los perímetros exterior e interior de la parte pintada de la figura?



Para resolver este problema debes identificar las distintas figuras involucradas.

La zona pintada corresponde a la parte del cuadrado que no alcanza a cubrir la circunferencia, es decir,

zona pintada = zona cuadrada – zona circunferencia

Área de la zona pintada:

Área = área cuadrado – área círculo
Área = $16 \bullet 16 - \pi \bullet 8^2 = 256 - 64\,\pi = 55{,}04$ cm^2

Perímetro exterior e inferior de la zona pintada:

Perímetro = perímetro exterior + perímetro interior
Perímetro = perímetro cuadrado + perímetro circunferencia
Perímetro = $16 \bullet 4 + 2\,\pi \bullet 8 = 64 + 16\,\pi = 64 + 50{,}24 = 114{,}24$ cm

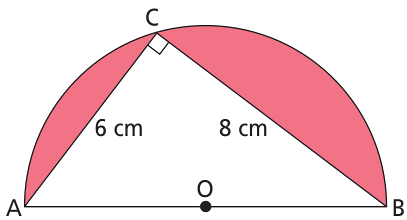
Recuerda:

- Identificar qué partes comprende la figura pintada.
- Analizar cómo obtener el área y el perímetro.
- Realizar las mediciones requeridas para tus cálculos.

PRACTICA

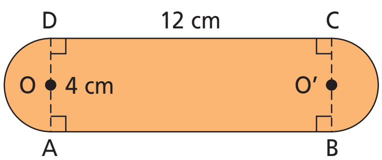
Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras pintadas. (Considera π = 3,14).

1.



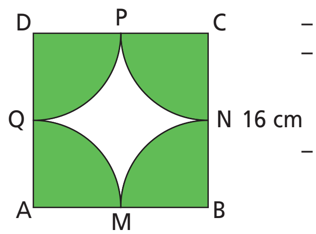
– O: centro de la circunferencia

2.



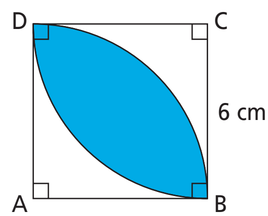
– ABCD es rectángulo
– O y O': centro de cada circunferencia respectivamente

3.



– ABCD es un cuadrado
– M, N, P y Q son puntos medios de cada lado del cuadrado respectivamente.
– $\overset{\frown}{PN}$, $\overset{\frown}{QP}$, $\overset{\frown}{MQ}$, $\overset{\frown}{NM}$ son arcos de circunferencia de radio 8 cm.

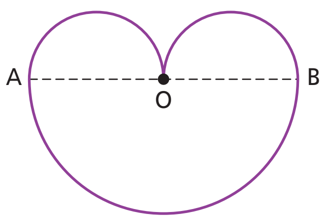
4.



– ABCD es un cuadrado $\overline{BD}$ es diagonal del cuadrado.
– $\overset{\frown}{DB}$, $\overset{\frown}{BD}$, son arcos de circunferencia de radio 6 cm.

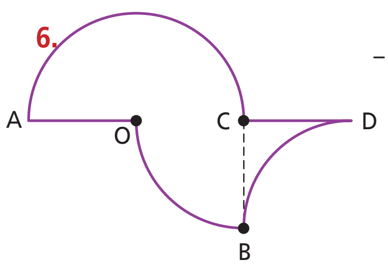
Realiza las mediciones necesarias y calcula el área de cada figura. (Considera π = 3,14).

5.



– $\overset{\frown}{OA}$, $\overset{\frown}{BO}$ y $\overset{\frown}{AB}$ corresponden a arcos de circunferencia.

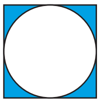
6.



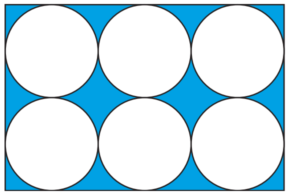
– $\overset{\frown}{CA}$, $\overset{\frown}{OB}$, $\overset{\frown}{DB}$ corresponden a arcos de circunferencia.

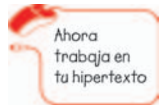
Calcula el área pintada si sabes que los círculos son congruentes y su radio es de 1 cm cada uno. (Considera $\pi = 3{,}14$).

7.



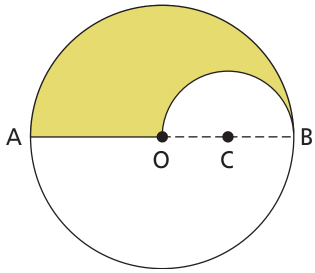
8.





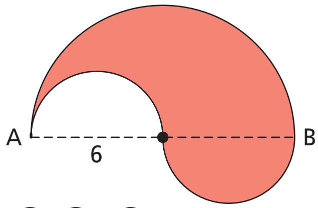
Calcula el área y el perímetro de cada figura pintada. Expresa el resultado en función de π.

9.



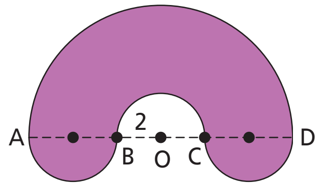
- AB es diámetro
- O, C puntos medios de AB y OB respectivamente
- CB = 4 cm
- $\overset{\frown}{BO}$ y $\overset{\frown}{BA}$ arcos de circunferencia.

11.



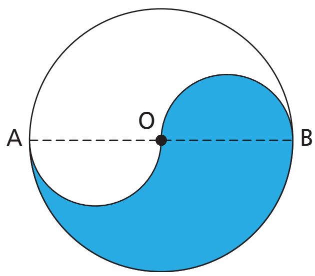
- $\overset{\frown}{OA}$, $\overset{\frown}{OB}$ y $\overset{\frown}{BA}$ son arcos de circunferencia de radio 3; 3 y 6 respectivamente.

13.



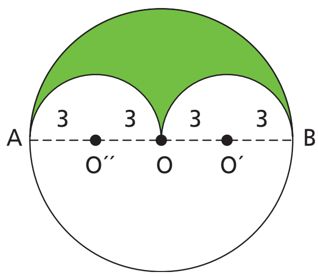
- $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{CD}$ son arcos de circunferencia de radio 2;
- $\overset{\frown}{DA}$ es arco de circunferencia de radio 6.

10.



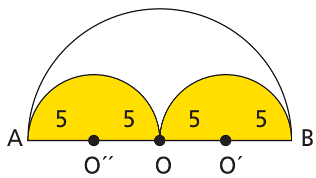
- O centro de la circunferencia
- OB = 8 cm
- $\overset{\frown}{BO}$, $\overset{\frown}{AO}$ y $\overset{\frown}{AB}$ son arcos de circunferencia.

12.



- $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BO}$ y $\overset{\frown}{OA}$ son arcos de circunferencia.

14.



- $\overset{\frown}{OA}$ y $\overset{\frown}{BO}$ son arcos de circunferencia de radio 5.

Lee atentamente y resuelve.

15. La pared de una habitación mide 6 m de ancho y 2,5 m de alto; además tiene 2 ventanas circulares de 50 cm de radio cada una.

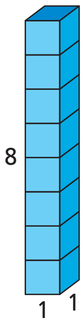
a. Si no estuvieran las ventanas, ¿qué superficie tendría la pared?
b. ¿Qué medida tiene la superficie de cada ventana?
c. Si quieres pintar la pared, ¿cuál es el área de la superficie a pintar? Explica tu procedimiento.
d. Si un tarro de pintura alcanza para 5 m^2, ¿cuántos tarros necesitas para pintar la pared?
e. Si cada tarro cuesta $850, ¿cuánto dinero se necesita para pintar la pared?

Medición del volumen

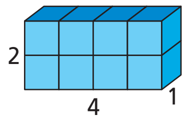
EXPLORA

Cada uno de los siguientes cuerpos está formado por ocho cubitos de 1 metro de arista cada uno. Con este dato se puede calcular fácilmente el área de cada una de las caras de los cuerpos. Observa cómo hacerlo.

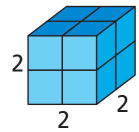
1.



2.



3.



Á = 1•1+1•1+8•1+8•1+8•1+8•1 Á = 34 m^2	Á = 4•2+4•2+1•2+1•2+1•4+1•4 Á = 28 m^2	Á = 2•2+2•2+2•2+2•2+2•2+2•2 Á = 24 m^2

¿Cómo es posible que teniendo la misma cantidad de cubitos cada uno, tengan áreas distintas? Esto te indica que si quisieras pintar cada uno de estos cuerpos, en el tercero gastarías menos pintura.

Lo que acabas de observar es cómo medir un cuerpo a partir de su superficie. Otra forma de medir cuerpos es medir la cantidad de espacio que ocupan y que llamamos volumen. En el caso de los tres cuerpos, cada cubito tiene un volumen de 1 m^3 (1 metro cúbico), por lo tanto, se tiene:

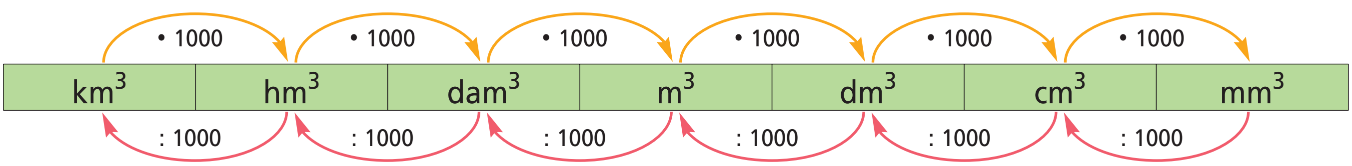
$$V_1 = 8\ m^3 \quad ▶ \quad V_2 = 8\ m^3 \quad ▶ \quad V_3 = 8\ m^3$$

Es decir, los tres ocupan la misma medida del espacio.

El volumen de un cuerpo es la medida del espacio que ocupa.

Cubo de arista igual a	Volumen	Equivalencia
1 centímetro	1 centímetro cúbico	0,000001 m^3
1 metro	1 metro cúbico	1.000 dm^3
1 decímetro	1 decímetro cubico	0,001 m^3

Para pasar de una unidad a otra, tenemos en cuenta que las unidades de volumen aumentan o disminuyen de 1.000 en 1.000.

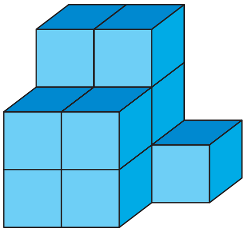


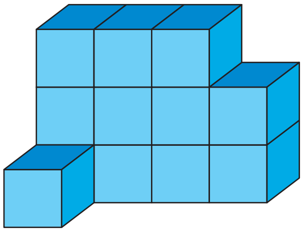
15 km^3 = (15 • 1.000 • 1.000 • 1.000) m^3 = 15.000.000.000 m^3
5000 mm^3 = (5.000 : 1.000 : 1.000) dm^3 = 0,005 dm^3
8,16 m^3 = (8,16 • 1.000 • 1.000) cm^3 = 8.160.000 cm^3

PRACTICA

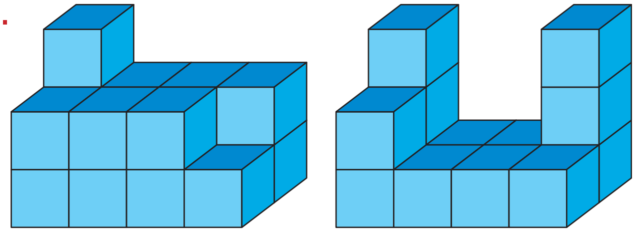
Indica el cuerpo que tiene mayor volumen en cada caso.

1.



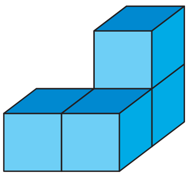


2.

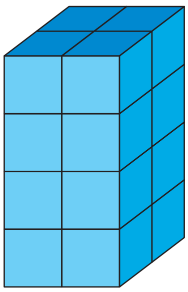


Calcula el volumen de cada cuerpo sabiendo que el volumen de cada cubito es 1 cm^3.

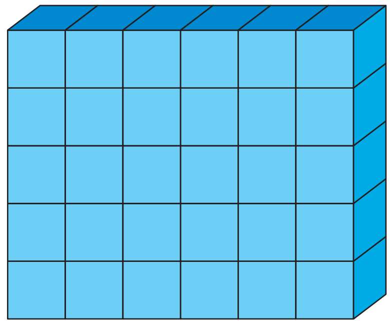
3.



4.

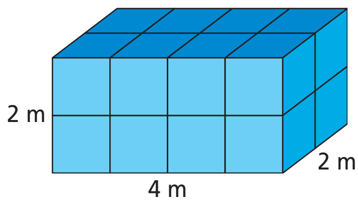


5.



Resuelve.

6. ¿Cuál es el volumen del siguiente cuerpo?



Completa.

7. Un milímetro cúbico es el volumen de un cubo de ______________ de arista.

8. Un decámetro cúbico es el volumen de un cubo de ______________ de arista.

9. Un cubo de 1 m^3 está formado por 1.000 cubos de 1 ___________^{3}.

10. Un ______________________ cúbico es el volumen de un cubo de 1 hm de arista.

11. Un decímetro cúbico es la milésima parte de un ______________________ cúbico.

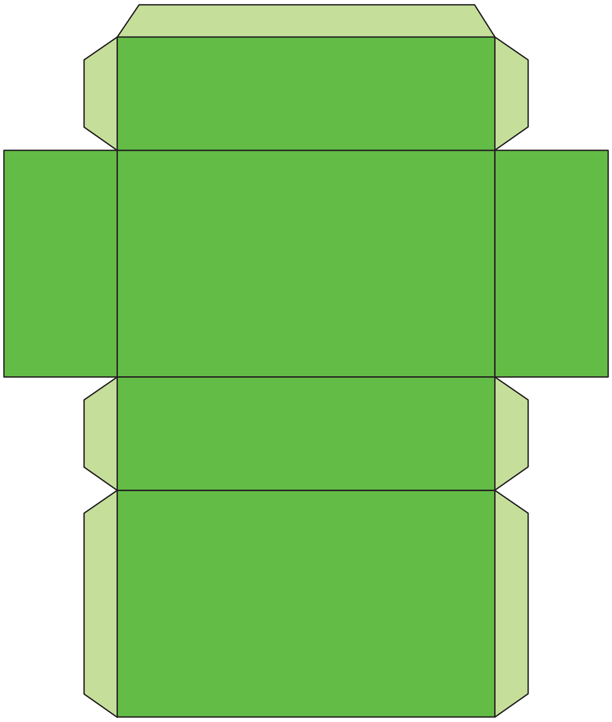
12. Un kilómetro cúbico es el volumen de un ________________ de ________________ de arista.

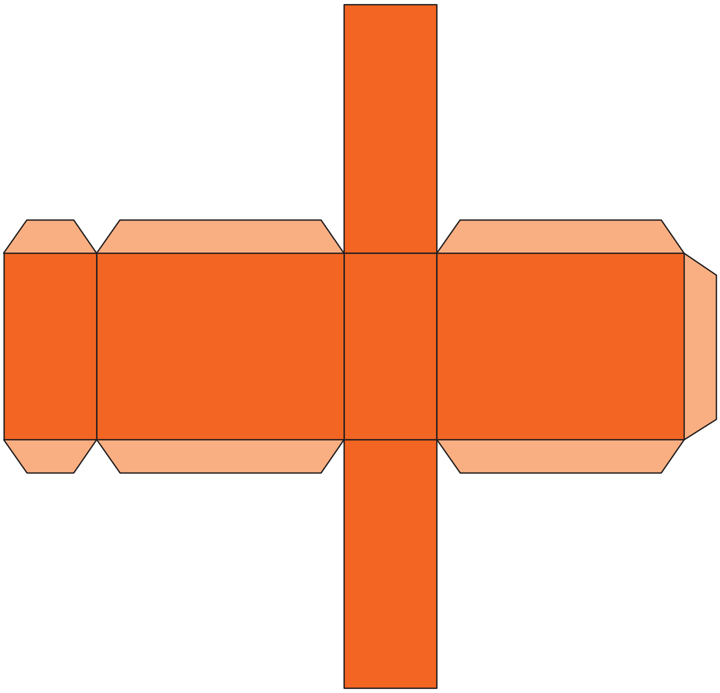
13. Un cubo de 1 m^3 está formado por ______________________ cubos de 1 cm^3.

Áreas y volúmenes de paralelepípedos rectos

EXPLORA

Dibuja en cartulina las siguientes redes a una escala mayor, recórtalas y arma los cuerpos correspondientes.





Los cuerpos obtenidos son paralelepípedos rectos ya que sus bases son paralelogramos.

El área de cada uno de estos cuerpos se obtiene al sumar las áreas de cada una de sus caras.

Por otra parte, para calcular el volumen de estos cuerpos debes calcular el área de su bases y multiplicarla por la altura.

Un paralelepípedo recto es aquel cuyas bases son paralelogramos.

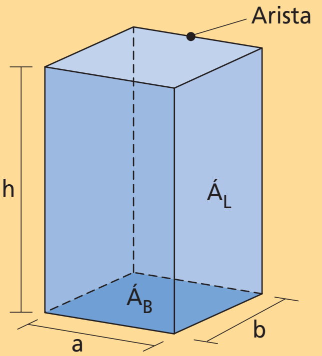
a = largo
b = ancho
h = altura = distancia entre las bases

$Á_L$ = área lateral = perímetro de la base • altura = $(2a + 2b) \cdot h$

$Á_B$ = área de la base = $a \cdot b$

Entonces, el área total de un paralelepípedo recto es igual a: $Á_T = Á_L + 2 \cdot Á_B$

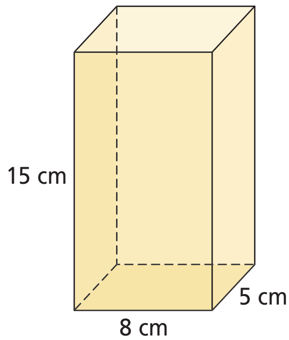
El volumen de un paralelepípedo recto es: $V = Á_B \cdot h$

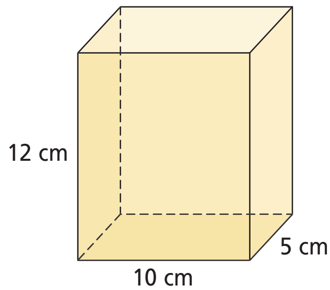


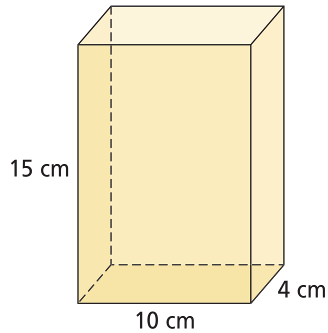
PRACTICA

Resuelve.

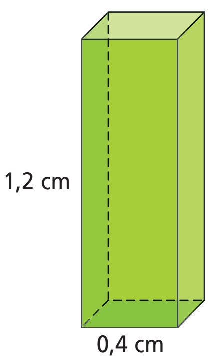
1. Mide y calcula el área y el volumen de los cuerpos que lograste construir en la página anterior.
2. Una empresa de lácteos eligió uno de estos tres envases, que tienen el mismo volumen, para comercializar su nuevo producto. ¿Qué envase eligió la empresa si optó por aquel que está hecho con menos material? Enciérralo.

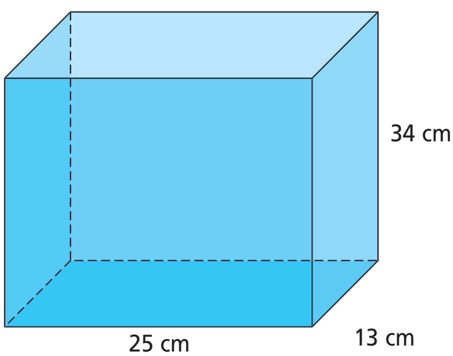






3. Matías construyó con cartulina un paralelepípedo recto de base cuadrada. El lado de la base mide 30 cm y la altura mide 50 cm. Calcula:
   a. El área lateral del cuerpo.
   b. El área total del cuerpo.
4. Agustín tiene cartulina y quiere hacer un cuerpo geométrico similar al de Matías pero cuya área total sea la mitad. ¿Logrará lo que quiere si divide por 2 tanto el lado de la base como la altura? Justifica tu respuesta.
   a. Calcula el área lateral del cuerpo de Agustín.
   b. Calcula el área total del cuerpo de Agustín.
   c. Calcula el volumen de este nuevo cuerpo.
5. Calcula el área total de cada uno de los paralelepípedos rectos dibujados.
   a. Prisma de base cuadrada.
   b. Prisma de base rectangular

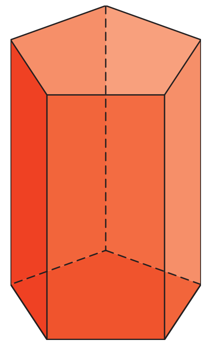




Área y volumen de un prisma recto

EXPLORA

Ahora que conoces los paralelepípedos rectos, observa la imagen de la derecha. ¿Qué diferencias puedes notar?



Fíjate que la base de este cuerpo no es un paralelogramo, sino un pentágono. Además, podrás observar que todas sus caras laterales son rectángulos.

Un prisma recto es aquel poliedro que tiene dos caras paralelas que son polígonos iguales llamados bases. El resto de las caras son rectángulos y se llaman caras laterales.

Si la base tiene n lados, entonces el número de caras del prisma es $n + 2$, el de aristas $3 \cdot n$ y el número de vértices $2 \cdot n$.

Si consideras:

P_b : perímetro de la base
h : altura
A_B : área de la base

Entonces, el área total del prisma recto está dado por:

$$Á = P_b \cdot h + 2 \cdot A_B$$

y el volumen es igual a:

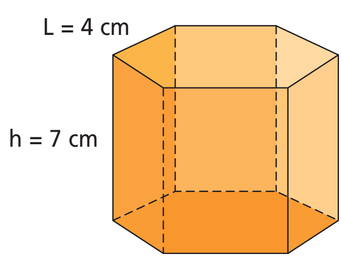
$$V = A_B \cdot h$$

PRACTICA

Resuelve.

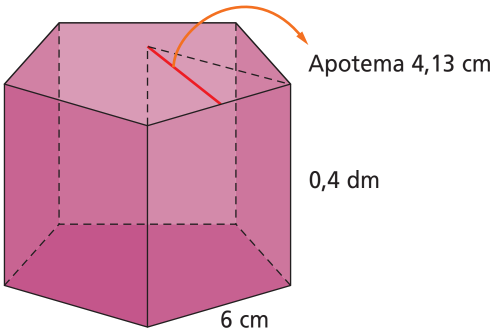
1. Si el número de vértices de un prisma es 18, entonces:
   a. ¿cuántos lados tienen las bases?
   b. ¿cuántas aristas laterales tiene el prisma?

2. Observa el prisma hexagonal regular y contesta.
   a. ¿Cuál es el área de cada cara lateral?
   b. ¿Cuántas aristas tiene en total?
   c. ¿Cómo podrías calcular el área de cada base?
   d. Si el área de la base es aproximadamente 56 cm^2, ¿cuál es el volumen del prisma?



3. Para el siguiente prisma calcula:

a. el área lateral
b. el área de la base
c. el volumen



4. Completa.

a. Un prisma de base pentagonal tiene ______ vértices, ______ caras y ______ aristas.

b. Un prisma de base hexagonal tiene ______ vértices, ______ caras y ______ aristas.

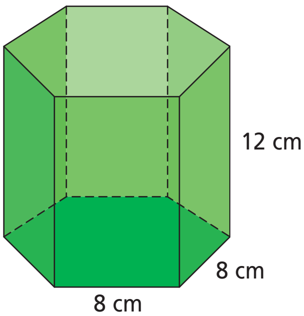
c. Un prisma de base octagonal tiene ______ vértices, ______ caras y ______ aristas.

d. Si la base de un prisma tiene n lados, el prisma tiene ______ vértices, ______ caras y ______ aristas.

5. Construye una red cuya base sea un heptágono y responde. Tú determinas las medidas de la altura y los lados del heptágono.

a. Calcula el número de vértices.
b. Calcula el número de aristas.
c. ¿Cuántas caras tiene tu prisma?
d. Calcula el área lateral y basal.
e. Calcula el volumen.

6. Calcula el volumen de un prisma hexagonal que tiene 8 cm de arista, 12 cm de altura y el apotema de su base mide aproximadamente 6,9 cm.

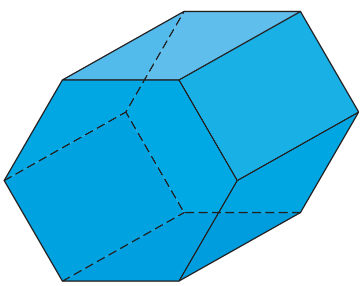


7. Calcula el área total del siguiente prisma.

Apotema de la base: 21,65 cm

Lado de la base: 25 cm

Altura: $\frac{6}{5}$ del lado de la base



Área y volumen de pirámides

EXPLORA

En el año 1989, se instaló en el museo del Louvre de París la escultura de vidrio que puedes ver en la foto.

Tiene una altura de 22 metros y su base es un cuadrado de 30 metros de lado. Todas sus caras laterales tienen forma de triángulos.

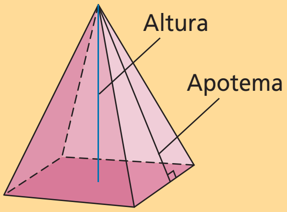
¿Conoces el nombre de este tipo de poliedro?

Las pirámides son poliedros cuya base es un polígono y sus caras laterales tienen forma de triángulos que concurren en un punto llamado cúspide.

Las pirámides rectas son aquellas cuyas caras laterales corresponden a triángulos isósceles. De lo contrario se denominan oblicuas.

Las pirámides regulares son aquellas cuya base es un polígono regular.

El apotema lateral de una pirámide regular es la altura de cualquiera de sus caras laterales. También se puede identificar el apotema de la base en cualquier pirámide.



El área de una pirámide se obtiene al sumar las áreas de todas sus caras y el área de la base.

El volumen de una pirámide recta está dado por:

$$V = \frac{\text{área de la base} \cdot \text{altura}}{3}$$

Si la base de una pirámide tiene n lados, entonces el número de caras es n + 1, el de aristas 2 • n y el número de vértices es n + 1.

PRACTICA

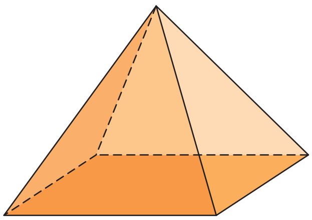
Completa con el nombre del polígono que forma la base de una pirámide si:

1. tiene 12 aristas. ▶ ______________________

2. tiene 9 vértices. ▶ ______________________

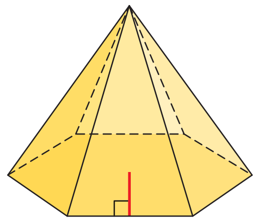
3. tiene 6 caras laterales. ▶ ______________________

Calcula el área total de estas pirámides rectas cuyas bases son polígonos regulares.

4. 

▶ ____________

Lado de la base: 24 cm
Apotema lateral: 20 cm

5. 

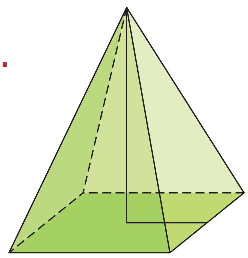
▶ ____________

Perímetro de la base: 42 cm
Apotema de la base: 6,06 cm
Apotema lateral: 11,69 cm

Resuelve los siguientes problemas.

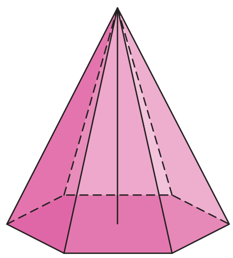
6. Calcula el volumen de una pirámide que tiene una base de área 100 cm^2 y una altura de 20 cm.

7. Calcula el volumen de las siguientes pirámides regulares.

a. 

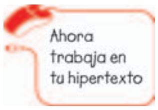
▶ ____________

Arista de la base = 8 cm
Altura = 12 cm

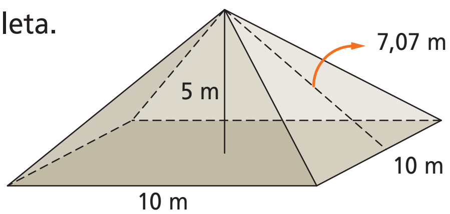
b. 

▶ ____________

Arista de la base = 6 cm
Apotema de la base = 5,2 cm
Altura = 12 cm



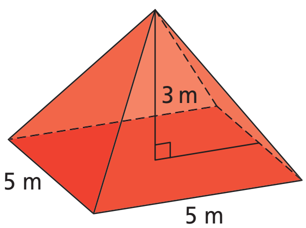
8. Completa.



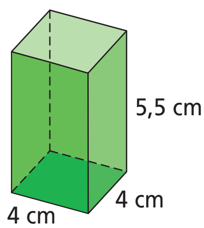
a. Área ▶ ____________

b. Volumen ▶ ____________

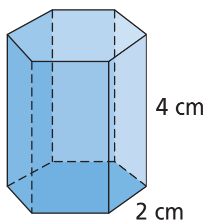
9. Indica qué cuerpo tiene menos volumen según sus medidas. Marca una ✗ en el casillero que corresponda.



☐



☐

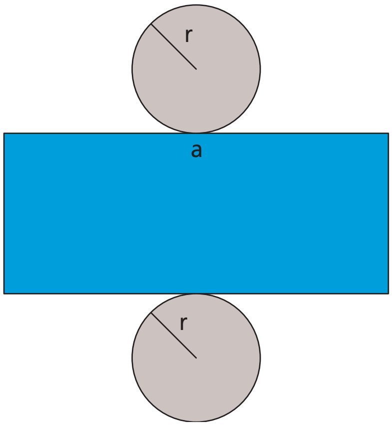


☐

El cilindro

EXPLORA

¿Qué sucedería si desarmas este cuerpo geométrico? Lo más probable es que al estirar las partes obtendrás dos círculos y un rectángulo como se muestra en la figura.

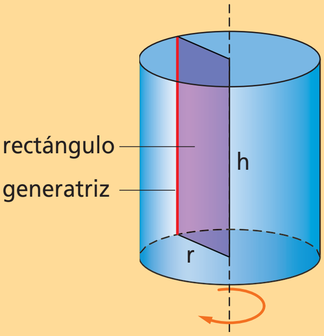


Observa que la longitud de las circunferencias, es decir el perímetro, coincide con el lado a del rectángulo. Luego, si quieres calcular el área del cilindro deberás sumar el área del rectángulo y las dos áreas de los círculos.

Un cilindro se obtiene al rotar un rectángulo de lados r y h sobre uno de sus lados.

El área está dada por:

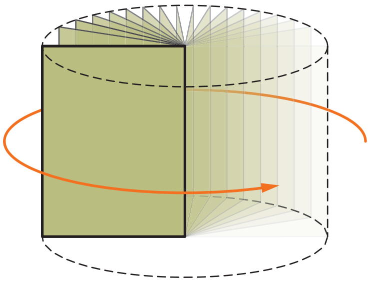
$$Á = 2\pi rh + 2\pi r^2$$



PRACTICA

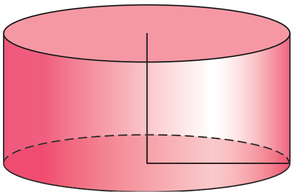
Resuelve.

1. La base del rectángulo que gira mide 30 cm. ¿Cuál es el área de la base del cilindro que se genera?

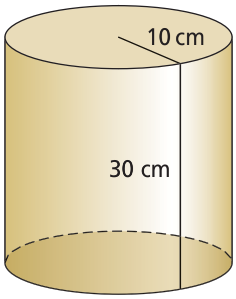


2. Calcula el área total del cilindro recto de base circular.

   Altura: 20 cm
   Radio de la base: 25 cm

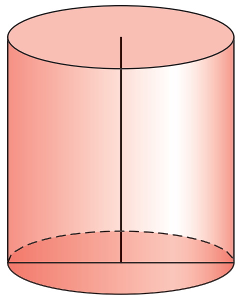


3. Calcula el área total del cilindro circular recto dibujado.



▶ ______________

4. Calcula el área lateral del cilindro recto cuya base es un círculo de 452,16 cm^2 de área y cuya altura es igual al diámetro de la base.



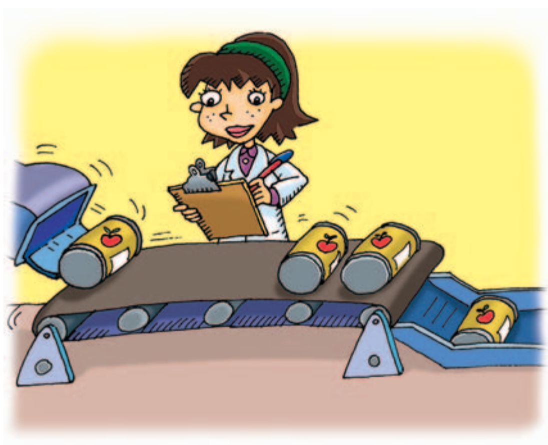
▶ ______________

5. Revisa los resultados para las áreas y corrige aquellos que estén incorrectos.

Radio	Altura	Área lateral	Área total
3 cm	5 cm	46,5 cm^2	75,36 cm^2
4 cm	7 cm	87,92 cm^2	276,32 cm^2
6 cm	9 cm	167,42 cm^2	281 cm^2

6. En una empresa de conservas están haciendo una revisión de sus envases. En este análisis desean determinar la cantidad de material que se utilizaría al modificar las dimensiones del tarro actual. ¿Qué sucederá en los siguientes casos?

a. Al modificar al doble el radio solamente.
b. Al modificar al doble la altura solamente.
c. Al modificar al doble la altura y a la mitad el radio.
d. Al modificar al doble el radio y a la mitad la altura.



7. Un recipiente tiene forma de cilindro circular recto. El área de cada base es de 1.256 cm^2 y la altura del cilindro mide 15 cm.

a. ¿Cuánto mide el diámetro de la base? ▶ ______________

b. ¿Cuál es el área lateral del cilindro? ▶ ______________

c. ¿Cuánto mide el área total? ▶ ______________

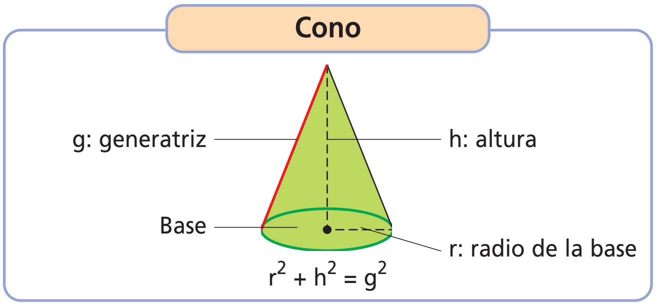
Ahora trabaja en tu hipertexto

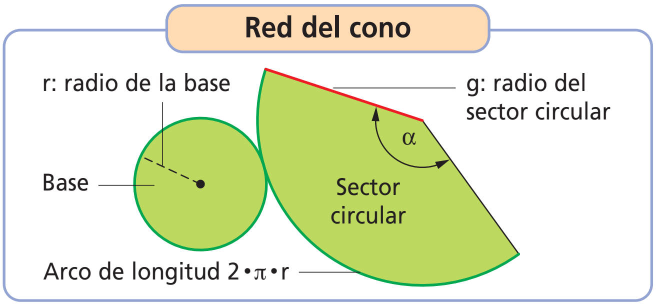
Red del cono recto

EXPLORA

En la figura se muestra cómo a partir de un triángulo rectángulo se puede generar un cono recto.

En los conos podemos observar algunos elementos que permiten describirlos. También es posible desarmarlos para observar sus redes.





¿Se puede afirmar que el perímetro de la base del cono mide lo mismo que el arco del sector circular?

¿Cuánto mide el ángulo α del sector circular?

Si quieres construir un cono debes conocer la longitud del radio de la base y la longitud de la generatriz. Con estos datos podrás dibujar la red correspondiente.

El ángulo del sector circular lo calculas utilizando la siguiente fórmula.

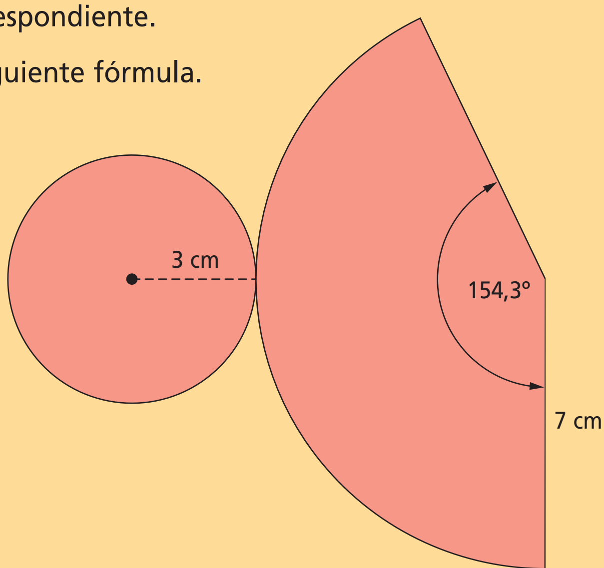
$$\alpha = \frac{r \cdot 360}{g}$$

Ejemplo: Se desea construir un cono cuya base circular tenga 3 cm de radio y con generatriz 7 cm.

$$\alpha = \frac{3 \cdot 360}{7}$$

$$= 154{,}285°$$

$$\approx 154{,}3°$$



Con este dato construyes una circunferencia de radio 7 cm y marcas un ángulo en el centro de 154,3°. ¡Constrúyelo!

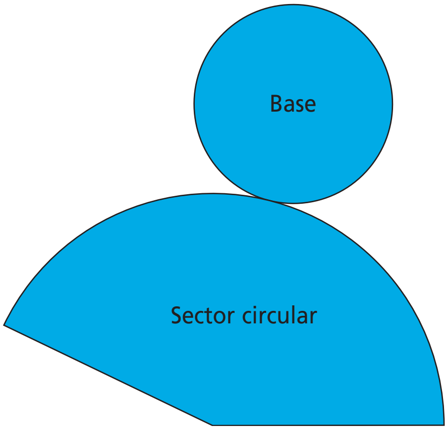
PRACTICA

Lee y resuelve.

1. ¿Cuánto debe medir el ángulo del sector circular de un cono con radio 4 cm y generatriz 6 cm?
2. ¿Cuánto debe medir la generatriz para construir un cono con r = 5 cm y α = 90°?
3. ¿Cuánto debe medir el radio de la base de un cono con α = 72° y g = 15 cm?
4. Construye un cono cuyo perímero basal sea 6 π cm y generatriz 9 cm.

Área del cono recto

EXPLORA



Calcular el área del cono es equivalente a determinar la superficie de su red, esto quiere decir, obtener el resultado de la suma entre las áreas de la base y el sector circular correspondiente.

Conocido el valor del radio (r) de la base, su área es:

$$Á_b = \pi \bullet r^2$$

Conocida la generatriz (radio del sector circular) y el ángulo del sector circular, el área de este sector está dado por :

$$Á_{sc} = \pi \bullet r \bullet g$$

Si g es la generatriz y r el radio de la base de un cono recto, entonces el área de este está dado por la fórmula:

$$Á = Á_b + Á_{sc} = \pi \bullet r^2 + \pi \bullet r \bullet g$$

Ejemplo:

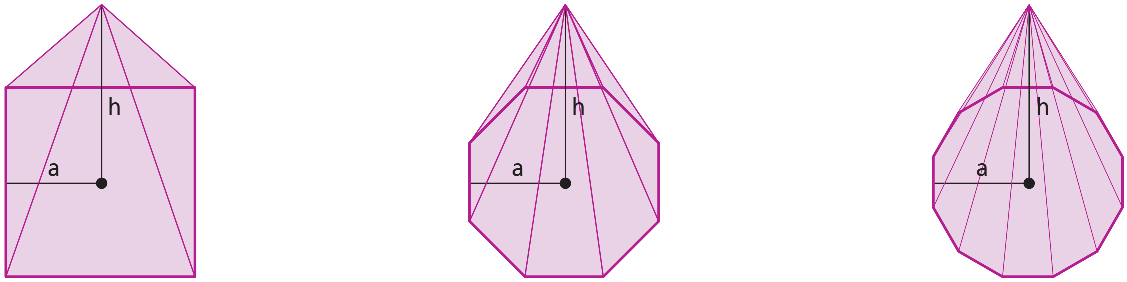
Si g = 5 cm y r = 2 cm, entonces el área del cono es: (π = 3,14)

$$Á = 3{,}14 \bullet 2^2 + 3{,}14 \bullet 2 \bullet 5 = 12{,}56 + 31{,}4 = 43{,}96 \text{ cm}^2$$

PRACTICA

Lee y resuelve.

1. Calcula el área del cono recto donde r = 3 y g = 5. Usa π = 3,14.
2. Si el radio de la base de un cono mide 4 cm y el ángulo del sector circular mide 60°, ¿cuál es el área del cono?
3. Observa las figuras y luego completa.

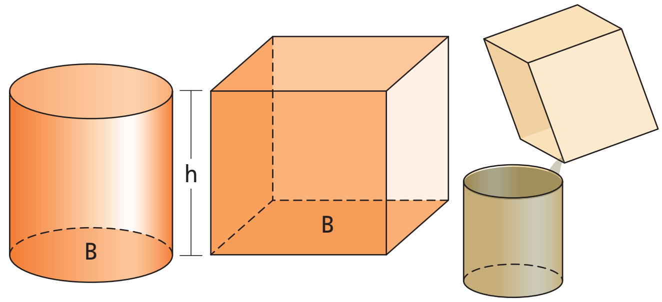


Los cuerpos tienen en común las magnitudes ________ y ________. Si el número de lados de los polígonos regulares que forman sus ________________ se duplica sucesivamente, el cuerpo que resulta se asemeja cada vez más a la forma de un ________________. De lo anterior, podemos afirmar que a mayor cantidad de lados que tenga el polígono de la base de una ________________, el área de esta se acerca a la del ________________.

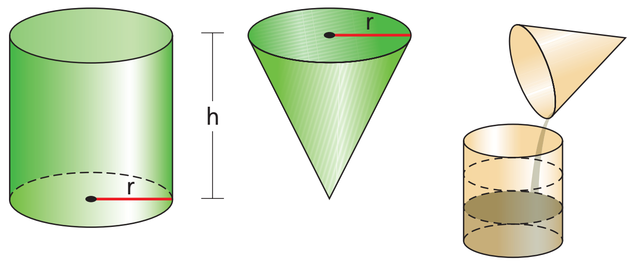
Volumen de cuerpos redondos

EXPLORA

Si construyes un prisma y un cilindro con igual altura y con bases que tengan igual área, podrás observar que la cantidad de arena que pueden contener cada uno es la misma. Con lo anterior se afirma que el volumen de estos cuerpos es el mismo.

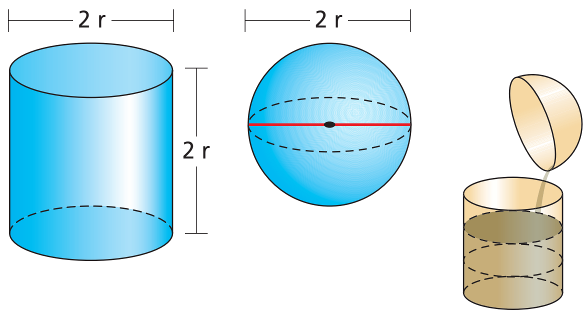


Si construyes con cartulina un cilindro y un cono de altura y bases iguales, podrás comprobar que la cantidad de arena que puede contener el cilindro es exactamente 3 veces lo que puede contener el cono.



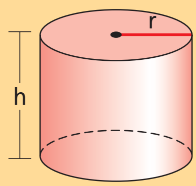
Si viertes la arena que puede contener una semiesfera de radio r en un cilindro cuya base tiene radio r igual que la esfera y altura 2r, comprobarás que el cilindro se llena hasta su tercera parte. Es decir,

$$V_{esfera} = \frac{2}{3} V_{cilindro}$$



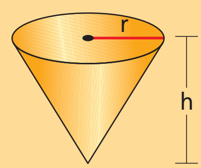
El volumen del cilindro es igual al producto del área de la base por la altura.

$$V_{cilindro} = \pi \bullet r^2 \bullet h$$

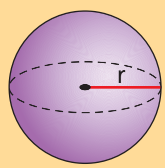


El volumen del cono es igual a un tercio del producto del área de la base por la altura.

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \bullet \pi \bullet r^2 \bullet h$$



El volumen de la esfera es igual a $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro.



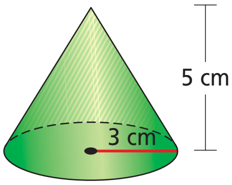
$$V_{esfera} = \frac{2}{3} \bullet \pi \bullet r^2 \bullet h \quad = \quad \frac{2}{3} \bullet \pi \bullet r^2 \bullet 2\,r \quad = \quad \frac{4}{3} \bullet \pi \bullet r^3$$

PRACTICA

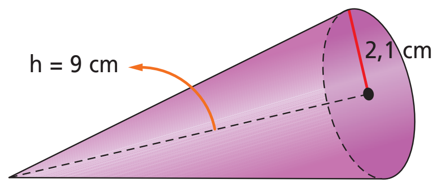
Calcula en cada caso. (Considera π = 3,14).

1. El volumen de un cilindro cuya base tiene un área de 40 cm^2 y cuya altura mide 6 cm.
2. El volumen de un cilindro cuya base es un círculo de 4 cm de radio y su altura mide 10 cm.
3. El volumen de cada cono.

a.



b.



4. El volumen de una esfera cuyo diámetro mide 12 cm.

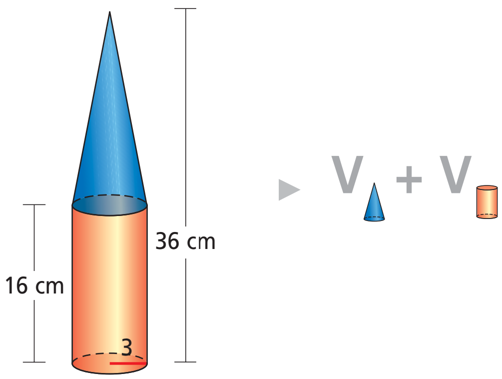
Lee y resuelve.

5. El volumen de un cono es 13,52 cc y el área de su base es 14,01 cm^2. ¿Cuánto mide su altura?
6. El volumen de un recipiente cilíndrico es 3.517 m^3. ¿Qué capacidad tiene un cono de igual altura e igual base?

Ahora trabaja en tu hipertexto

Observa los dibujos y contesta. (Considera π = 3,14).

7.



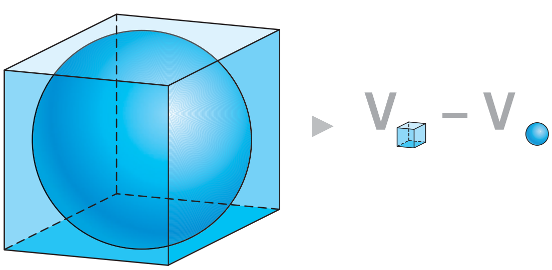
a. ¿Cuál es el volumen del cono?

b. ¿Cuál es el volumen del cilindro?

c. ¿Cuál es volumen total del cuerpo?

8.

Cubo de arista 10 cm



a. ¿Cuál es el volumen del cubo?

b. ¿Cuál es el volumen de la esfera?

c. ¿Cuál es el volumen del espacio limitado entre la esfera y el cubo?

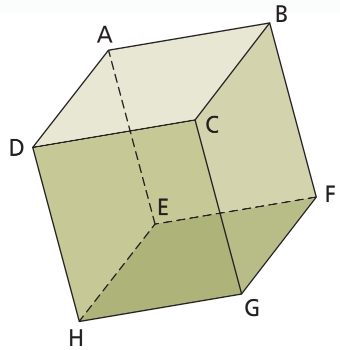
Más problemas

En algunos problemas, es muy conveniente hacer un esquema que te permita descubrir todas las soluciones. Una de las técnicas más usadas es construir un diagrama de árbol donde puedas ver las soluciones. Por ejemplo, ¿cuántos caminos distintos de aristas existen en el cubo de la figura para ir de A a G sin pasar dos veces por la misma arista y sin subir por ninguna arista?

Comprender

¿Qué sabes del problema?

La figura es un cubo y tiene indicado los vértices y las aristas.



¿Qué debes encontrar?

Todos los caminos para ir de A hasta G sin pasar dos veces por la misma arista y sin subir por ninguna arista.

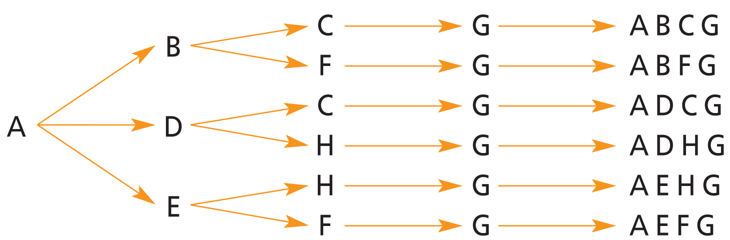
Planificar

¿Cómo resolver el problema?

Construir un diagrama de árbol e ir anotando los caminos partiendo del vértice A. Luego, contar todas las posibilidades.

Resolver

Caminos posibles:



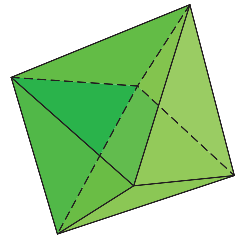
Estando en A se puede llegar a los vértices B, D o E. Para cada uno de estos caminos solo hay dos posibilidades y de estos, una sola posibilidad para llegar a G.
En total hay 6 caminos distintos.

Revisar

Comprueba tu respuesta con tus compañeros(as) y busquen otra manera de resolver este problema. Practiquen ahora tomando en cuenta que ahora sí pueden subir por las aristas.

PRACTICA

1. ¿Cuál es el número mínimo de aristas que puede tener un camino que lleve de A a B? ¿Y el número máximo?



Comprender

¿Qué sabes del problema?

¿Qué debes encontrar?

Planificar

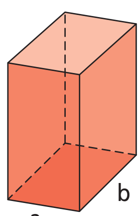
¿Cómo resolver el problema?

Resolver

Revisar

2. En relación a la figura anterior, halla todos los caminos distintos de solo 3 aristas y luego de 4 aristas que van desde el punto A al punto B.

3. ¿Cuántos paralelepípedos hay que cumplan las siguientes condiciones relativas a sus dimensiones?



– Su ancho, a, es un número primo divisor de 6.
– Su largo, b, es un número primo mayor que a y menor que 2 • a.
– Su altura, c, es un número primo mayor que b y menor que 2 • b.

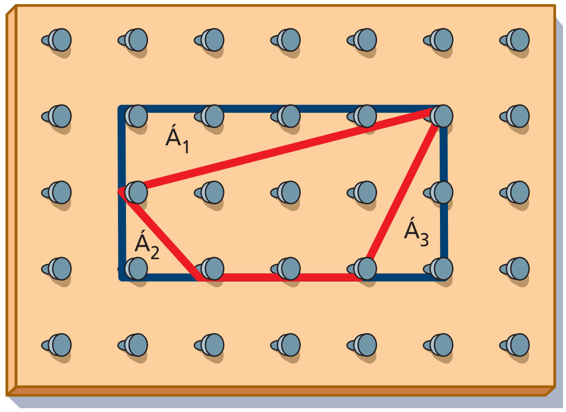
Uso del computador

Para calcular el área de un polígono formado en un geoplano, que puedes encontrar en www.educacionmedia/mat8 , Andrea completó un rectángulo que contenía al polígono y luego restó las áreas de los triángulos. Observa cómo lo hizo.

Área del polígono = Área del rectángulo – ($Á_1$ + $Á_2$ + $Á_3$)

$$= 8 - \left(2 + \frac{1}{2} + 1\right)$$

$$= 8 - 3\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$



Por otra parte, en algún libro había leído que había una relación matemática entre el área del polígono y los puntos que estaban en el interior y en el borde de la figura. En este caso, hay 5 clavos en el borde y 3 en el interior.

1. Construye el polígono que corresponda y luego completa.

Clavos borde	Clavos interiores	Área
3	0	$\frac{1}{2}$
3	1	
3	2	
3	3	
3	4	

Clavos borde	Clavos interiores	Área
4	0	1
4	1	
4	2	3
4	3	
4	4	

Clavos borde	Clavos interiores	Área
5	3	
5	4	
5	5	$6\frac{1}{2}$
6	2	
6	4	
6	6	

Clavos borde	Clavos interiores	Área
7	4	
7	6	
8	4	
8	6	
9	6	
9	9	$12\frac{1}{2}$

Síntesis

1. El **perímetro** de un polígono es la longitud de su frontera.
2. El **área** de un polígono es la medida de su superficie.
3. El número π corresponde a la razón entre el perímetro y el diámetro de la circunferencia.
4. Para calcular el perímetro de la circunferencia utilizamos las siguientes expresiones:

$$P = d \cdot \pi$$
$$P = 2\pi \cdot r$$

5. Para calcular el área de un círculo, podemos utilizar la siguiente expresión:

$$A = \pi \cdot r^2$$

6. El **volumen** de un cuerpo se define como la medida del espacio que ocupa, se expresa comúnmente en función de las aristas, el área de la base y la altura.
7. Para calcular el **área total** de un cuerpo geométrico, calculamos el área de cada cara y luego sumamos estas medidas.
8. El área de un cilindro la calculamos utilizando la siguiente expresión:

$$A = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

Ahora trabaja en tu hipertexto

9. El área de un cono la calculamos utilizando la siguiente expresión:

$$A = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g$$ (g: generatriz)

10. Volumen de algunos cuerpos geométricos:

Cuerpo	Volumen
Prisma	$V = A_B \cdot h$
Pirámide	$V = \frac{A_B \cdot h}{3}$
Cilindro	$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
Cono	$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$
Esfera	$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

En tu cuaderno realiza un mapa conceptual que relacione **al menos** los conceptos dados a continuación: área; perímetro; circunferencia; radio; círculo; volumen; prismas.; pirámides; cuerpos redondos.

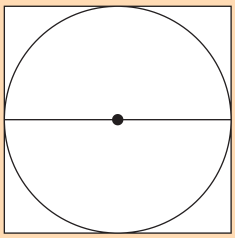
Evaluación

Marca la alternativa correcta en las preguntas 1 a la 8.

1. El perímetro de una circunferencia de radio 5 es:
(π = 3,14)

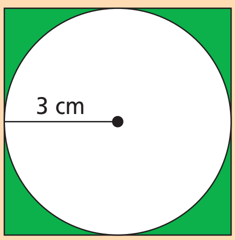
A. 78,5 cm
B. 78,5 cm^2
C. 31,4 cm
D. 31,4 cm^2

2. Si el área de un cuadrado es 4 cm^2, ¿cuál es el área de la circunferencia inscrita en este?
(π = 3)



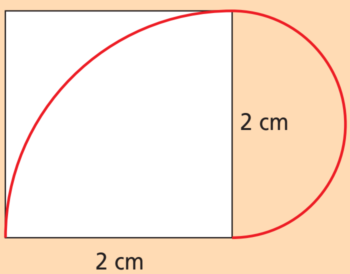
A. 3 cm^2
B. 4 cm^2
C. 6 cm^2
D. 16 cm^2

3. El área de la figura achurada es:
(π = 3)



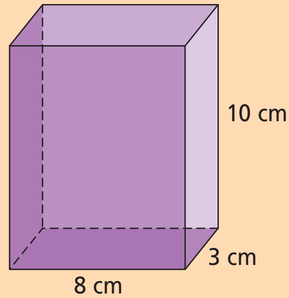
A. 9 cm^2
B. 27 cm^2
C. 54 cm^2
D. 81 cm^2

4. La longitud de la línea roja es:



A. π cm
B. 2π cm
C. 4π cm
D. 6π cm

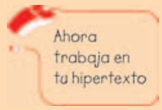
5. El área total del prisma es:



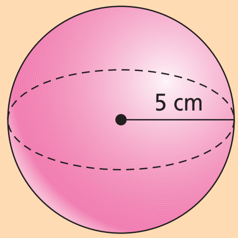
A. 21 cm^2
B. 38 cm^2
C. 240 cm^2
D. 268 cm^2

6. El volumen de un cono es 6 cm^3 y su área basal es 3 cm^2. ¿Cuánto mide su altura?

A. 2 cm
B. 3 cm
C. 6 cm
D. 12 cm



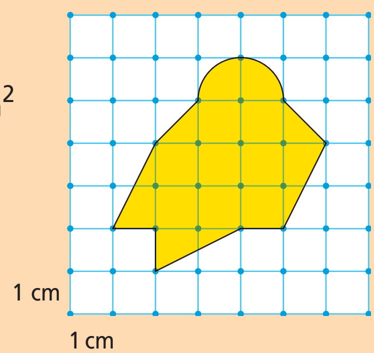
7. El volumen de una esfera de radio 5 cm es:
(π = 3)



A. 125 cm^3
B. 500 cm^3
C. 750 cm^3
D. 825 cm^3

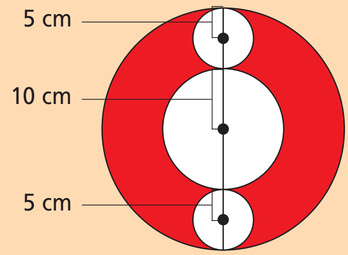
8. El área de la figura es:

A. $(10 + \frac{\pi}{2})$ cm^2
B. $(10 + \pi)$ cm^2
C. $(12 + \frac{\pi}{2})$ cm^2
D. $(11 + \pi)$ cm^2



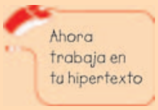
Lee atentamente y resuelve.

1. Calcula el área de la parte sombreada.

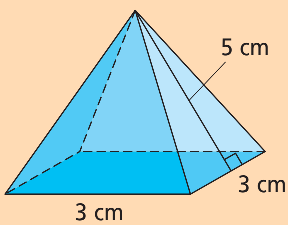


2. ¿Cuál es el área de un cono con altura 10 cm y radio basal 3 cm?

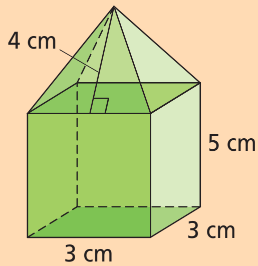
3. Calcula el área de cada uno de los siguientes cuerpos.



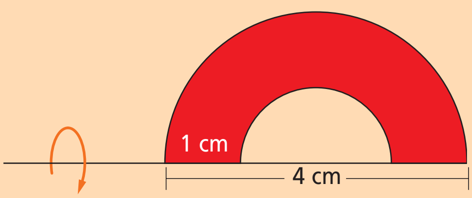
a.



b.



4. ¿Cuál es el volumen del cuerpo que se genera al girar por el eje la figura achurada?



¿Cómo trabajé?

Marca según tu apreciación	No lo entendí	Lo entendí	Puedo explicarlo
Cálculo del área y perímetro de polígonos compuestos			
Cálculo del área de un círculo y perímetro de una circunferencia			
Cálculo del área y perímetro de figuras compuestas			
Cálculo del área y volumen de cuerpos geométricos			

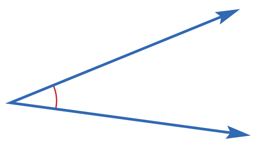
UNIDAD 7

Movimientos en el plano

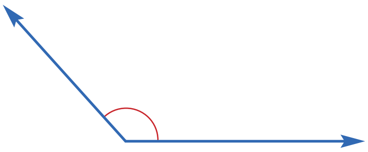
Necesitas recordar

Mide los siguientes ángulos utilizando tu transportador.

1.



2.



3.

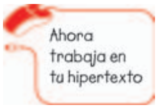
Dados los siguientes polígonos escribe el número de lados de cada uno y la suma de las medidas de sus ángulos interiores.

4. Cuadrado

5. Pentágono

6. Hexágono

7. Heptágono



¿Qué aprenderás?

- A efectuar transformaciones de figuras geométricas planas (reflexiones, traslaciones y rotaciones).
- A caracterizar transformaciones de figuras geométricas planas y reconocer algunas de sus propiedades.
- A determinar las invariantes que se generan al realizar una transformación isométrica.
- Reconocer la aplicación de transformaciones isométricas en objetos del mundo real.

Resuelve

M. C Escher (1898-1972) es un famoso artista gráfico. En sus obras se destaca la utilización de movimientos geométricos.

Su trabajo consiste básicamente en la utilización de diferentes figuras para rellenar el plano. De este modo crea un patrón que al repetirse una cierta cantidad de veces genera hermosos diseños.

a. ¿Qué figuras puedes ver en la imagen?

____

b. Se repite alguna figura en la imagen? ¿Cuál?

____

c. ¿Qué movimientos se le realizaron a las figuras para formar el diseño?

____

Ahora trabaja en tu hipertexto

Geometría y arte

Muchos artistas utilizan algunas propiedades geométricas en sus obras. Esto lo evidencian grandes construcciones que han sido levantadas desde la antigüedad. Por ejemplo, el Partenon y el Coliseo.

- Crea un diseño artístico, en el cual apliques algunas propiedades geométricas que hayas estudiado en años anteriores.
- Busca otras obras de M. C. Escher, e identifica en ellas cuál es la figura que corresponde al patrón.
- Averigua qué otros artistas, además de Escher, utilizan la geometría en sus diseños.

Transformaciones geométricas

EXPLORA

Observa las transformaciones que se realizaron a la fotografía 1.

Fotografía 1

¿Qué cambio se realizó en la fotografía 1 para obtener cada una de las fotografías ubicadas a su alrededor?

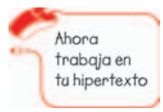
A la fotografía 1 se le aplicaron 4 transformaciones diferentes. En algunas de ellas se modificó el tamaño, mientras que en otras se modificó solo la posición, sin cambiar tamaño ni forma.

Se denomina transformación geométrica a la aplicación que hace corresponder a cada punto del plano otro punto del plano, generándose así un cambio ya sea de tamaño, en la forma o en la posición de un objeto o un cuerpo.
En el caso de que estas transformaciones solo modifiquen la posición de la figura, sin alterar su tamaño ni forma, éstas se denominan transformaciones isométricas.

PRACTICA

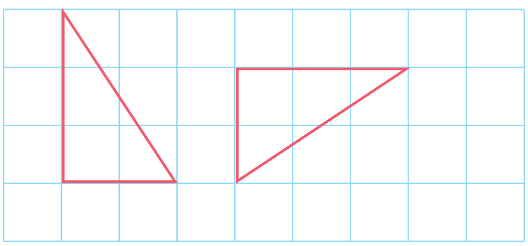
Observa las siguientes imágenes y luego responde.

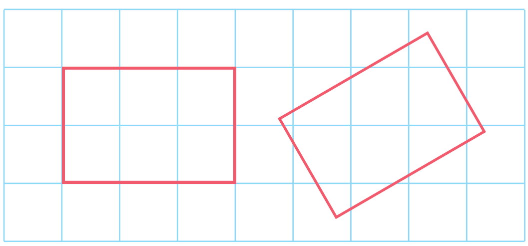


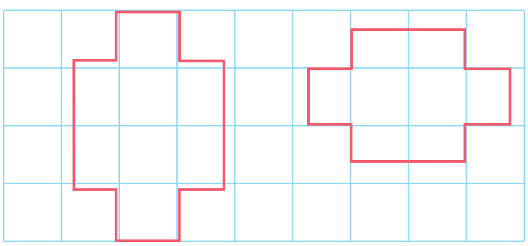



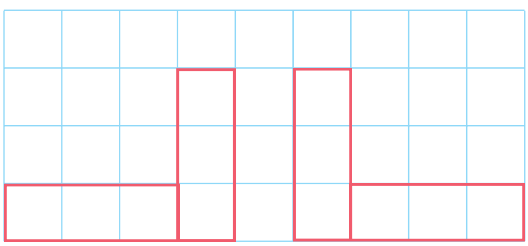
1. ¿Qué cambia y que se mantiene en cada imagen?
2. ¿En qué se diferencian de las imágenes de la página anterior?
3. Indica si estas imágenes anteriores corresponden a transformaciones isométricas y por qué.

Identifica cuál de las siguientes figuras pueden obtenerse a partir de la aplicación de una transformación isométrica. Explica y comenta con tus compañeros.

4.


6.


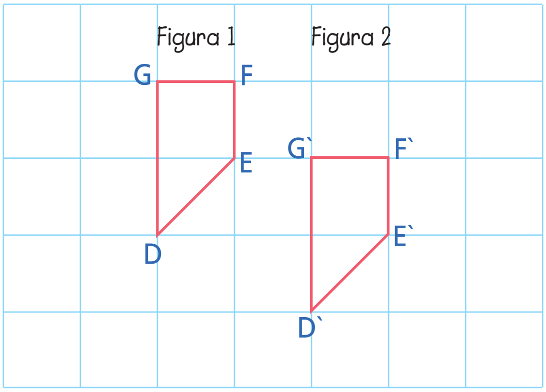
5.


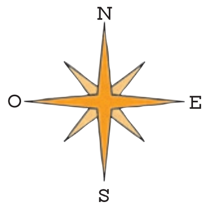
7.


Traslación

EXPLORA

Observa las siguientes figuras.



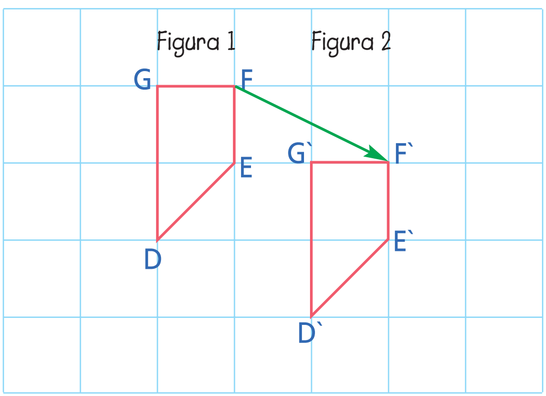


¿Qué transformación isométrica se realizó a la figura 1 para obtener la figura 2? ¿Qué cambió? ¿Qué se mantuvo?

A la figura anterior se le aplicó una **traslación**, cambiando solo la posición pero no la forma ni las medidas de la figura original (figura 1). Además, como puedes comprobar, cada punto de la figura 1 se trasladó **2** cuadraditos hacia el este y un cuadradito hacia el sur.

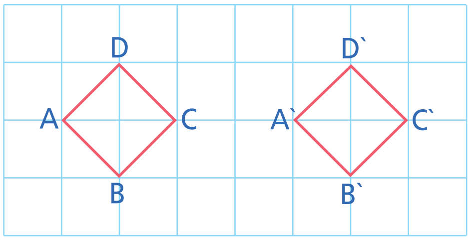
Una traslación es una transformación isométrica que "mueve" todos los puntos de una figura, en una misma distancia y dirección.
Para señalar los puntos resultantes de la traslación de una figura, en general, utilizaremos las mismas letras pero con un apóstrofo.
Para representar gráficamente el movimiento realizado en una traslación, se puede utilizar una flecha (como se muestra en el ejemplo siguiente), a esta flecha se le conoce como vector de traslación.

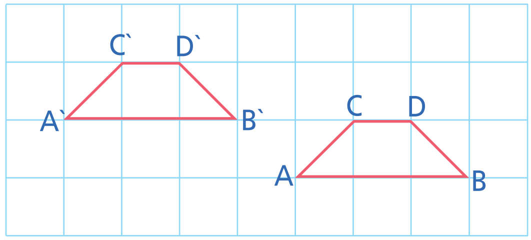
Ejemplo



PRACTICA

Determina la traslación que se realizó a las siguientes figuras.

1. 

2. 

EN EQUIPO

Reunidos en parejas realicen la siguiente actividad.

3. Calquen en una hoja las siguientes figuras, manteniendo la misma distancia que hay entre ellas.

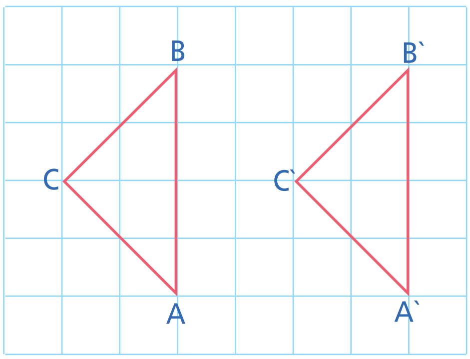
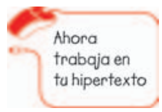
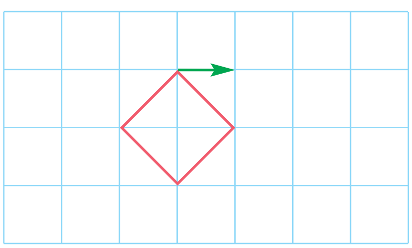


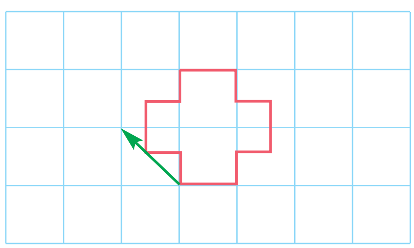
Figura 1 Figura 2



4. Dibujen una flecha que vaya de A hasta A′, de B hasta B′, de C hasta C′, respectivamente.
5. Midan con una regla las flechas que dibujaron. ¿Cómo son entre sí?
6. Si solo conocieran la figura 1, y la flecha que representa el movimiento realizado, ¿cómo podrían obtener la figura 2?
7. ¿Qué conclusiones pueden obtener?

Dibuja en tu cuaderno la figura resultante de trasladar según el vector dado.

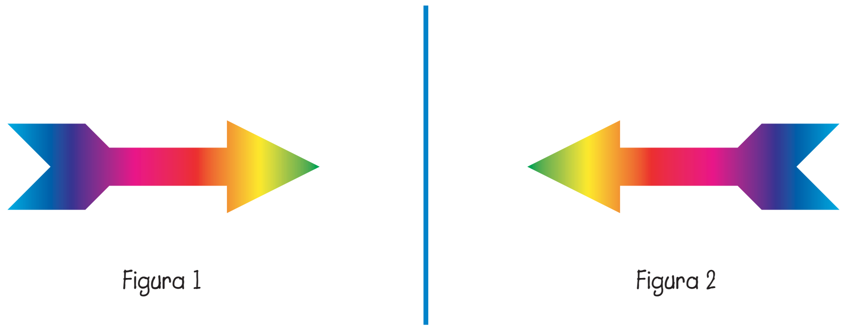
8. 

9. 

Reflexión

EXPLORA

¿Qué transformación se realizó a la figura 1 para obtener la figura 2?

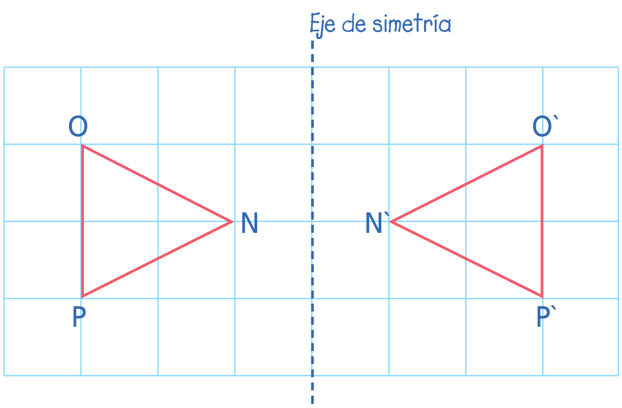


A la figura anterior se le aplicó una **reflexión**, observa que este movimiento también corresponde a una transformación isométrica, ya que no se modifican ni el tamaño ni la forma de la figura original, solo cambia su posición.

Los puntos correspondientes son aquellos que coinciden al superponer la figura original y la figura resultante al aplicarle una reflexión.

Una reflexión es una transformación isométrica en la que a cada punto de la figura original se le asocia otro punto (llamado imagen), de modo que el punto y su imagen están a igual distancia de una recta llamada eje de simetría.

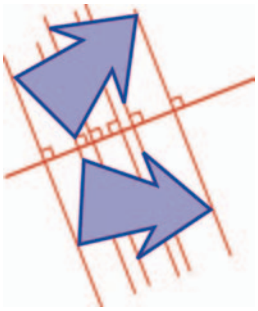
Ejemplo



Puedes utilizar tu regla para verificar que la distancia de un punto al eje de simetría es equivalente a la distancia del eje a su imagen. Es decir, la distancia desde los puntos O, P y N al eje de simetría es equivalente a la distancia del eje de simetría a los puntos O’, P’ y N’, respectivamente. **¡Compruébalo!**

PRACTICA

Observa el siguiente procedimiento utilizado por Marcia para realizar una reflexión de la figura que se muestra a continuación, conociendo el eje de simetría.

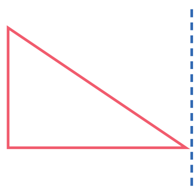


1º Utilizando la escuadra traza una recta perpendicular al eje de simetría, de manera que pase por el vértice que se está reflejando.
2º Con el compás, copia la distancia del vértice al eje en la recta trazada, pero al otro lado del eje, de este modo obtiene la imagen del vértice.
3º Repite este procedimiento para cada uno de los vértices.
4º Por último, Marcia une los puntos obtenidos que corresponden a los vértices de la imagen.

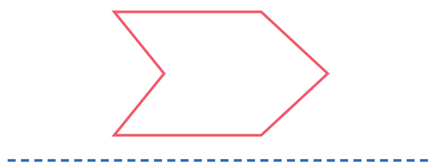
1. ¿Qué opinas del procedimiento utilizado por Marcia?
2. Si Marcia no tuviera compás, ¿Cómo podría realizar la traslación de la figura? Explica.

Copia cada una de las siguientes figuras en tu cuaderno y a continuación, refléjala respecto al eje correspondiente. Utiliza el procedimiento de Marcia.

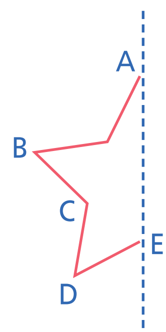
3.



4.



EN EQUIPO



1º Dibujen en una hoja un figura similar a la siguiente.
2º Doblen la hoja por el eje de simetría y marquen utilizando alfileres cada vértice de la figura.
3º Desdoblen la hoja, ubiquen las marcas de los vértices (marcas de los alfileres) y asígnenles las letras A’, B’, C’, etc. , considerando el vértice del cual son imagen.
4º Unan los vértices de la imagen siguiendo el mismo orden de la figura original.

5. Comparen la figura obtenida con la figura original, ¿en qué se parecen?, ¿en qué se diferencian?

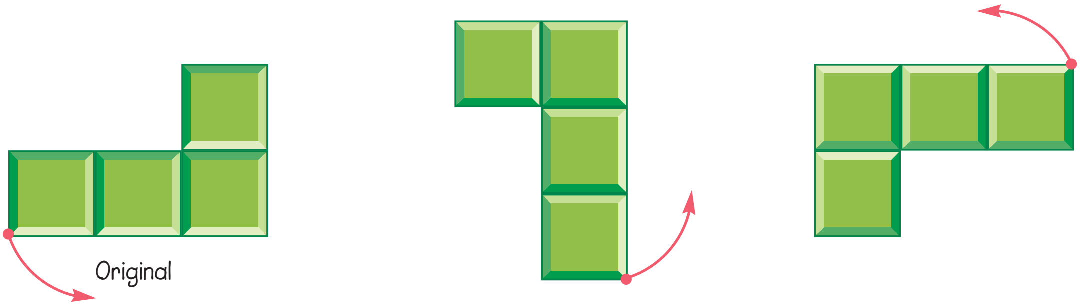
Rotación

EXPLORA

La **rotación** es una transformación, en la cual todos los puntos de una figura se mueven en torno a un punto fijo.

Ejemplo

Observa como se rotó la siguiente pieza de un juego.



¿En cuántos grados se rotó cada pieza respecto de la original?

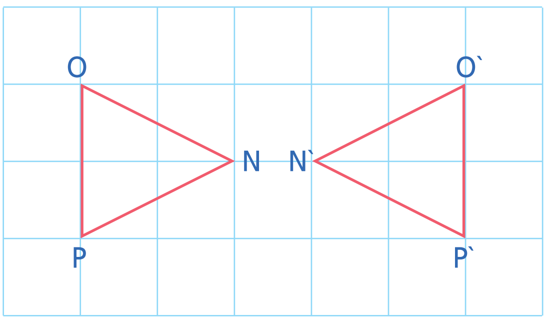
Puedes ver que el primer movimiento corresponde a una rotación en 90º, mientras que el segundo, corresponde a una rotación de 180º respecto de la original.

Una rotación es una transformación isométrica, en la cuál todos los puntos se mueven respecto a un punto fijo llamado centro de rotación (O), en un determinado ángulo, llamado ángulo de rotación. El sentido positivo del giro es el sentido antihorario, es decir, en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj.

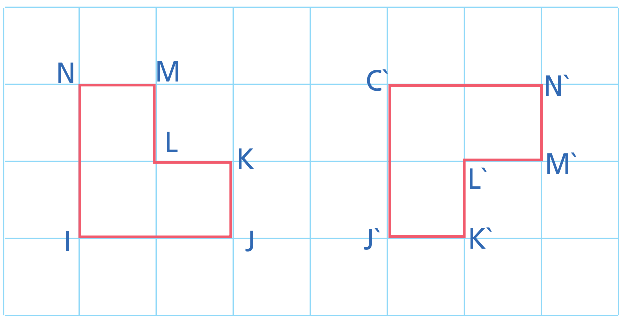
PRACTICA

Identifica cuál de las siguientes transformaciones corresponden a rotaciones. Justifica.

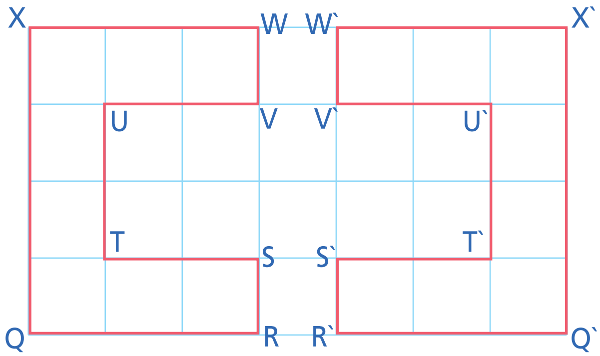
1.



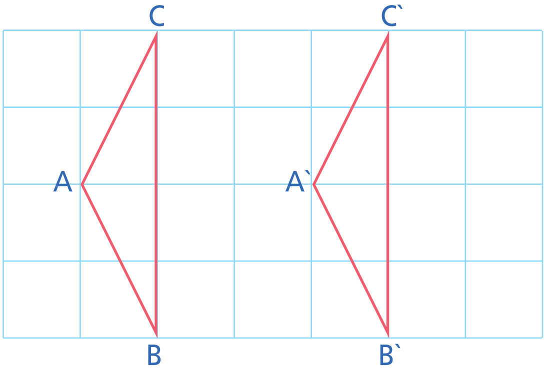
2.



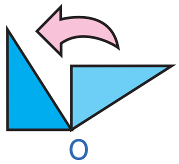
3.



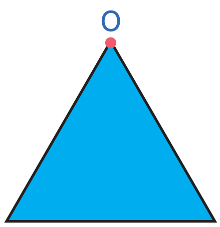
4.



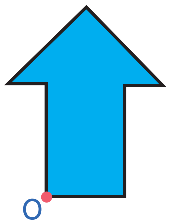
Dibuja en tu cuaderno la figura resultante al rotar las siguientes figuras en 90º respecto del punto indicado. Observa el ejemplo.



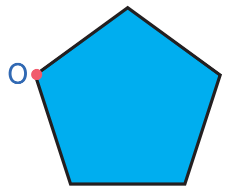
5.



6.



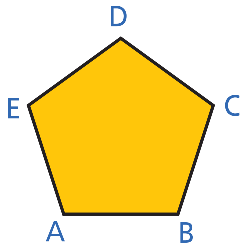
7.



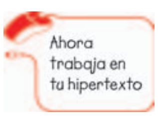
EN EQUIPO

En parejas realicen lo siguiente.

1º Copien en una hoja la figura. Marquen un punto O.
2º Tracen el segmento OA, utilizando regla.
3º Apoyen la punta del compás en el punto O y tracen una circunferencia de radio igual a la medida del segmento OA.
4º Usando el transportador, midan 60º con respecto al segmento OA. Marquen un punto y tracen una recta por O y este punto.
5º Marquen el punto de intersección de la circunferencia y la recta dibujada. A este punto llámenlo A'.
6º Repitan todos los pasos anteriores para el resto de los vértices.
7º Unan los puntos A´, B´, C´, D', E', siguiendo el mismo orden.



8. Han realizado una rotación de la figura en 60º. ¿En qué se parecen ambas figuras?, ¿en qué se diferencian?

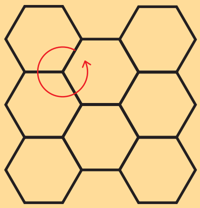


Teselaciones

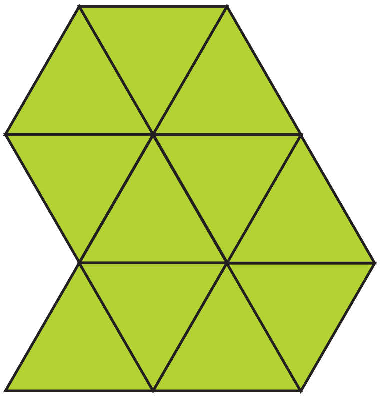
EXPLORA

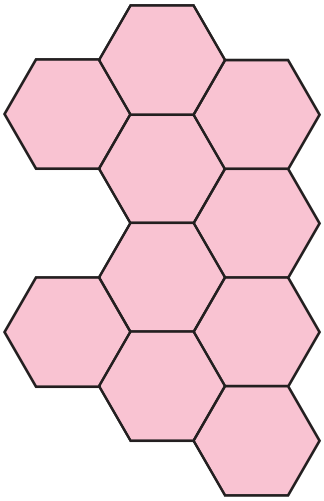
Para construir una teselación utilizando solo polígonos regulares, la suma de los ángulos interiores de cada polígono, ubicados en un mismo vértice debe ser igual a 360°.

Ejemplo



Observa los siguientes diseños:



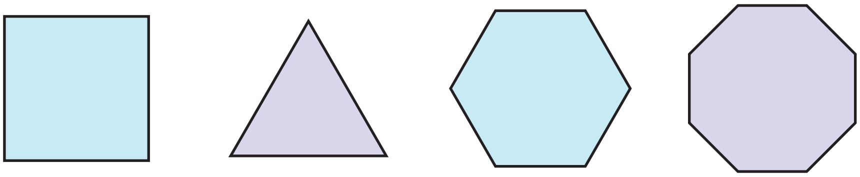


¿Qué figura se repite en cada uno de los diseños anteriores?
¿Qué tipo de polígonos son los anteriores?
Los diseños anteriores se conocen como **teselaciones**, en las cuales se observa un patrón o figura que cubre completamente la superficie plana, de modo que no queden espacios entre ellas, ni se sobrepongan.

Una teselación es:
Regular: si está formada solo por polígonos regulares.
Semirregular: si está formada por dos o más polígonos regulares.
No regular: si está formada por polígonos no regulares.

PRACTICA

Copia y recorta los siguientes polígonos regulares e intenta formar una teselación regular con cada uno de ellos. Luego responde.

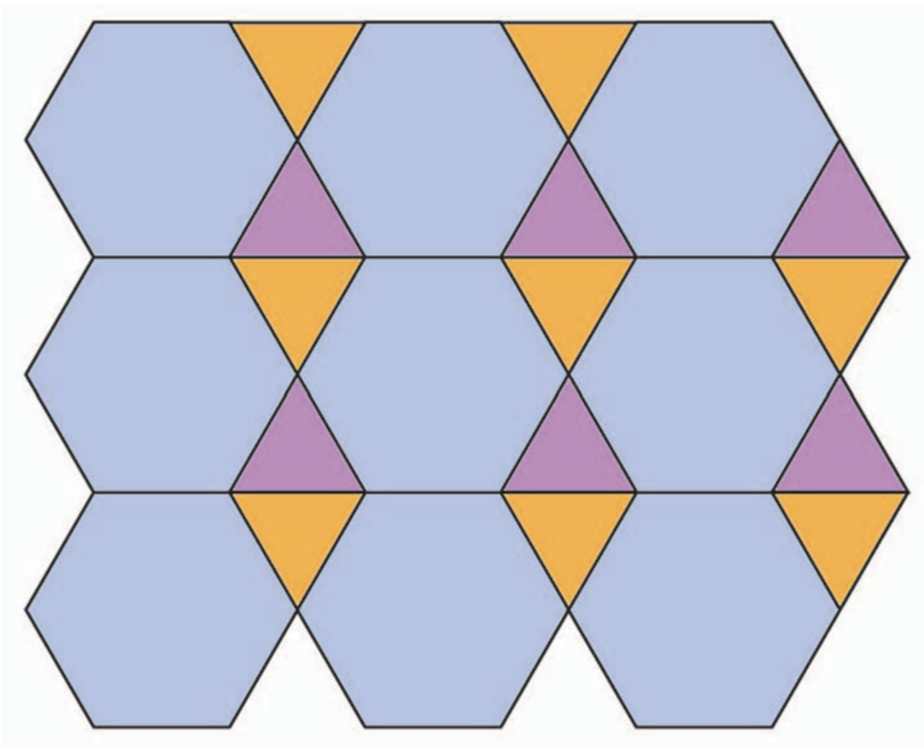


1. ¿Con cuál de los polígonos anteriores fue posible construir una teselación regular?
2. En los casos en que pudiste construirla, ¿cuántos polígonos concurren a un vértice?
3. ¿Cuánto suman los ángulos interiores de los polígonos que concurren a cada vértice?
4. ¿Es posible realizar una teselación a partir de cualquier polígono regular?

Construye una teselación semirregular a partir de dos de los polígonos anteriores, luego responde.

5. ¿Es posible construir una teselación semirregular con dos polígonos regulares cualesquiera?

Observa la siguiente teselación. Luego responde.



6. ¿Qué tipo de teselación es la figura?
7. ¿Cuál es el patrón de la figura anterior?
8. ¿Qué polígonos se utilizaron para construir esta teselación?
9. ¿Es posible construir una teselación semirregular utilizando solo un cuadrado y dos hexágonos regulares? Justifica.
10. ¿Es posible construir una teselación semirregular utilizando solo un cuadrado y dos octágonos regulares? Justifica.

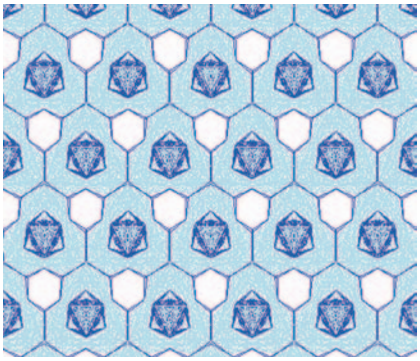
Ahora trabaja en tu hipertexto

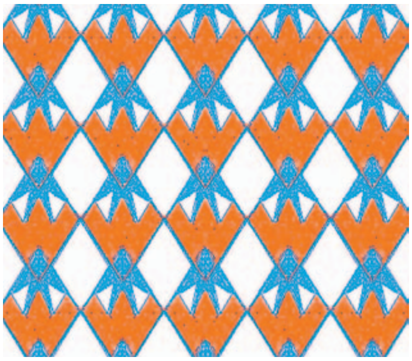
Usando un software geométrico

EXPLORA

La utilización de un *software* geométrico puede ser muy útil para construir transformaciones isométricas, y también para verificar sus propiedades.

Por ejemplo, observa las siguientes figuras que se construyeron utilizando un software geométrico.

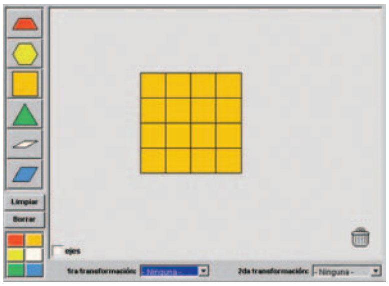




PRACTICA

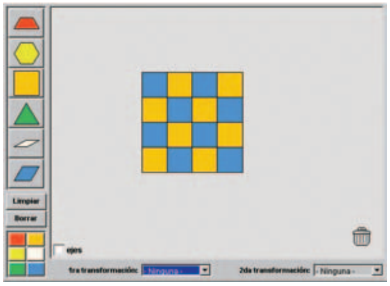
Ingresa al sitio
http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_294_g_3_t_3.html?open=activities
y realiza lo siguiente. Luego responde.

1º Haz *clic* en el botón **Limpiar** para poder cambiar la figura inicial.



2º Diseña una figura similar a la que se muestra. Para esto selecciona con el mouse el cuadrado de la columna izquierda, puedes mover el cuadrado (u otro de los polígonos) arrastrando con el *mouse*.

3º A partir de la figura anterior crea un diseño, usando dos colores diferentes de cuadrados (para cambiar los colores de los cuadrados, selecciónalos con el *mouse*, y luego haz *clic* en el color escogido). Observa el siguiente ejemplo.



1. ¿Qué transformaciones isométricas se utilizaron para formar el diseño anterior?
2. Respecto al diseño anterior, ¿es correcto decir que se trata de una teselación? Justifica.

Limpia nuevamente y a continuación elige cualquiera de los polígonos que aparecen en la columna derecha de la pantalla. Luego realiza lo siguiente.

3. En **"1ra transformación"** selecciona con el *mouse* **Reflexión**, observa que aparecerá el eje de simetría y el polígono reflejado. Con el Mouse, puedes mover el eje de simetría moviendo el punto negro que aparece.
4. Repite el paso anterior, pero ahora selecciona **Traslación**. Aparecerá el vector de traslación y la figura trasladada. Con el *mouse* puedes mover la punta de la flecha, de este modo cambiará la dirección de la traslación realizada.
5. Vuelve a **Limpiar**, y a dibujar un polígono. Selecciona **Rotación**. Observa que en este caso aparece el ángulo de rotación y la figura rotada. El centro de rotación está en el vértice del ángulo de rotación. Con el mouse, puedes cambiar el ángulo de rotación, moviendo el punto negro del ángulo. También puedes cambiar el centro de rotación, para esto tienes que mover el vértice del ángulo. **¡Compruébalo!**

También es posible aplicar dos transformaciones sucesivas, iguales o distintas a una figura, para lo cual debes seleccionar la primera transformación en "1ra transformación" y luego la segunda en "2da transformación". Realiza los siguientes pasos, luego responde.

1º Dibuja un polígono.
2º Realiza dos traslaciones sucesivas a la misma figura.
3º Realiza dos reflexiones sucesivas a la misma figura.
4º Realiza dos rotaciones sucesivas a la misma figura.

6. ¿Cuál fue el resultado de aplicar dos traslaciones sucesivas a la misma figura?
7. ¿Cuál fue el resultado de aplicar dos reflexiones sucesivas a la misma figura?
8. ¿Cuál fue el resultado de aplicar dos rotaciones sucesivas a la misma figura?
9. Comenta tus respuestas con tu compañero(a). ¿Obtuvieron los mismos resultados?

En parejas experimenten con el *software* y luego respondan.

10. ¿Cuál es el resultado de aplicar dos reflexiones sucesivas a una misma figura, si sus ejes de simetría son paralelos?
11. ¿A qué transformación isométrica corresponde el resultado de aplicar dos reflexiones sucesivas a una figura, si sus ejes de simetría no son paralelos?

Ahora trabaja en tu hipertexto

Más problemas

Una forma de construir una teselación es dibujar una figura inicial y aplicarle a ella traslaciones, reflexiones y/o rotaciones, de modo de ir copiándola y de ese modo cubrir todo el plano. ¿Con cuál o cuales de las transformaciones isométricas estudiadas se construyó la teselación?

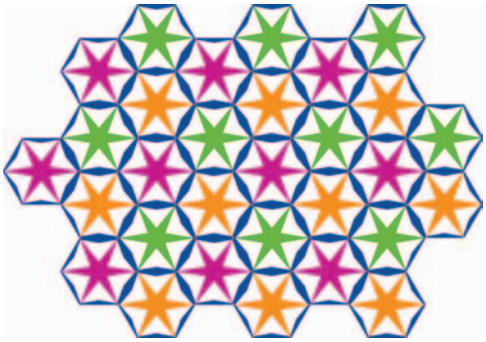
Comprender

¿Qué sabes del problema?

Qué es una teselación y las principales transformaciones isométricas.

¿Qué debes encontrar?

Las transformaciones que permiten completar la teselación a partir de la figura inicial.



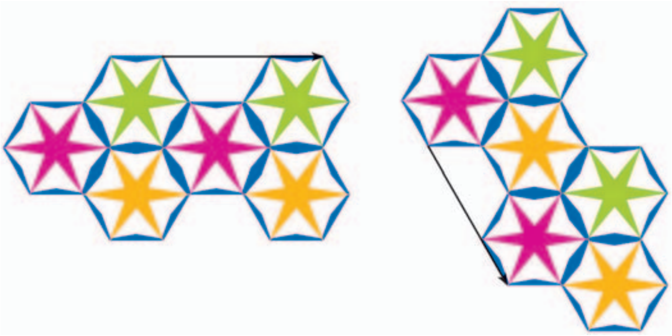
Planificar

¿Cómo resolver el problema?

Identifica la figura inicial, esta corresponderá a una parte de la teselación que no tiene ninguna repetición de la imagen, pero que al repetirse una y otra vez puede cubrir el plano, y a partir de ella determina las transformaciones pedidas.

Resolver

En este caso, la figura inicial puede ser la siguiente, siempre que cumpla las condiciones necesarias. Al ver cómo se repite la figura en la teselación, se aprecia que no cambia de orientación, ya que no se ve reflejada, ni rotada en la teselación. Entonces, solo se han aplicado traslaciones y basta determinar cómo son las traslaciones que se realizaron.
Para lo anterior, imagina el movimiento de la figura inicial, observa.



Revisar

Para comprobar si solo se realizaron las traslaciones anteriores para dibujar la teselación, considera una sola figura, aplícale sucesivamente las transformaciones que identificaste y marca cada nueva figura que resulte. Compara tu dibujo con la teselación dada.

PRACTICA

1. Identifica con cuál o cuáles de las transformaciones isométricas se construyó la siguiente teselación.

Comprender

¿Qué sabes del problema?

¿Qué debes encontrar?

Planificar

¿Cómo resolver el problema?

Resolver

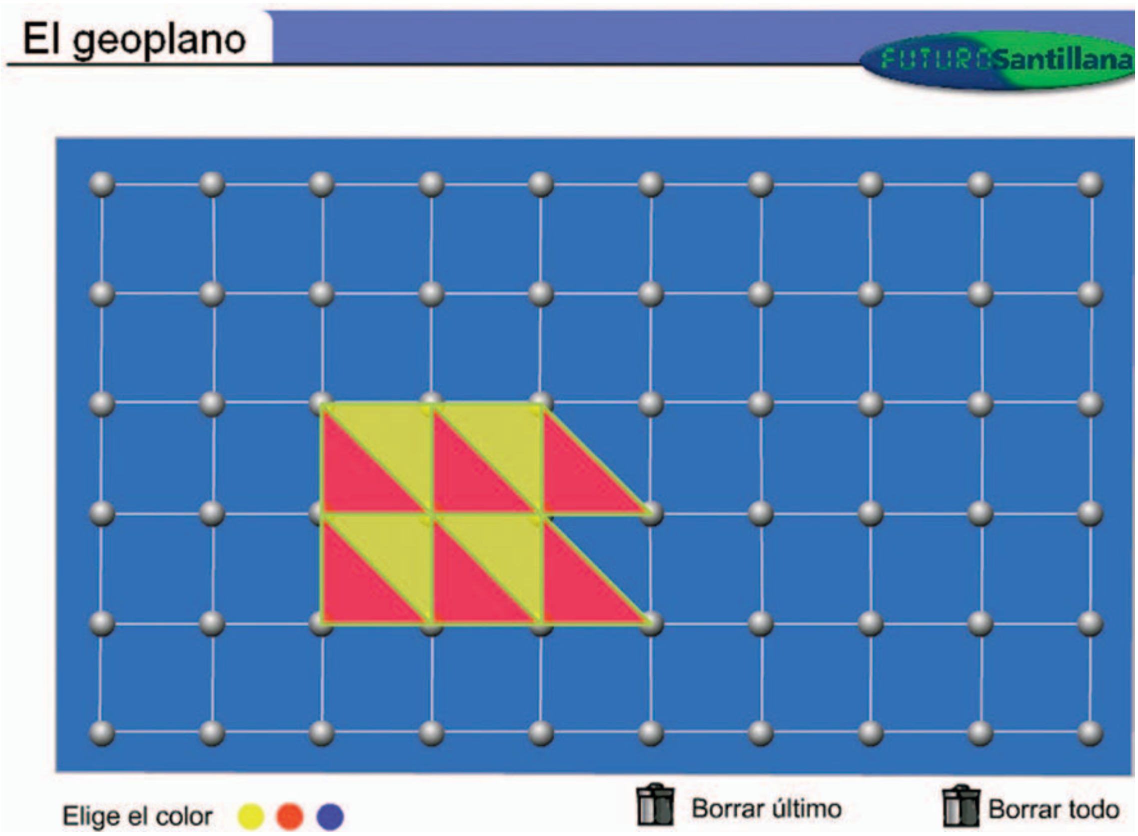
Revisar

2. Identifica con cuál o cuáles de las transformaciones isométricas se construyó la siguiente teselación.

Ahora trabaja en tu hipertexto

Uso del computador

Conéctate a Internet a la página http://www.santillana.cl/futuro/geo5.htm ahí encontrarás un geoplano interactivo, mediante el cual construiremos una teselación.



Como puedes observar en la imagen, se ha construido una teselación utilizando solo triángulos rectángulos.

1. Completa la teselación anterior de manera de cubrir completamente el plano.
2. Inventa tu propio diseño para una teselación regular y cubre todo el plano.
3. Inventa un diseño para una teselación, utilizando dos polígonos diferentes, luego cubre la totalidad del plano con este diseño.
4. ¿Qué dificultades tuviste para realizar las actividades anteriores? Justifica.

Síntesis

1. Una **transformación geométrica** corresponde al movimiento de una figura en el plano.

2. Una **transformación isométrica,** es una transformación geométrica que mantiene la forma y el tamaño de las figuras.

3. Una **traslación** es una transformación isométrica que "mueve" todos los puntos de una figura, en una misma distancia y dirección.

Para representar gráficamente el movimiento realizado en una traslación, se puede utilizar una flecha, a esta flecha se le conoce como vector de traslación.

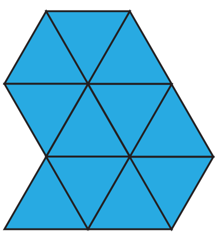
4. Una **reflexión** es una transformación isométrica en la que a cada punto de la figura original se le asocia otro punto (llamado imagen), de modo que el punto y su imagen están a igual distancia de una recta llamada **eje de simetría**.

5. Una **rotación** es una transformación isométrica, en la cuál todos los puntos se mueven respecto a un punto fijo llamado **centro de rotación (O)**, en un determinado ángulo, llamado **ángulo de rotación.**

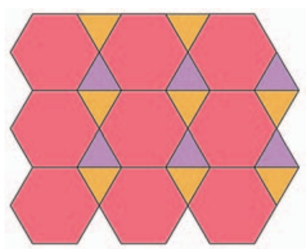
6. Una **teselación** es un patrón de figuras que cubre totalmente la superficie sin sobreponer o trasladar figuras. Estas se obtienen a partir de sucesivas transformaciones isométricas a alguna figura. Según los polígonos que la forman, una teselación puede ser:

- **Regular:** si está formada solo por polígonos regulares.
- **Semirregular:** si está formada por dos o más polígonos regulares.
- **No regular:** si está formada por polígonos no regulares.

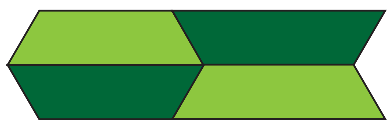
Ejemplo:



Teseleción regular



Teseleción semiregular



Teseleción no regular

En tu cuaderno realiza un esquema que relacione **al menos** los conceptos dados a continuación: transformación geométrica, transformación isométrica, traslación, reflexión, rotación, teselación.

Evaluación

Marca la alternativa correcta en las preguntas 1 a la 7.

1. Una transformación isométrica se caracteriza por:

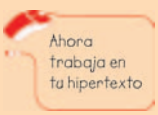
   A. Cambiar el tamaño y la forma de la figura.
   B. Cambiar el tamaño y conservar la forma de la figura.
   C. Conservar el tamaño y cambiar la forma de la figura.
   D. Conservar el tamaño y la forma de la figura.

2. Al aplicar una rotación se puede hacer que la figura coincida exactamente con la original si esta se aplica a:

   A. Una circunferencia.
   B. Un triángulo equilátero.
   C. Un pentágono.
   D. Todos los polígonos anteriores.

3. La imagen de una circunferencia coincide exactamente con la circunferencia original al aplicar:

   A. Una traslación respecto a un radio de la circunferencia.
   B. Una reflexión cuyo eje de simetría no pase por el centro de la circunferencia.
   C. Una rotación cuyo centro de rotación coincida con el centro de la circunferencia.
   D. Todas las anteriores.



4. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es **falsa**?

   A. Un dibujo se dice simétrico si algún eje de simetría pasa por él.
   B. El eje de simetría es perpendicular a los trazos que une cada punto y su imagen.
   C. Al aplicar dos rotaciones sucesivas a una figura, siempre obtengo la figura original.
   D. Al aplicar una rotación, todos los puntos de la figura se mueven en torno a un punto fijo.

5. ¿Cuál de los siguientes polígonos no tienen ejes de simetría?

   A. Rectángulo.
   B. Triángulo equilátero.
   C. Trapecio isósceles.
   D. Romboide.

6. Se puede teselar un plano usando:

   A. hexágonos regulares.
   B. Octágonos y cuadrados.
   C. Hexágonos y triángulos.
   D. Todas las anteriores.

7. Una teselación formada por dos polígonos regulares se denomina:

   A. Teselación regular.
   B. Teselación irregular.
   C. Teselación semiregular.
   D. Ninguna de las anteriores.

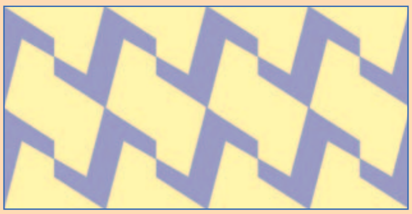
Lee atentamente y resuelve.

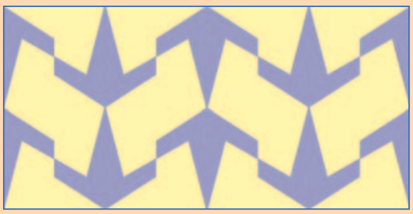
8. ¿Se puede teselar utilizando cualquier triángulo?, ¿y usando cualquier cuadrilátero? Justifica.

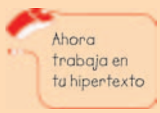
9. Construye una teselación en tu cuaderno. Para esto dibuja en un cuadrado un diseño (como si fuera una baldosa).

a. Usando solo el diseño del cuadrado que construiste, y aplicando una o más transformaciones isométricas, dibuja dos teselaciones distintas, como se muestra a continuación.


Diseño


Teselación 1


Teselación 2



¿Cómo trabajé?

Marca según tu apreciación	**No lo entendí**	**Lo entendí**	**Puedo explicarlo**
Transformaciones geométricas			
Traslaciones de figuras planas			
Reflexiones de figuras planas			
Rotaciones de figuras planas			
Teselaciones			
Uso de un *software* geométrico para realizar transformaciones isométricas.			

UNIDAD

8 Relaciones proporcionales

Necesitas recordar

Escribe dos fracciones equivalentes a la dada.

1. $\frac{3}{7}$
2. $\frac{2}{9}$
3. $-\frac{5}{12}$
4. $-\frac{1}{30}$

Transforma las siguientes fracciones a número decimal.

5. $\frac{5}{100}$
6. $-\frac{20}{100}$
7. $\frac{33}{100}$
8. $\frac{999}{1.000}$

Transforma los siguientes números decimales a fracción.

9. 0,34
10. 0,72
11. 0,0068
12. 0,0006

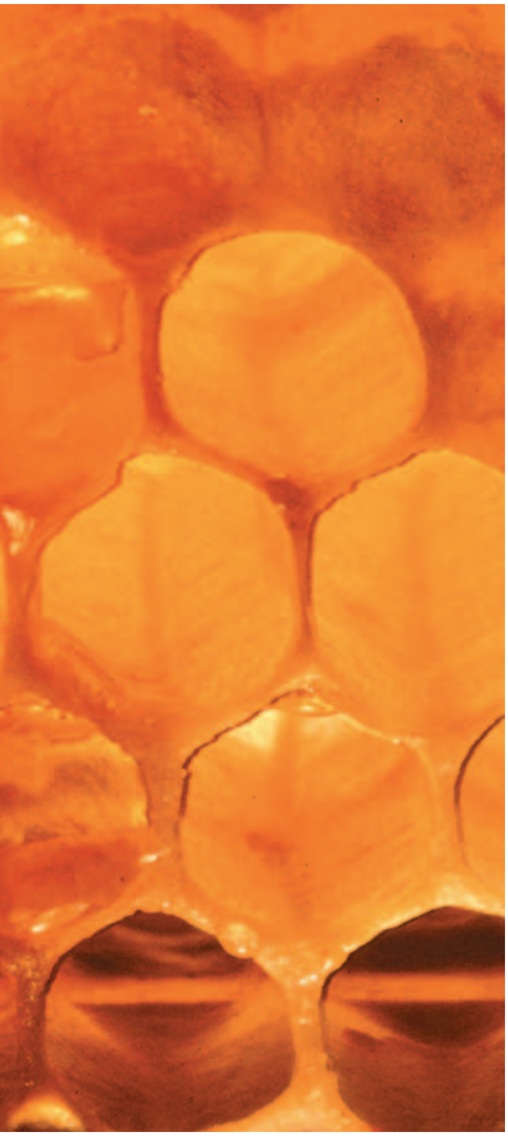
Compara las siguientes fracciones utilizando los símbolos <, > o =.

13. $\frac{1}{5} \bigcirc \frac{3}{9}$
14. $-\frac{9}{15} \bigcirc -\frac{3}{5}$
15. $\frac{4}{23} \bigcirc \frac{7}{22}$
16. $-\frac{2}{11} \bigcirc -\frac{4}{22}$

Ahora trabaja en tu hipertexto

¿Qué aprenderás?

- A encontrar el término desconocido en una proporción.
- A resolver problemas definiendo el tipo de proporcionalidad.
- A reconocer figuras semejantes y determinar la proporcionalidad que se da entre ellas.
- A trazar e interpretar mapas de acuerdo a una escala.
- A calcular porcentajes.
- A resolver problemas comerciales usando porcentajes.



Resuelve

La miel de abejas es una mezcla compuesta sobre todo por los azúcares: glucosa y fructosa. En la mayoría de las mieles la fructosa predomina sobre el resto de los azúcares por lo que la miel se hace más dulce que el azúcar común.
Se sabe que la miel líquida contiene alrededor de 82 g de carbohidratos por cada 100 gramos de miel, proporcionando unas 304 kilocalorías.

a. ¿Cuántos gramos de carbohidratos habrá en 150 g de miel?

b. Si una cucharada de miel contiene 21 gramos de miel, ¿cuántos gramos de carbohidratos contiene?

c. ¿Cuántas kilocalorías contienen 50 gramos de miel?

d. ¿Qué porcentaje de carbohidratos hay en 100 gramos de miel?

e. Si en un envase con miel, el 74% corresponde a carbohidratos, ¿cuántos gramos de miel contiene el envase?

Ahora trabaja en tu hipertexto

Una dieta equilibrada

- Haz una lista de los alimentos que consumes en un día, con las calorías que te aportan.
- ¿Son los adecuados? ¿Cómo podrías hacer para tener una alimentación más saludable?
- ¿Crees que una persona del doble de tu edad tiene que consumir el doble de calorías que tú?
- Averigua con un nutricionista cúantas calorías debes consumir diariamente. Haz lo mismo pensando en una persona con el doble de tu edad.

Razones y proporciones

EXPLORA

Esteban y Alicia depositarán en un banco $120.000 todos los meses de manera proporcional a sus ingresos, es decir, el que gana más, aporta más. La pregunta es cuánto más.
Si Alicia gana $600.000 y Esteban $400.000, ¿cuánto dinero debe aportar cada uno?

$$\frac{\text{Aporte de Alicia} \rightarrow 600.000}{\text{Aporte de Esteban} \rightarrow 400.000} = \frac{3}{2}$$

Esto quiere decir que por cada $3 que aporte Alicia, Esteban debe aportar $2. En otras palabras, si dividimos el total en 5 partes iguales, Alicia aporta 3 y Esteban 2 de estas partes.

120.000 : 5 = 24.000 ▶ Alicia → 3 • 24.000 = 72.000
Esteban → 2 • 24.000 = 48.000

Comprobamos:

Aporte de Alicia + aporte de Esteban = 120.000

72.000 + 48.000 = 120.000

y además, $\frac{72.000}{48.000} = \frac{3}{2}$

En este último caso vemos que estas 4 cantidades forman una proporción.

- La razón entre dos cantidades es el cociente entre esas cantidades.
  Ejemplo:
  La razón entre **a** y **b** es **a** : **b** y se lee "**a** es a **b**".

- Una proporción es una igualdad entre dos o más razones.
  Ejemplo:
  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ forman proporciones.

- En toda proporción se cumple que:
  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \longleftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

- La proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se lee: "**a** es a **b** como **c** es a **d**".

PRACTICA

Completa para formar una proporción.

1. $\frac{1}{2} = \frac{\square}{10}$

2. $\frac{3}{4} = \frac{9}{\square}$

3. $\frac{\square}{10} = -\frac{15}{30}$

4. $\frac{4,5}{\square} = \frac{5}{10}$

5. $\frac{6,3}{0,7} = \frac{\square}{10}$

6. $\frac{-2,5}{\square} = \frac{-0,0625}{100}$

Encuentra el valor de x en las siguientes proporciones.

7. $\frac{8}{32} = \frac{2}{x}$

8. $\frac{5}{3} = \frac{x}{21}$

9. $\frac{3}{8} = \frac{x}{16}$

10. $\frac{1}{2} = \frac{3}{x}$

11. $\frac{2}{11} = \frac{4}{x}$

12. $\frac{10}{3} = \frac{x}{9}$

Ahora trabaja en tu hipertexto

Determina en cada caso si con las dos razones dadas se puede formar una proporción.

13. $\frac{4}{10}$ y $\frac{2}{5}$

14. $\frac{8}{32}$ y $\frac{2}{8}$

15. $\frac{1,5}{6}$ y $\frac{0,5}{2}$

16. $\frac{35}{28}$ y $\frac{5}{4}$

17. $\frac{3}{2}$ y $\frac{0,75}{0,5}$

18. $\frac{0,1}{100}$ y $\frac{0,001}{10.000}$

Observa el siguiente ejemplo y resuelve.

Las edades de Nicolás, Carlos y Rosario están en la razón 2 : 3 : 5. Además, la suma de sus edades es 30. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Sabemos que N, C y R están en la razón 2 : 3 : 5, es decir, $\frac{N}{C} = \frac{2}{3}$, $\frac{C}{R} = \frac{3}{5}$ y $\frac{N}{R} = \frac{2}{5}$.

Una manera de resolver esto es tomar el total, 2 + 3 + 5 = 10, y tomar el aporte de cada uno al total (30 años): Nicolás con 2, Carlos con 3 y Rosario con 5.

30 : 10 = 3 ▶ Nicolás: 2 • 3 = 6 años
Carlos: 3 • 3 = 9 años
Rosario: 5 • 3 = 15 años

19. La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo están en la razón 2 : 4 : 6. ¿Cuánto mide cada ángulo? Verifica tu resultado con tus compañeros(as).

20. El perímetro de un triángulo es 240 cm y sus lados están en la razón 3 : 5 : 7. ¿Cuánto mide cada lado?

21. Inventa un problema similar y pídele a un compañero(a) que lo resuelva.

8

Variaciones proporcionales y no proporcionales

EXPLORA

Carlos amplió unas fotografías de su hermana, al verlas se dio cuenta de que una de ellas está "distorsionada", es decir, la imagen no se ve igual que la fotografía inicial.

Calculemos la razón entre las medidas del largo y ancho de cada fotografía:

	Largo (cm)	Ancho (cm)	Razón
Fotografía original	4	2	4 : 2 = 2
Fotografía 2	6	2	6 : 2 = 3
Fotografía 3	6	3	6 : 3 = 2

Si observas bien las razones entre las medidas de cada fotografía, te darás cuenta de que la razón entre el largo y el ancho se mantiene constante en las fotografías 1 y 3, por esto la fotografía 3 está bien ampliada. En la fotografía 2, en cambio, la razón entre sus lados cambia, esto hace que se vea deformada.

Como los valores de las razones de la fotografía 1 y 3 son iguales, diremos que estas fotos son proporcionales, mientras que las fotografías 1 y 2 son no proporcionales, ya que sus razones no son equivalentes.

Si la razón entre dos variables se mantiene constante (no cambia) estas variables son proporcionales. De lo contrario se dice que las variables son no proporcionales.

PRACTICA

Mide el largo y ancho de las siguientes fotografías y determina si son proporcionales a la fotografía original.

Fotografía original

1.

2.

3.

La edad de un padre es 40 años y la de un hijo es 20 años. Completa la siguiente tabla y luego responde.

4.

	Tiempo trascurrido en años			
	1	**5**	**10**	**15**
Padre	41			
Hijo	21			

Ahora trabaja en tu hipertexto

5. ¿La edad del padre y del hijo son proporcionales a medida que transcurren los años?

Variables dependientes e independientes

APRENDE

Las entradas para el partido Chile – Colombia, a realizarse en Chile, por las clasificatorias para el mundial de fútbol Sudáfrica 2010, son las siguientes:

PRECIOS
Precios Entradas Individuales
Tribuna lateral baja: $ 20.000
Andes preferencial: $ 50.000
Andes sur: $ 42.500
Andes baja: $ 25.000
Galeria: $ 8.500

Fuente: www.emol.cl

Como observamos, lo más conveniente es comprar **galería**. Si una entrada tiene un valor de $ 8.500, para dos entradas el valor es de $ 17.000, ¿cuánto tendríamos que cancelar por 4 entradas?, ¿y 7 entradas?, y ¿12 entradas?

La situación anterior se puede modelar con la expresión algebraica:

$$\boxed{y = 8.500 \bullet x}$$

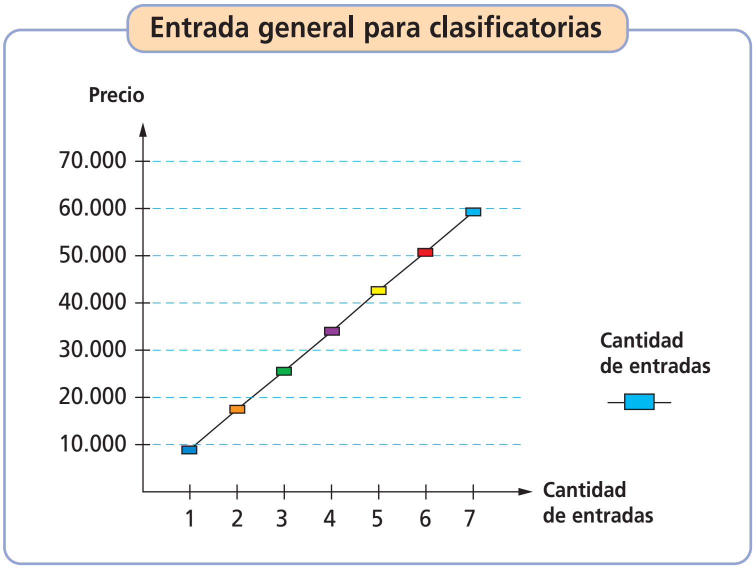
donde:
x: representa la cantidad de entradas a comprar, e
y: representa el valor total a pagar por las entradas compradas.

Luego, para 4 entradas se debe cancelar $ 34.000, ya que $x = 4$, entonces se tiene que $y = 8.500 \bullet 4 = 34.000$.

Para 7 entradas se cancela $ 59.500, ya que $x = 7$, entonces se tiene que $y = 8.500 \bullet 7 = 59.500$.

Para 12 entradas se cancela $ 102.000, ya que $x = 12$, entonces se tiene que $y = 8.500 \bullet 12 = 102.000$.

El gráfico que representa esta situación corresponde a:



En este caso, para distintos valores de **x** (cantidad de entradas) se obtendrán distintos valores para **y** (precio a pagar por las entradas), es decir, el valor total de las entradas compradas depende de la cantidad de personas que asistan. Se puede concluir que el **valor de la variable y depende del valor de la variable x.**

Una relación entre dos variables x e y, se puede representar o modelar por una ecuación de manera que a cada valor de x le corresponde un único valor de y. Como el valor de **y** depende del valor de x, se dice que y es la variable dependiente y x la variable independiente.

PRACTICA

Responde.

1. Las entradas para el partido de Copa Davis, Chile – Australia, para volver al grupo mundial, tienen el valor de $ 24.000.
   a. ¿Cuál es el precio por 5 entradas?
   b. ¿Cuál es la expresión algebraica que modela esta situación?
   c. ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?
   d. Completa la siguiente tabla según corresponda.

x	3	5	8	12	20
y					

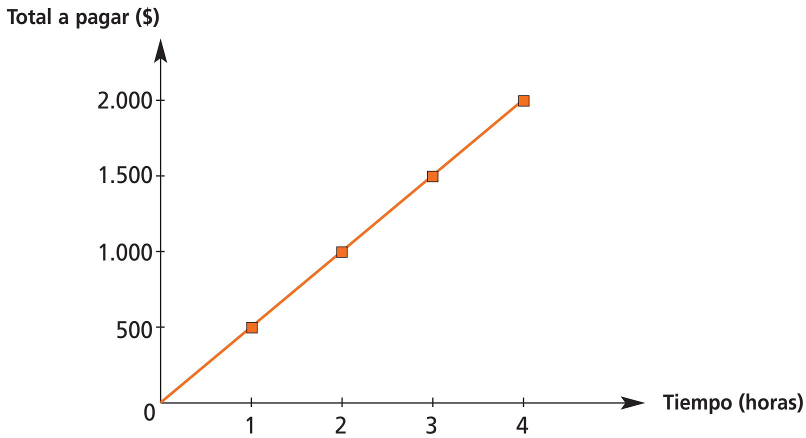
   e. Construye el grafico que representa a esta situación.

Proporcionalidad directa

EXPLORA

En el centro de una ciudad, el arriendo de un estacionamiento cuesta $500 por hora. ¿Cuánto deberías pagar por 5 horas?
Para responder esta pregunta te proponemos construir una tabla y su correspondiente gráfico. Completa.

El gráfico representa la relación que existe entre tiempo y precio.



Tiempo (h)	Total a pagar ($)
1	500
2	1.000
3	1.500
4	
5	
6	
7	
8	4.000

Luego, deberías pagar $2.500 por 5 horas.

Lee con atención las siguientes preguntas y sus respectivas respuestas.

a. ¿Qué pasa con el total a pagar cuando aumenta la cantidad de horas de arriendo?
Aumenta.

b. ¿Cuánto gastarías por 3 horas de estacionamiento?
Gastaría 3 • 500 = 1.500 pesos

c. ¿Cuál es la razón entre el total a pagar y el tiempo?

La razón es constante porque $\frac{500}{1} = \frac{1.000}{2} = \frac{15.000}{3} = 500$

d. La razón entre los tiempos de arriendo y la razón entre los precios, ¿forman una proporción?
Sí, porque, por ejemplo: $\frac{2}{3} = \frac{1.000}{1.500}$

- Dos magnitudes están en proporción directa cuando el cociente entre ellos se mantiene constante:
  Ejemplo: $\frac{500}{1} = \frac{1.000}{2} = 500$
- Dos magnitudes son directamente proporcionales si al aumentar o disminuir una de ellas, la otra aumenta o disminuye en la misma razón.
- Un gráfico de magnitudes directamente proporcionales es una recta que siempre pasa por el origen de un sistema de coordenadas cartesianas.

Resuelve.

1. En los días de calor, el dueño de un kiosco vende muchos helados, por eso diseña una tabla con los posibles pedidos. Complétala.

Cantidad de helados	1	2		4		9	10
Precio ($)	260	520	780		2.080		

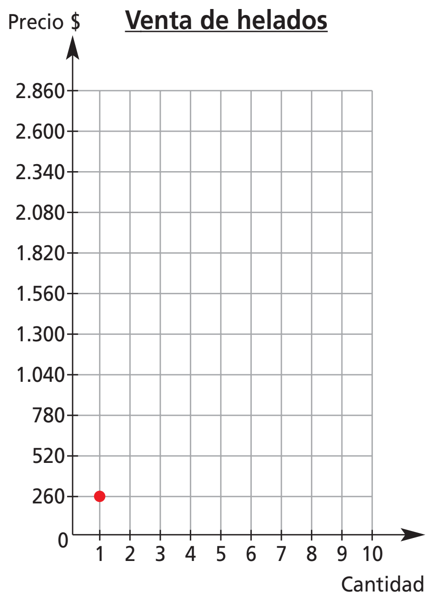
a. ¿Cómo lo hiciste para calcular la cantidad de helados?

b. ¿Cómo lo hiciste para calcular el precio en cada caso?

c. ¿Cuántos helados puedes comprar con $3.640?

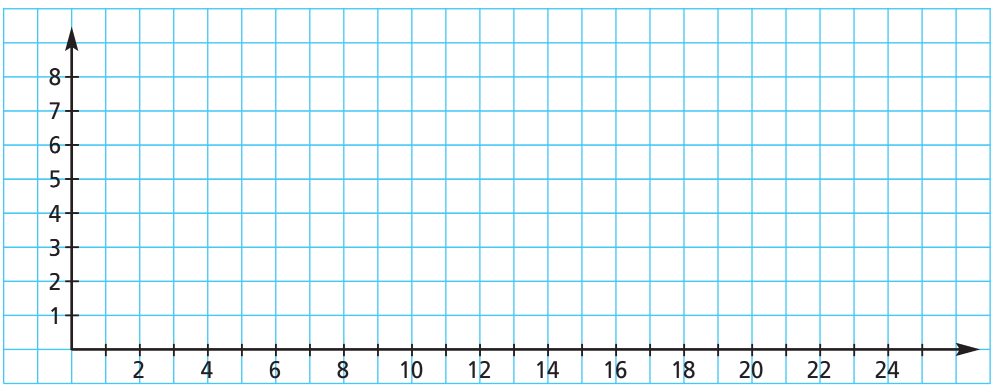
d. ¿Cuál es el valor de la razón entre el precio y la cantidad de helados?

e. Completa el gráfico.



2. Si A y B son dos variables que forman una proporción directa, completa la siguiente tabla y construye un gráfico a partir de los datos.

A	B
8	2
12	
	4
20	
24	



a. Si unes los puntos, ¿qué resulta?

EN EQUIPO

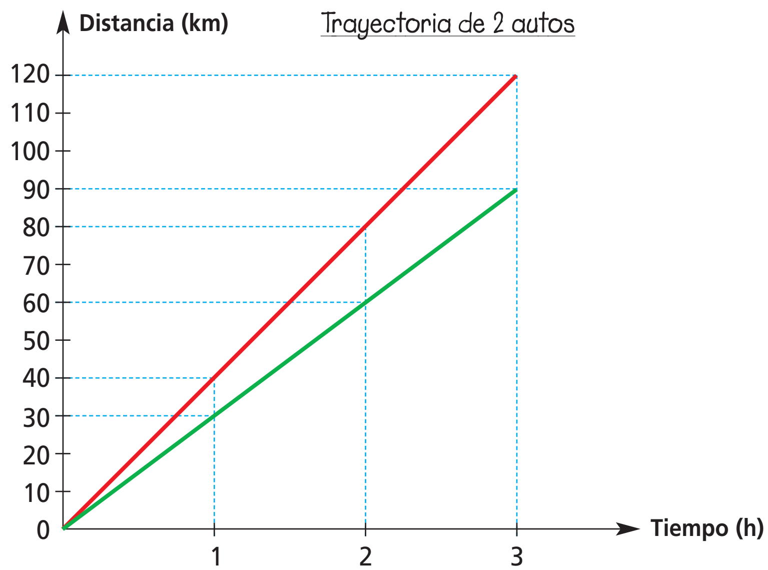
3. Inventen una tabla con dos magnitudes que estén en proporción directa, construyan su gráfico y compárenlo con el gráfico anterior. ¿Qué pueden concluir?

Proporcionalidad directa

4. Indica si las siguientes magnitudes se relacionan de manera directamente proporcionales.

   a. El número de hojas de un libro y su peso.
   b. El lado de un cuadrado y su perímetro.
   c. Los lados de un triángulo y su área.
   d. El número de trabajadores y los días que se demoran en terminar un trabajo.

5. El siguiente gráfico indica la distancia recorrida por dos autos, uno rojo y uno verde, en un tiempo determinado sin que cambien sus velocidades en el tiempo.



Tiempo (h)	Distancia (km)
1	30

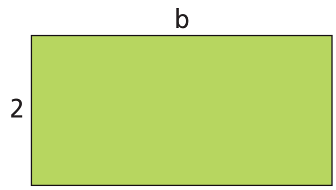
Tiempo (h)	Distancia (km)
2	80

   a. Completa las tablas según el gráfico.
   b. El auto que va más rápido es el ________________ porque ________________________________.
   c. ¿En cuánto tiempo el auto verde recorrerá 60 km? ________________________________
   d. ¿Cuál es la razón que se mantiene constante para el auto rojo? ¿Y para el verde? ______________
   e. ¿A qué distancia del punto 0 se encontrará el auto verde en 10 horas más? ________________
   f. ¿Cuánto tiempo se demorará el auto rojo en recorrer 480 km? ________________________
   g. A medida que el tiempo transcurre, ¿los autos recorren más o menos km? Explica. ______________

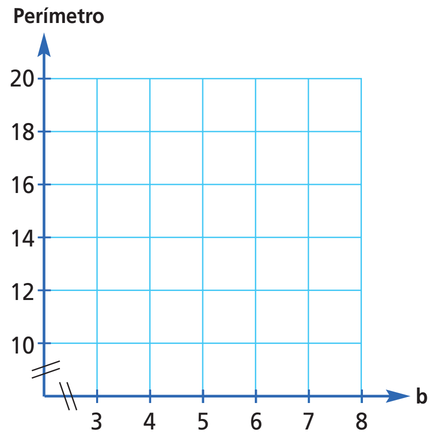
   ____

6. Los octavos años de un colegio están juntando dinero para su paseo de fin de año. Hasta el momento llevan recaudado \$270.000. Este dinero será repartido en forma proporcional al número de alumnos que tenga cada curso. El 8° A tiene 42 alumnos, el 8° B tiene 38 y el 8° C tiene 44 alumnos. ¿Cuánto dinero le corresponde aproximadamente a cada curso en este momento?

7. Observa el rectángulo, completa la tabla y dibuja el gráfico correspondiente.



a	b	Perímetro
2	3	$2 \bullet 2 + 2 \bullet 3 = 10$
2	4	
2	5	
2	6	
2	7	



a. ¿Qué sucede con el perímetro si la medida de **b** aumenta? ¿Y si disminuye?

8. Tres hermanas deben reunir $480.000 para mantener su hogar, aportando proporcionalmente los ingresos de cada una. Antonia gana $240.000, Alejandra gana $300.000 y Andrea $280.000. ¿Cuánto dinero debe aportar cada una, para que su aporte sea proporcional a su sueldo?

9. En carretera, una camioneta rinde aproximadamente 18 km por cada litro de combustible. Con esta información completa la tabla y responde.

a. ¿Qué sucede con el combustible a medida que la camioneta recorre más kilómetros?

Combustible (litro)	Recorrido (km)
$\frac{1}{2}$	
$\frac{1}{4}$	
$\frac{3}{2}$	
2	36
3	
5	
10	

Busca la información necesaria y completa.

10. El Metro de Santiago viaja a una velocidad aproximada de ____________ por hora entre cada estación.

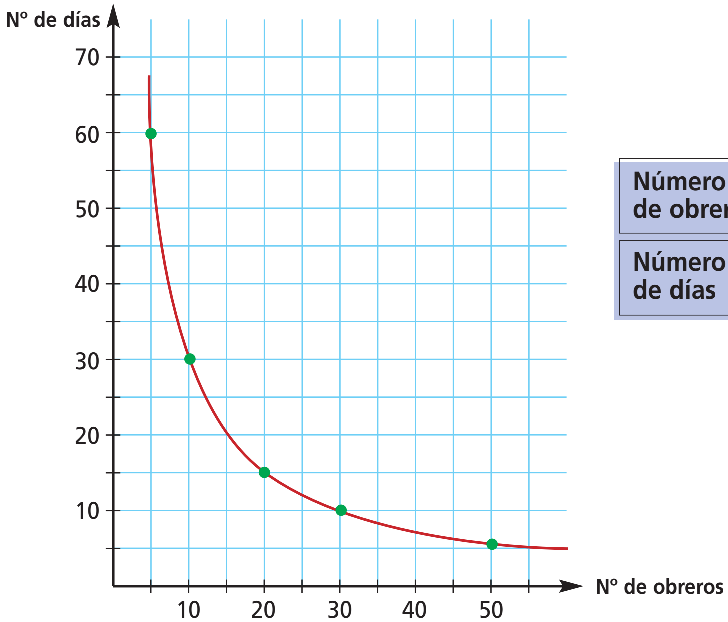
11. Si la distancia desde Santiago a Talca es de ________________, ¿cuánto tiempo tardaría el metro en llegar a esa ciudad?

12. Si el metro logró llegar a su destino en 2,8 horas, ¿cuántos kilómetros recorrió? ____________________

Proporcionalidad inversa

EXPLORA

Para terminar la construcción de un edificio, el ingeniero a cargo ha calculado que con 10 obreros trabajando diariamente termina la obra en 30 días. ¿Qué sucedería si contrata a 10 obreros más? ¿Se demoran más o menos tiempo?
La siguiente tabla y gráfico respectivo muestran la relación que existe entre el número de obreros y los días que tardan en terminar el edificio. Complétala.



Número de obreros	5	10	20	30	40	50
Número de días		30				6

Cuando en una relación entre dos magnitudes una aumenta (cantidad de obreros) mientras que la otra disminuye (número de días) hablamos de una proporción inversa entre las magnitudes. ¿Qué sucede con el producto entre ambas magnitudes?

Si observas bien, se mantiene constante:

$5 \bullet 60 = 10 \bullet 30 = 20 \bullet 15 = ... = 300$

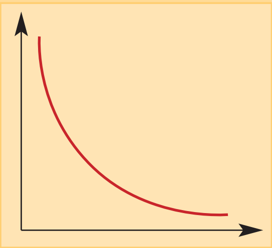
Es decir, si dos magnitudes son inversamente proporcionales, el producto entre ellas se mantiene constante.

¿Cuántos días se demorarán 15 obreros?
Como el producto debe ser 300, tenemos que 300 : 20 = 15.
Entonces, se demoran 15 días.

Antes de resolver un problema te sugerimos que uses tu sentido común para identificar el tipo de proporcionalidad que hay. En este caso, el sentido común indica que si hay más gente trabajando, menos tiempo se demorarán en terminar la obra.

- Dos magnitudes están en proporción inversa cuando el producto entre ellas se mantiene constante.
- Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al aumentar o disminuir una de ellas un cierto número de veces, la otra disminuye o aumenta en la misma razón.

Un gráfico de magnitudes inversamente proporcionales es una curva, llamada hipérbola, como muestra la figura.



PRACTICA

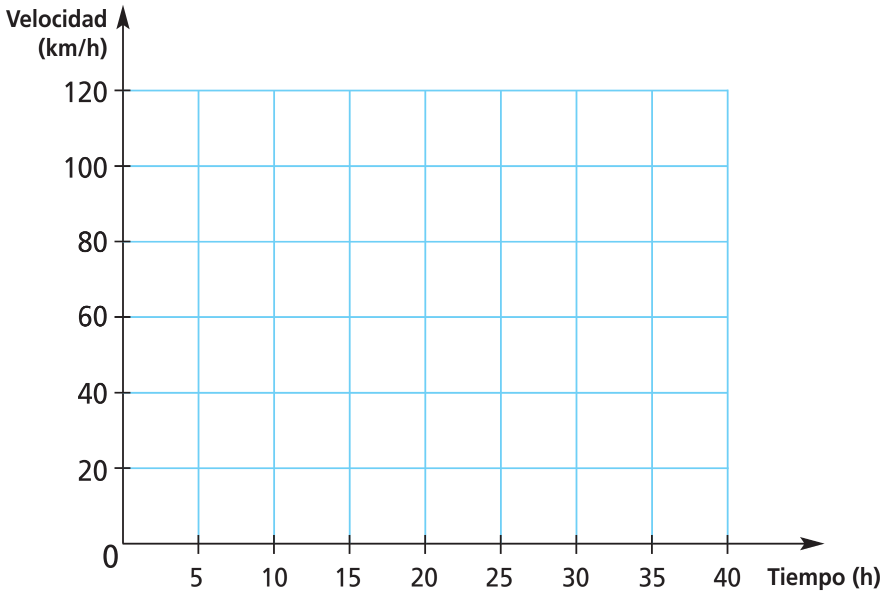
Resuelve.

1. Para las próximas vacaciones, el 8° A de un colegio irá a un lugar sorpresa del sur de Chile. La única información que tienen es que si el bus va a 100 km/h, tardarían 5 horas en llegar al destino.

   a. ¿A qué distancia se encuentra esta ciudad? ______________

   b. Completa la siguiente tabla que indica posibles velocidades del vehículo y el tiempo que utilizarían con cada una de ellas para llegar a la ciudad. Completa el gráfico correspondiente.

Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
100	5
	10
25	
	30
	40



   c. ¿A qué velocidad debe ir el vehículo para tardar 8 horas en llegar?

   d. Si el vehículo fuese a una velocidad de 30 km/h, ¿cuánto tiempo tardaría en llegar a destino?

   e. Si unes los puntos del gráfico, ¿qué obtienes?

   f. Si la velocidad promedio de una persona al caminar es de 5 km/h, ¿cuánto demoraría una persona en realizar el mismo viaje?

   g. Inventa una tabla con dos magnitudes que estén en proporción inversa, construye su gráfico y compáralo con el gráfico anterior. ¿Qué puedes concluir?

2. Indica si son magnitudes inversamente proporcionales.

   a. La longitud de los lados de un triángulo equilátero y su perímetro.

   b. La cantidad de alimento para perros y el número de perros.

   c. Ingreso per cápita (ingreso total de la familia dividido por el número de integrantes) y número de integrantes del grupo familiar.

   d. Litros de bencina y kilómetros recorridos.

3. Si C y D son dos variables que forman una proporción inversa, completa la siguiente tabla.

C	D	Producto entre C y D
6	8	48
8		
	12	
24		
48		

a. ¿Qué obtienes al calcular el producto en cada fila?

b. Construye el gráfico correspondiente a esta tabla.

4. Descubre las tablas que expresan una proporcionalidad inversa. En cada caso, calcula el valor de la **constante de proporcionalidad (k)** y anótalo donde corresponde.

x	y
4	5
2	10
1	20
0,5	40

k = ____________

x	y
7	8
10	11
13	14
16	17

k = ____________

x	y
100	51
50	2
25	4
5	20

k = ____________

x	y
1,2	5
1,5	4
6	1
0,5	40

k = ____________

EN EQUIPO

En los siguientes problemas, organicen los datos de las variables x e y en una tabla. Diseñen el gráfico correspondiente.

5. La tía Marina tiene que preparar 4 kg de mermelada. Para envasarla, dispone de frascos con capacidad de $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{2}$ kg. ¿Cuántos frascos de cada tipo necesita para envasar los 4 kg de mermelada?

6. El volumen que ocupa y la presión que ejerce un gas a igual temperatura son inversamente proporcionales. Si 2 metros cúbicos de aire ejercen una presión de 1,5 atmósferas, ¿qué presión habría si el aire se expande y ocupa un volumen de 6 metros cúbicos?

En cada caso completa la tabla, explica por qué las magnitudes están inversamente relacionadas y construye el gráfico en tu cuaderno.

7. El área de un rectángulo es 6 cm^2.

Área 6 cm^2	base (cm)	1	1,5	2	3	4	6
	altura (cm)						

8. Un tren debe recorrer 600 kilómetros. ¿Cuánto tiempo tardará si lleva una velocidad constante?

Velocidad constante (km/h)	40	50	60	100	120
Tiempo (h)				6	

9. Un panadero elaboró 144 alfajores y quiere envasarlos en cajas que contengan la misma cantidad de unidades. ¿Cuántas cajas podría armar según la cantidad de alfajores que se indican en la tabla?

Cantidad de alfajores por caja	6	12	18	24
Cantidad de cajas				

Lee atentamente y resuelve.

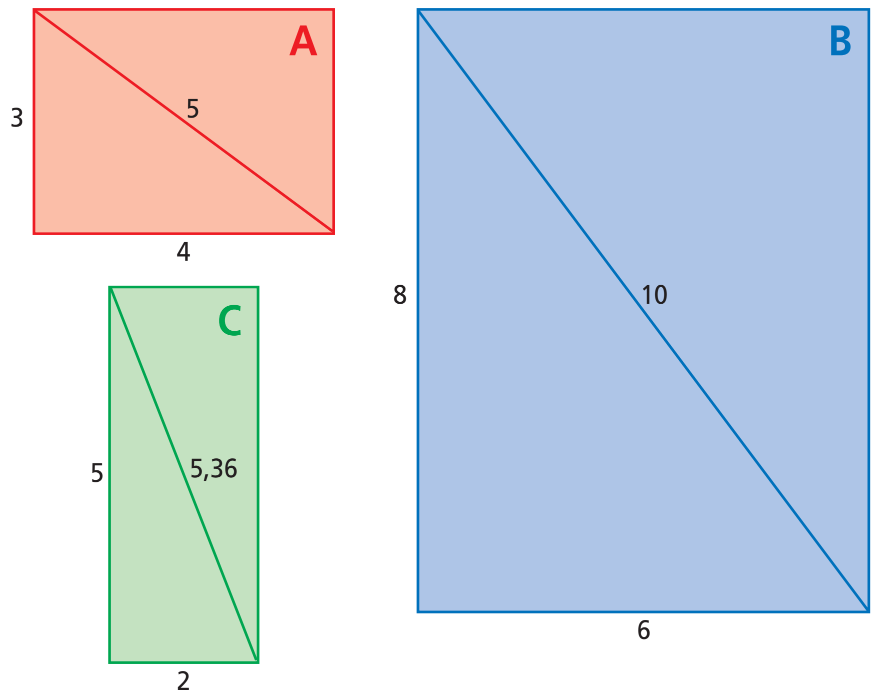
10. Resuelve en tu cuaderno y luego completa la tabla.

Problema	¿Se resuelve con proporcionalidad?	Tipo de proporcionalidad	Respuesta
Quince máquinas iguales hacen su trabajo en 5 días. ¿Cuántas máquinas se necesitan para hacer el trabajo en un día?			
Una persona acumula en promedio 1 kg de basura diaria. ¿Cuántos kilogramos juntará en 10 días?			
Si van 12 niños al campamento, los alimentos durarán 6 días. ¿Si todos comen la misma cantidad, cuántos días durará la comida si van 20 niños?			

Semejanza y proporcionalidad

EXPLORA

Observa las figuras geométricas con sus respectivas medidas. ¿Qué relación encuentras entre ellas?



Si ya te diste cuenta, los rectángulos azul y rojo se parecen un poco más, ya que entre ellos existe una relación matemática. La **razón o cociente** entre la medida de sus lados es la misma.

$$\frac{3}{4} = 0{,}75 \quad \text{y} \quad \frac{6}{8} = 0{,}75$$

Además, todas las medidas entre estos dos triángulos están relacionadas.

$$\frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Cuando obtienes el mismo cociente al comparar las medidas respectivas de dos figuras diremos que las figuras son **semejantes**.

No siempre tendrás figuras semejantes ya que, por ejemplo, en el rectángulo verde obtienes 0,4 como cociente entre las medidas.

Ejemplo: k = 2,5, indica que la figura mayor es dos veces y media la figura menor.

Dos figuras son semejantes si tienen exactamente la misma forma y conservan las mismas proporciones, aunque sus tamaños sean diferentes.

Si dos figuras son semejantes y tienen distintos tamaños, entonces, para cada uno de los segmentos asociados a ellas (lados, alturas, diagonales, etc.) se cumple la siguiente relación:

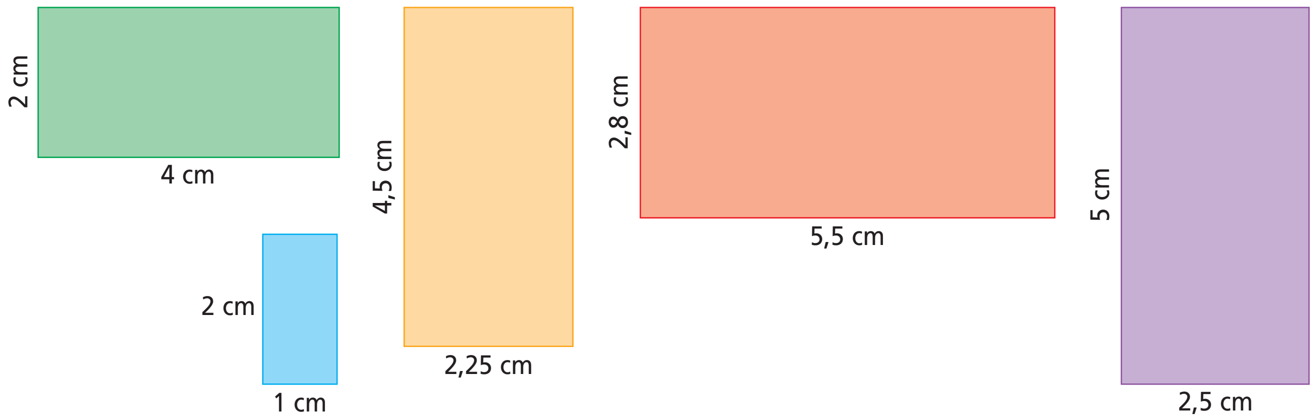
$$\frac{\text{longitud en la figura mayor}}{\text{longitud en la figura menor}} = k$$

donde k es un número constante que indica cuánto se agrandó la figura.

PRACTICA

Resuelve.

1. Marca todos los rectángulos que sean semejantes al verde.



2. Construye en tu cuaderno un cuadrilátero A'B'C'D' semejante al cuadrilátero ABCD de la figura, cuya razón de semejanza respecto a ABCD sea 3.

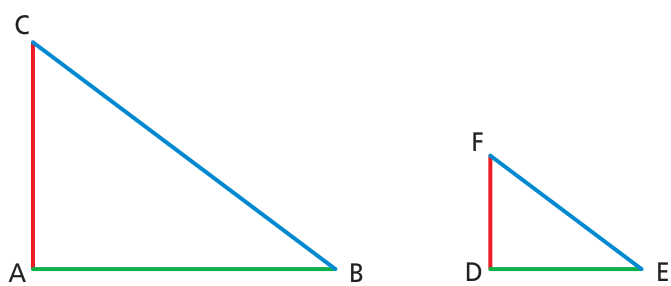
3. Dibuja un rectángulo EFGH y luego construye otro semejante al primero, de modo que la razón de semejanza del primero con respecto del segundo sea 4.

4. Si tienes dos cuadrados de distinto tamaño, ¿son siempre semejantes? ¿Qué otras figuras cumplen esta misma condición? Justifica.

5. Si la medida de cada uno de los lados de un rectángulo se multiplica por 2,5, ¿en cuánto aumenta su área?

6. Observa las siguientes figuras y completa.

Ahora trabaja en tu hipertexto



   a. Mide dos lados de cada triángulo que tienen el mismo color y escribe la razón en que están sus lados. ¿Qué sucede?

   AB : DE = ______ BC : EF = ______ AC : DF = ______

   b. ¿En qué razón están sus áreas? Comenta tu respuesta con tus compañeros y compañeras.

Escala

EXPLORA

Es común encontrar en algunos mapas una indicación de la escala a la cual están construido. Por ejemplo, en el siguiente mapa de Isla de Pascua se indica que la escala es 1 : 200.000 cm, esto quiere decir que 1 cm en el mapa equivale a 200.000 centímetros reales.
Si quieres saber la distancia aproximada entre Hanga Roa y el volcán Puakatike debes medir con una regla esta distancia y luego multiplicar por 200.000.

Distancia aproximada en el mapa	Distancia real entre estos lugares
8,7 cm	8,7 • 200.000 = 1.740.000 cm

Como generalmente las distancias largas las escribimos en kilómetros tenemos:

1.740.000 cm = 17.400 m
= 17,4 km

Elige otros dos puntos de la isla y calcula la distancia aproximada entre ellos.

Se llama escala a la razón entre la medida en un mapa y su valor real.

Por ejemplo, 1 : 100 significa que cada unidad del dibujo representa 100 unidades de las dimensiones reales.

$$\text{Escala} = \frac{\text{Distancia sobre el plano, mapa o dibujo}}{\text{Distancia real}}$$

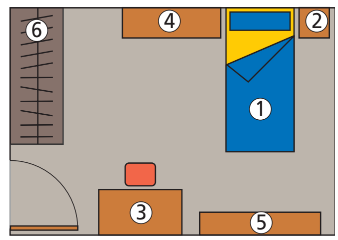
PRACTICA

Lee atentamente y resuelve.

1. Un plano está hecho a escala 1 : 150. ¿Cuánto mide en el plano una pared de 5,1 m de largo? No olvides transformar a centímetros.

2. En un mapa la distancia entre 2 ciudades es de 6,1 cm. Si la escala del mapa es 1 : 2.500.000, ¿cuál es la distancia real entre estas dos ciudades?

Responde según el siguiente plano. Usa una regla para medir.



Escala 1 : 100

3. El largo de la habitación. ______
4. El largo y el ancho de la cama 1. ______
5. El largo y el ancho del mueble 4. ______
6. El largo y el ancho del armario 6. ______
7. El largo y el ancho de la mesa 3. ______
8. El largo de la estantería 5. ______

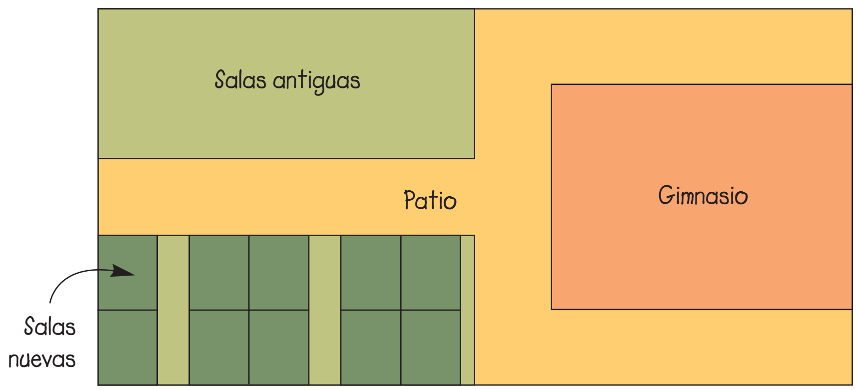
Ahora trabaja en tu hipertexto

Resuelve en cada caso.

9. Completa la siguiente tabla.

	Distancia en el mapa	Distancia real
Escala 1 : 150	2,5 cm	2,5 • 150 = 375 cm = ______ m
Escala 1 : 25.000	3,8 cm	
Escala 1 : 200.000	7,5 cm	
Escala 1 : 500.000	12 cm	
Escala 1 : 4.000.000	1,5 cm	

10. Supón que el siguiente dibujo es el plano de la construcción de las nuevas salas y del gimnasio de tu colegio, usando una escala de 1 cm : 10 m, es decir, por cada 1 centímetro que midas en el plano, tendrás 10 metros reales.



a. Las dimensiones del terreno en el plano son ______.
b. En la realidad, las dimensiones del terreno serán ______.
c. Las dimensiones reales de cada sala son ______.
d. La razón entre el área del plano y el área real es ______. ¿Están en la razón de la escala del plano? Explica.

Porcentajes

EXPLORA

Antonia y Martín están preparando sus pruebas de Estudio y Comprensión de la Naturaleza para el fin de semestre. Ellos averiguaron que al año anterior en el 8º A, con 35 alumnos, el 20% tuvo nota inferior a 4,0 y en el 8º B, con 48 alumnos, 9 de ellos tuvo nota inferior a 4,0.

¿Cuántos alumnos(as) del 8º A tuvieron una nota menor que 4,0? Para calcular el 20% de 35 tienes que establecer una proporción entre porcentajes y alumnos:

% **alumnos**

$$\frac{20}{100} = \frac{x}{35} \quad \blacktriangleright \quad x = \frac{20 \cdot 35}{100} = 7$$

Es decir, 7 alumnos(as) de los 35 obtuvieron una nota menor a 4,0.

¿Cuántos alumnos(as) del 8º B tuvieron una nota menor que 4,0?

% **alumnos**

$$\frac{x}{100} = \frac{9}{48} \quad \blacktriangleright \quad x = \frac{100 \cdot 9}{48} = 18{,}75\%$$

Es decir, un 18,75% del 8º B tuvo nota inferior a 4,0.

¿Qué curso obtuvo mejor rendimiento?
Aunque el 8º B tiene más alumnos(as) con baja nota, el 8º A tiene un mayor porcentaje de alumnos(as) con nota inferior a 4,0. Por esto decimos que el 8º B tuvo un mejor rendimiento.

- El porcentaje es la comparación por cociente entre dos cantidades con respecto a una razón cuyo denominador es 100.

  Ejemplo: El 30% de A es $\frac{30}{100} \cdot A$

- El porcentaje es un caso particular de proporcionalidad directa, en que uno de los términos de la proporción es 100.

  $\frac{a}{b} = \frac{c}{100}$ **a**: es el porcentaje; **b**: es la cantidad de referencia; **c**: es el tanto por ciento

PRACTICA

Calcula los siguientes porcentajes.

1. 10% de 5.000 = $\frac{10}{100} \cdot 5.000 = 500$
2. 15% de 22.500 = ____________________
3. 18% de 3.240 = ____________________
4. 24% de 9.120 = ____________________
5. 7% de 49.000 = ____________________
6. 12% de 94.000 = ____________________
7. 30% de 360.000 = ____________________
8. 45% de 2.000.000 = ____________________

Ahora trabaja en tu hipertexto

Resuelve los siguientes problemas.

9. Completa.

Tanto por ciento	Fracción	Decimal	Cálculo rápido
1	$\frac{1}{100}$		
2			
4			
5			
10			
12,5			
20			
25		0,25	

10. El examen que rindió Claudia tenía 125 preguntas y ella contestó correctamente el 64%. ¿Cuántas preguntas contestó correctamente?
    a. ¿Cuántas preguntas debería haber contestado correctamente para tener el 80% de aciertos?

11. Según el último censo realizado el 2002 en nuestro país el total de habitantes es 15.116.435, de los cuales 7.447.695 son hombres y 7.668.740 son mujeres. ¿Qué porcentaje de la población total corresponde al número de hombres? ¿Y de mujeres?

12. Un equipo de basquetbol escolar ha ganado 4 de los 8 partidos que ha jugado. Si en los próximos 2 encuentros gana, ¿qué porcentaje de partidos habrá ganado?

Aplicaciones del porcentaje en el comercio

EXPLORA

Un comerciante compra una mercadería en $4.800 y luego la vende obteniendo un 12% de ganancia. ¿A qué precio vende la mercadería?

Planteamos la ecuación asociada al precio de venta.

$$\text{Precio venta} = \text{precio de compra} + \text{ganancia}$$

$$\begin{aligned}\text{Precio venta} &= 4.800 + 12\% \cdot 4.800\\ &= 4.800 + \frac{12}{100} \cdot 4.800\\ &= 4.800 + 12 \cdot 48\\ &= 4.800 + 576\\ &= 5.376\end{aligned}$$

Por lo tanto el comerciante vende su mercadería en $5.376 para obtener una ganancia del 12% con respecto al precio que pagó al comprar la mercadería.

Precio de venta:
Precio de compra + ganancia

- Para el vendedor, el 100% corresponde al precio de compra.
- Para el comprador, el 100% corresponde al precio de venta.
- Los precios por ley son números enteros, por lo tanto, cuando sea necesario, el precio debe redondearse al entero más próximo.

PRACTICA

Resuelve los siguientes problemas.

1. Sergio compra un auto cuyo precio es de $4.500.000 y le hacen un descuento del 12%. ¿Cuánto tiene que pagar?
2. Un computador cuesta $630.000 y tiene un descuento del 12%; otro computador similar cuesta $720.000 y tiene un descuento del 15%. ¿Cuál de los dos computadores es más barato?
3. Una distribuidora de café envasa el producto en frascos de 150 g, de 200 g, de 250 g y de 500 g. En una oferta especial lanza al mercado estos mismos envases con un 15% más de contenido. ¿Cuántos gramos de café tendrá cada frasco?
4. La carga máxima que puede transportar un camión es de 8 toneladas. En una fábrica hay 12 vigas iguales cuyo peso total excede en un 35% la carga máxima del camión.
   a. ¿Cuál es el peso en kilos de cada viga?
   b. Si el peso de cada viga se redujera en un 13%, ¿podría transportar el camión todas las vigas en un solo viaje?

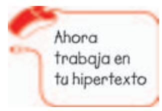
5. Juan se compra una polera en $4.420 a la que se le había aplicado un descuento de un 15%. ¿Cuánto costaba originalmente la polera?

6. En una tienda comercial se hace una liquidación donde todos los productos son rebajados en un 20%. Después de una semana todos los artículos vuelven a rebajarse en un 5%. Si un pantalón costaba originalmente $12.000,

   a. ¿cuánto cuesta después de la primera liquidación?

   b. ¿Cuánto vale después de la segunda liquidación?

   c. ¿La oferta sería igual si originalmente todos los productos hubiesen sido rebajados en un 25%? Explica.



7. Completa la siguiente tabla para analizar los descuentos hechos por una tienda.

Artículo	Precio inicial	% de descuento	Cálculo del descuento	Descuento en $	Total a pagar en $
Blusa	$12.000	10%			
Chaqueta	$15.000	15%			
Pantalón	$11.500	20%			

8. Una lavadora vale $160.000 si se paga al contado. Se puede pagar a crédito en 10 cuotas de $23.200. ¿En qué porcentaje aumenta el precio de la lavadora si se compra a crédito?

9. Un árbol crece aproximadamente un 27% de su longitud en un año. ¿Cuánto crecerá en 4 años si inicialmente mide 50 cm?

10. En los restaurantes se acostumbra dejar una propina equivalente al 10% del valor de lo consumido. Si en un almuerzo la cuenta sumó $40.560, ¿cuánto se debió dejar de propina?

11. ¿Cuál sería una manera rápida de calcular el 10% de $3.890?

12. El mes pasado Macarena pagó por el teléfono $24.010. Este mes Macarena ha pagado un 7% más. ¿Cuánto ha pagado Macarena de teléfono este mes?

13. Después de averiguar entre varios bancos de su ciudad, Alejandra decidió depositar $1.500.000 en el banco "Plata Segura" a 30 días, con una tasa de interés de un 0,51% mensual.

    a. Después de 30 días, ¿cuánto dinero retira? Explica.

El impuesto al valor agregado: IVA

EXPLORA

En Chile, como en otros países, existe un impuesto (IVA) que pagamos cada vez que hacemos alguna compra. Este impuesto lo recibe el Estado y su finalidad es financiar distintos proyectos para el crecimiento del país: educación, salud, vivienda, construcción, etc.
Cada producto tiene un valor neto al cual se le debe agregar el IVA, para obtener el precio total. Actualmente el IVA corresponde al 19% del valor neto. Esto quiere decir, que para obtener el precio total debemos hacer la siguiente operación.

$$\text{Valor neto} + 19\% \bullet \text{valor neto} = \text{Precio total}$$

lo que equivale a:

$$\text{Valor neto} + \frac{19}{100} \bullet \text{valor neto} = \text{Precio total}$$

El SII (Servicio de Impuestos Internos) se asegura el pago de este impuesto a través de documentos específicos, como las boletas de venta y las facturas. En las boletas, el IVA está incluido en el precio, en cambio, en las facturas aparece detallado.

Observa la factura y los resultados obtenidos.

"OSCARITO"
Distribuidora de Artículos Escolares
Av. Los Paltos 387 - Santiago
Fonos 552 66 774 - 552 66 805

R.U.T.: 73.125.321-4
FACTURA
N° 002408
S.I.I. SANTIAGO SUR

Señor(es): Alicia Godoy J.
Dirección: Las Lilas 21
Ciudad: Santiago

Fecha: 8 de octubre 2006
R.U.T.: 8.319.201 - K   Fono: 839 41 65
Guía N°   P.V.:

CANTIDAD	ARTÍCULO	PRECIO UNITARIO	TOTAL
3	Cuadernos matemática 100 hojas	$850	$2.550
2	Cajas de lápices de 12 colores	$600	$1.200

Total Neto: $ 3.750
19% I.V.A.: $ 713
Total: $ 4.463

Santiago, 8 de octubre de 2006

FIRMA

ORIGINAL: CLIENTE

PRACTICA

Resuelve.

1. Completa la siguiente factura y luego responde.

La Regalona
Distribuidora de Abarrotes y Confites
Av. Franklin 2100 - Santiago
Fonos 335 44 664 - 335 44 665

R.U.T.: 82.568.325-K
FACTURA
N° 002408
S.I.I. SANTIAGO SUR

Señor(es): Juan Acevedo Espinoza
Dirección: Av. Américo Vespucio 803
Ciudad: Santiago

Fecha: 12 de noviembre 2006
R.U.T.: 7.568.140 - 2 Fono: 234 567 7
Guía N° P.V.:

CANTIDAD	ARTÍCULO	PRECIO UNITARIO	TOTAL
3	Bolsas de dulces surtidos de 50 unidades	$550	$1.650
2	Paquetes de queso laminado, de 10 láminas	$600	$1.200
1	Paquete de jamón cocido, 15 láminas	$900	$ 900
1	Kg de pan rebanado (30 unidades)	$450	$ 450

Total Neto: $ ________
19% I.V.A: $ ________
Total: $ ________

Santiago, 12 de noviembre de 2006

FIRMA

ORIGINAL: CLIENTE

a. ¿Cuál es el costo de cada kg de pan sin IVA? ________

b. ¿Cuál es el costo de cada dulce sin IVA? ________

c. ¿Cuál será el costo de un paquete de jamón y un paquete de queso sin IVA? ________

d. Si el porcentaje de ganancia que se desea obtener es de un 70%, ¿cuáles serán los precios de venta?

2. En una fábrica se confecciona la siguiente lista con los precios de los artículos que produce:

Artículo	A	B	C	D	E
Precio Unitario (*)	$6.845	$3.428	$4.215	$8.932	$4.550
Precio + IVA					

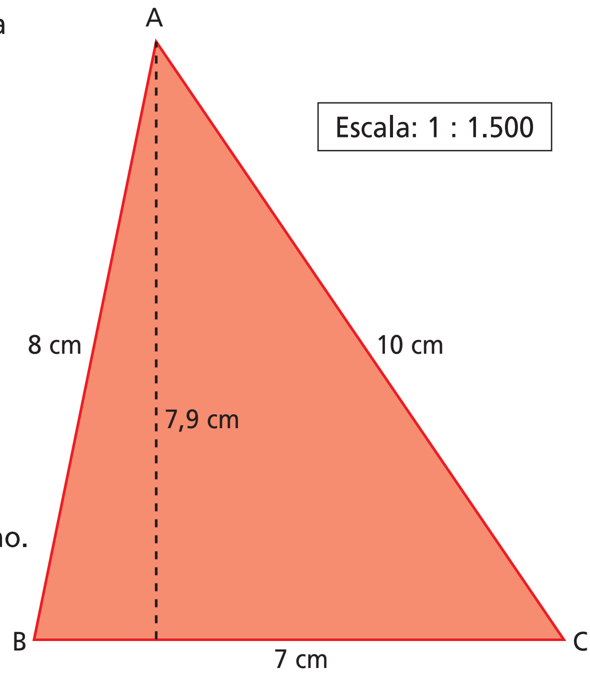
(*) Estos valores no incluyen IVA

Ahora trabaja en tu hipertexto

a. Completa la tabla.
b. Si un cliente desea comprar todos los artículos de la lista, ¿cuánto debe pagar?
c. ¿Es lo mismo sumar los precios de los artículos y a esto calcular el IVA, que calcular el IVA al precio de cada producto y luego sumarlos?

Más problemas

Un terreno tiene forma triangular y sus medidas a escala son las que aparecen en el dibujo. ¿Cuánto se obtiene por la venta si el precio del metro cuadrado es de 6 UF?



Comprender

¿Qué sabes del problema?

El terreno tiene una forma triangular.

Los lados miden 8 cm, 10 cm, 7 cm y la altura 7,9 cm en una escala 1 : 1.500.

El precio de un metro cuadrado es de 6 UF.

¿Qué debes obtener?

La cantidad de dinero que se obtiene al vender el terreno.

Planificar

¿Cómo resolver el problema?

En muchos problemas tendrás que identificar el tipo de problema del que se trata. Es común confundir si se trata de calcular el perímetro o el área. En este caso se trata del área ya que nos hablan de metros cuadrados.
Transformar las medidas del plano a medidas reales.
Calcular el área de la figura a partir de las medidas de la base y de la altura.

Resolver

Medidas reales: 8 cm • 1.500 = 12.000 cm = 120 m
10 cm • 1.500 = 15.000 cm = 150 m
7,9 cm • 1.500 = 11.850 cm = 118,5 m
7 cm • 1.500 = 10.500 cm = 105 m

Área del terreno: $105 \cdot \frac{118,5}{2} = 6.221,25 \text{ m}^2$

Precio del terreno: 6.221,25 • 6 UF = 37.327,5 UF

Para obtener el resultado en pesos habría que saber el precio de la UF actual.
Te lo dejamos como tarea.

Revisar

Una manera de revisar tu resultado es resolver el problema de otra manera. Por ejemplo, calcula el área del triángulo sin hacer las transformaciones de la escala. Para obtener el resultado final tendrás que usar la escala. ¿Se obtiene el mismo resultado?

1. Para hacer un club deportivo se ha comprado una parcela triangular cuyos lados miden 300 m, 375 m y 362 m. Si el precio de un metro de alambre cuesta $300, ¿cuánto cuesta cercar la parcela si se deben hacer 4 pasadas de alambre?

Comprender

¿Qué sabes del problema?

¿Qué debes obtener?

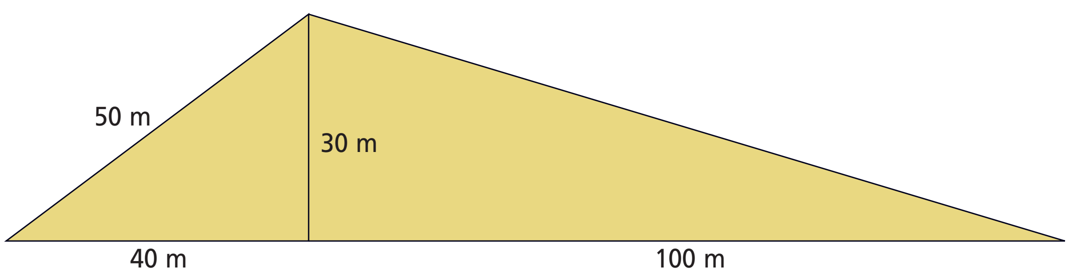
Planificar

¿Cómo resolver el problema?

Resolver

Revisar

2. ¿Cuánto cuesta el terreno de la figura si el metro cuadrado cuesta $17.800?



Cálculo mental

Calcula mentalmente los siguientes porcentajes.

1. El 10% de 570
2. El 8% de 800
3. El 10% de 160
4. El 5% de 500
5. El 7% de 100
6. El 15% de 100
7. El 20% de 400
8. El 5% de 100
9. El 10% de 1.000

Completa.

10. 50 es el 10% de ______________
11. 10 es el 1% de ______________
12. 200 es el 10% de ______________
13. 5 es el 5% de ______________
14. 4 es el 40% de ______________
15. 10 es el 100% de ______________
16. 15 es el 10% de ______________
17. 25 es el 50% de ______________
18. 30 es el 30% de ______________
19. 20 es el 40% de ______________

Verifica mentalmente las siguientes afirmaciones. Corrige las erradas.

20. El 1% de 800 es 64
21. El 10% de 5.870 es 587
22. El 5% de $\frac{1}{500}$ es 1
23. El 30% de 300 es 90
24. El 25% de 100 es 25

Uso de la calculadora

La calculadora es muy útil cuando queremos conocer el precio de un producto después de un descuento o después de un alza.
Si a $3.500 le queremos restar 15% de un descuento, la secuencia es la siguiente:

3 5 0 0 × 1 5 % − = ▶ 2.975

Si el precio, por ejemplo, de un litro de bencina es $550 y sube en un 18%, tendríamos:

5 5 0 × 1 8 % + = ▶ 649

Calcula el precio de cada producto descontándole un 12%.

1. 150.000
2. 238.500
3. 128.000
4. 327.400
5. 423.729
6. 3.500.000

Calcula el precio de cada producto agregándole un 26% de aumento.

7. 329.700
8. 432.880
9. 127.731
10. 550.125
11. 632.000
12. 1.050.700

Síntesis

1. Una **razón** entre dos cantidades es el cociente entre ellas.

2. Una **proporción** es una igualdad entre dos o más razones.

3. **Propiedad fundamental de las proporciones**: en toda proporción se cumple que

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c}$$

4. Si la razón entre dos variables se mantiene constante estas **variables son proporcionales.** De lo contrario se dicen que son **variables no proporcionales**.

5. Una relación entre dos variables se puede modelar por una ecuación, de manera que a cada valor de x le corresponde un único valor de y. Se le llama **variable dependiente** a la **variable y**, ya que su valor depende de la **variable x**, que es la **variable independiente**.

6. Dos magnitudes están en proporción **directa** si el cociente entre ellas se mantiene constante. Además, al aumentar o disminuir una de ellas en cierto número de veces, la otra aumenta o disminuye, respectivamente, en la misma razón.

7. Dos magnitudes están en proporción **inversa** si el producto entre ellas se mantiene constante. Además, al aumentar o disminuir una de ellas en cierto número de veces, la otra aumenta o disminuye, respectivamente, en la misma razón.

8. Si dos figuras tienen exactamente la misma forma y conservan las mismas proporciones aunque sus tamaños sean distintos, diremos que son **semejantes.** Cada uno de los segmentos asociados a ellas (lados, alturas, diagonales, etc.) están en una misma razón.

9. Se llama **escala** a la razón entre la medida de un plano, un mapa o dibujo y su valor real. La escala se representa como el cociente entre la distancia sobre el plano o mapa y la distancia real.

10. **Porcentaje**: es un caso particular de proporcionalidad directa, se puede interpretar como una comparación por cociente entre dos cantidades con respecto a una razón cuyo denominador es 100.

11. El **IVA** corresponde al 19% del valor neto de un determinado producto. Para obtener el precio total realizamos el siguiente procedimiento:

$$\boxed{\text{Precio total} = \text{Valor neto} + 0{,}19 \cdot \text{valor neto}}$$

En tu cuaderno realiza un mapa conceptual que relacione **al menos** los conceptos dados a continuación: razón; proporción; proporción directa; proporción inversa; porcentaje.

Evaluación

1. Si un auto viaja a una velocidad de 85 km/h, ¿cuántos kilómetros habrá recorrido en 4 horas?

A. 320 km
B. 330 km
C. 340 km
D. 350 km

2. En una florería el precio de cada rosa es de \$1.200. ¿Cuánto cuestan 8 rosas?

A. \$8.600
B. \$9.600
C. \$9.660
D. \$10.600

3. Según la pregunta anterior, la variable "precio", ¿a qué tipo de variable corresponde?

A. Variable dependiente.
B. Variable independiente.
C. A y B
D. Ninguna de las anteriores.

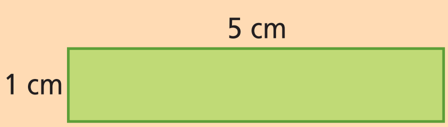
4. Si 5 pintores logran pintar una casa en dos días, ¿cuántos días se demorarán 10 pintores?

A. 4
B. 3
C. 2
D. 1

5. Si 1.000 g de manjar se pueden envasar en 4 frascos de 250 g, ¿cuántos frascos de 100 g son necesarios para envasar 1.000 g de manjar?

A. 8
B. 10
C. 15
D. 25

6. ¿En qué razón están los lados del rectángulo?



A. 1 : 4
B. 1 : 5
C. 5 : 6
D. 1 : 6

7. Un mapa está trazado a una escala de 1 cm :1.000 km. Si la distancia entre una ciudad A y B es de 7,8 cm, ¿cuál es la distancia real?

A. 780 km
B. 7.800 km
C. 7.800 cm
D. 78 km

8. El 20% de 5.000 es:

A. 100
B. 500
C. 1.000
D. 2.000

9. En un curso, el 40% de los alumnos reprobó el examen. Si el curso es de 45 alumnos, ¿cuántos alumnos aprobaron?

A. 18
B. 20
C. 21
D. 27

10. Si a un vestido le descontamos el 10% de su valor, este cuesta \$12.500. ¿Cuál es el precio del vestido **sin el descuento**?

A. 13.989
B. 13.900
C. 13.889
D. 13.880

11. 30 es el 40% de:

A. 300
B. 75
C. 12
D. 6

12. El 30% de 3 es igual a:

A. Al 100% de 3
B. Al 3% de 30
C. Al 100% de 90
D. 90

Lee atentamente y responde.

1. Juan invirtió en un banco $550.000 que le darán una ganancia de 0,1% mensual. ¿Cuánto ganará después de un mes?

2. Un producto cuesta $20.500 con IVA incluido. ¿Cuál es el valor del producto sin IVA?

3. Un producto cuesta $240.000 sin IVA. ¿Cuál será el precio del producto al agregarle el IVA?

Ahora trabaja en tu hipertexto

¿Cómo trabajé?

Marca según tu apreciación	No lo entendí	Lo entendí	Puedo explicarlo
Razones y proporciones			
Proporcionalidad directa			
Proporcionalidad inversa			
Semejanza y proporcionalidad			
Trazar e interpretar mapas de acuerdo a una escala			
Cálculo de porcentajes			

UNIDAD

9 Tratamiento de la información

Necesitas recordar

Lee atentamente y resuelve.

1. Los siguientes datos corresponden a las notas obtenidas por los alumnos de un curso en una prueba de Matemática.

3	3	4	4	5
5	5	5	5	5
6	6	6	6	7

¿Cuántas veces se repitió cada nota? Completa la siguiente tabla de frecuencias.

Nota	Frecuencia absoluta
3	2
4	
5	
6	
7	

2. Escribe en tu cuaderno lo que entiendes por:

a. Media aritmética
b. Mediana
c. Moda

3. Con los datos de la prueba anterior calcula:

a. La media aritmética
b. La mediana
c. La moda

Ahora trabaja en tu hipertexto

¿Qué aprenderás?

- A obtener información a partir de un conjunto de datos.
- A trabajar con las medidas de tendencia central.
- A interpretar distintos tipos de gráficos.
- A interpretar información contenida en tablas.
- A analizar encuestas.

Resuelve

1. Una profesora y dos de sus alumnos están buscando información en el INE (Instituto Nacional de Estadísticas) del último censo realizado en el país, acerca de la cantidad de habitantes pertenecientes a algunos grupos étnicos. Los datos corresponden a personas entre 10 y 14 años.

Grupo étnico	Frecuencia absoluta
Alacalufe	261
Atacameño	1.958
Aimara	4.743
Colla	287
Mapuche	61.244

Fuente: www.ine.cl

Observa los datos y responde.

a. ¿Cuántas personas componen el total de etnias observadas?

b. ¿Cuál es la moda de etnias indígenas para el grupo entre 10 y 14 años?

c. ¿Es correcto afirmar que la mayoría de los habitantes es de la etnia atacameña o aimara?

Ahora trabaja en tu hipertexto

d. Construye un gráfico según la tabla.

Uso adecuado de Internet

Hoy en día Internet es una herramienta muy útil que te puede ayudar en tus tareas, en el conocimiento de otras culturas y también para conversar con tus amigos.

- Gracias a la web puedes estar en contacto con niños de todas las regiones. ¿Cuál es tu opinión al respecto?
- ¿Cuántos computadores hay en tu escuela? ¿Todos tienen acceso a Internet?
- Haz una tabla con la lista de tus compañeros y registra la información respecto a: ¿Quiénes tienen Internet en sus casas? ¿Quiénes tienen computador pero sin conexión a la red?

Interpretación de gráficos

EXPLORA

Valeria pasó el último fin de semana haciendo una tarea que consistía en averiguar las edades de los niños que viven en su edificio. La información que obtuvo la representó de distintas maneras.

1 Edades de los niños del edificio

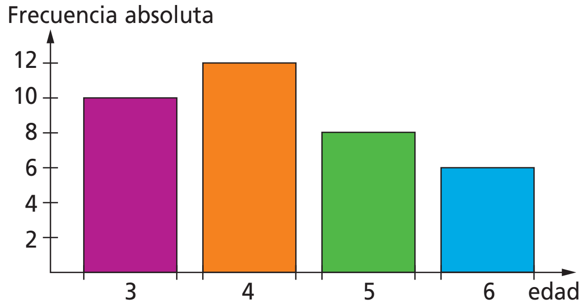


Gráfico de barras

2 Sexo de los niños del edificio

Pictograma

3 Edad de los niños del edificio

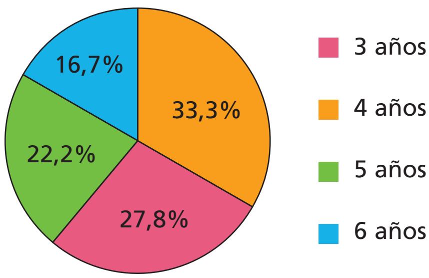
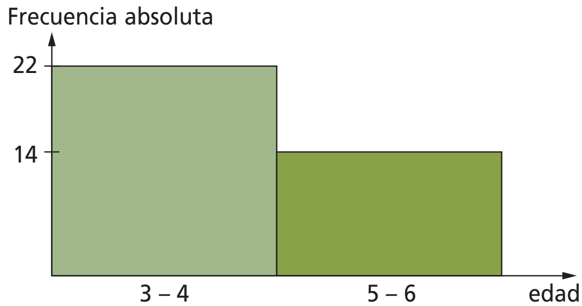


Gráfico circular

4 Edad de los niños del edificio



Histograma

¿Puedes descifrar lo que Valeria trata de explicarnos?

Gráfico de barras: se usa para representar la distribución de frecuencias de variables. Cada categoría se representa por una barra cuyo largo indica la frecuencia o el número de casos pertenecientes a ella.

Pictograma: utiliza una figura proporcional a la frecuencia. Generalmente se emplea para representar variables cualitativas.

Gráfico circular: divide un círculo en sectores circulares proporcionales a la frecuencia que se quiere dar a conocer. Es útil cuando se necesita representar porcentajes.

Histograma: gráfico usado para datos agrupados en intervalos, formado por barras contiguas en el cual la frecuencia está representada por un área. Esta área está determinada por el ancho y la altura de la barra. El ancho representa un intervalo que comprende muchos valores de la variable. La altura representa la frecuencia del mismo intervalo. El área de cada rectángulo representa la frecuencia del intervalo respectivo.

Recuerda:

Al construir un gráfico debes ser cuidadoso con la forma en que entregas la información: Colocar un título, poner nombres a los ejes, citar tu fuente y cuidar que la escala en la que trabajaste sea proporcional dentro de ese gráfico y entre todos los gráficos. Así, todos podrán entender lo que quieres informar.

PRACTICA

Lee atentamente y resuelve.

1. En un curso de 8° año, un profesor preguntó a sus alumnos cuántos hermanos tenían. Las respuestas fueron las siguientes:

2	1	0	1	1	3	2	2	4	3
2	1	1	1	0	2	1	2	3	5

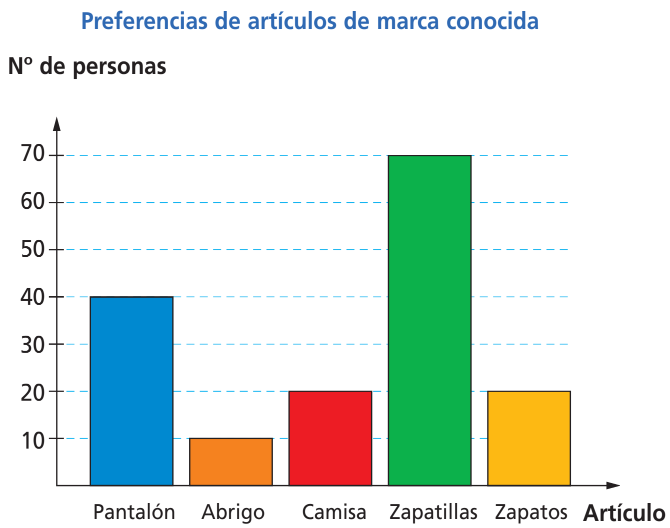
Basándote en la información, construye en tu cuaderno:

a. Un gráfico de barras.
b. Un gráfico circular.
c. Un histograma, para esto, agrupa las frecuencias de la siguiente forma: 0 y 1, 2 y 3, 4 y 5.

2. ¿Qué tipo de gráficos realizarías para representar cada una de las siguientes situaciones?

a. El porcentaje de computadores vendidos durante los últimos 10 años.
b. Las comidas preferidas por un grupo de personas.
c. El número de aviones que salen de un aeropuerto entre las 7.00 y 21.00 horas.

3. Observa el siguiente gráfico y responde las preguntas relacionadas.



Fuente: Tienda "Las Ofertas"

a. ¿Cuántas personas más prefieren comprar pantalones de marca conocida que abrigos?

b. ¿Cuántas personas menos prefieren comprar camisas de marca conocida que zapatillas?

Interpretación de tablas

EXPLORA

La siguiente tabla muestra el número de primos que tienen los alumnos de los octavos años de un colegio.

Intervalo (i)	Nº de primos	Nº de alumnos
1	1 - 5	2
2	6 - 9	9
3	10 - 13	16
4	14 - 17	20
5	18 - 21	9
6	22 - 25	5
7	26 - 29	4
8	30 - 33	2
	Total encuestados	**67**

Al observar esta tabla puedes deducir que en el intervalo 2 (o categoría 2) hay 9 alumnos que tienen entre 6 y 9 primos. ¿Qué puedes deducir del intervalo 6?

También puedes observar que si sumas el número de alumnos de los intervalos 1, 2 y 3, hay 27 alumnos que tienen 13 primos o menos. Este valor corresponde a la frecuencia absoluta acumulada hasta ese intervalo.

Si le preguntas a un alumno cualquiera de 8º año sobre sus primos, ¿cuál es la probabilidad que ese alumno tenga entre 26 y 29 primos?

La probabilidad de pertenecer a una categoría está dada por su frecuencia absoluta dividida por el total de observaciones.

$$4 : 67 \approx 0{,}06$$

Si multiplicamos este resultado por 100, obtienes que la probabilidad de tener entre 26 y 29 primos es igual a un 6%. Esta es la frecuencia relativa.

Ahora, la probabilidad de tener 9 primos o menos es igual a la suma de frecuencias absolutas hasta 9, dividido en el total:

$$\frac{2 + 9}{67} \approx 0{,}16$$

Es decir, un 16% de los alumnos tiene 9 primos o menos. Llamamos a ese valor frecuencia relativa acumulada.

La frecuencia absoluta acumulada en el intervalo i es la suma de las frecuencias absolutas observadas hasta el intervalo i. Se escribe Fi.

La frecuencia relativa de la categoría i corresponde a la probabilidad de pertenecer a esa categoría. Lo calculamos dividiendo fi en el total. Denotamos este valor por hi.

La frecuencia relativa acumulada en la categoría i, es la probabilidad de observar un valor menor o igual al mayor valor que toma la variable en estudio en ese intervalo. Lo calculamos dividiendo Fi por el total y denotamos este valor por Hi.

PRACTICA

Lee atentamente y resuelve.

1. Continúa la tabla en tu cuaderno y complétala según los valores de la tabla anterior.

Intervalo	Nº de primos	fi	Fi	hi	Hi
1	1 - 5	2	2	3%	3%
2	6 - 9	9	11	13%	16%
3	10 - 13	16	27	24%	40%

Ahora trabaja en tu hipertexto

2. Una encuesta referida al día que elige una persona para ir al cine dio los siguientes resultados. Completa la tabla.

Día	Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Lunes	5			
Martes	7			
Miércoles	10			
Jueves	2			
Viernes	13			
Sábado	14			
Domingo	8			
	Total encuestados			

a. ¿Cuántas personas prefieren ir al cine los fines de semana? ▶ ____________

b. ¿Cuántas personas prefieren ir al cine de lunes a jueves? ▶ ____________

c. ¿Qué porcentaje prefiere ir al cine de lunes a viernes? ▶ ____________

d. ¿Qué porcentaje prefiere ir al cine los fines de semana? ▶ ____________

e. ¿Qué día es el preferido para ir al cine? ¿Qué porcentaje del total de encuestados manifiesta esta preferencia? ▶ ____________

f. ¿Cuántas personas, como promedio, van al cine cada día? Explica cómo lo calculas.

____

____

La siguiente tabla nos muestra las mediciones de la calidad del aire realizadas en algunas comunas de la ciudad de Santiago.

Calidad de aire	
Independencia	118
La Florida	93
Las Condes	34
Santiago Sur	151
Pudahuel	304
Cerrillos	153
El Bosque	218

0 - 100	Bueno
101 - 200	Regular
201 - 300	Malo
301 - 400	Crítico
401 - 500	Peligroso

Fuente: www.emol.com, 2008

De acuerdo a los datos presentados en la tabla, completa la siguiente tabla de frecuencias y luego responde:

Nivel		Frecuencia absoluta	Frecuencia absoluta acumulada	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa acumulada
Bueno	0 - 100				
Regular	101 - 200				
Malo	201 - 300				
Crítico	301 - 400				
Peligroso	401 - 500				

3. ¿Cuántas comunas tienen una calidad del aire regular?
4. ¿Cuáles son las comunas que tienen una calidad del aire regular?
5. ¿Cuántas y cuáles son las comunas que tienen una calidad del aire bueno?
6. ¿Cuáles son las comunas que tienen una calidad del aire que se encuentre en el intervalo 301 – 400?
7. ¿Cuántas comunas tienen un nivel regular o bueno?
8. ¿Cuántas comunas tienen un nivel malo o crítico?
9. ¿Cuántas comunas tienen como medición menos o igual al nivel 300?
10. ¿Cuántas comunas tienen como medición más que el nivel 300?
11. ¿Cómo se interpreta la frecuencia absoluta acumulada 5?
12. ¿Cómo se interpreta la frecuencia absoluta acumulada 6?
13. ¿Cómo se interpreta la frecuencia relativa $\frac{2}{7}$?

Construcción de tablas para datos agrupados

APRENDE

Si el conjunto de datos que se recolecta es muy numeroso, o bien, si el **rango** (diferencia entre el mayor y menor valor de una variable) es muy amplio, es usual presentarlos agrupados y ordenados en **intervalos** (rango de valores).

Tamaño de intervalo
El tamaño de cada intervalo se puede calcular dividiendo el valor del rango por la cantidad de intervalos que se desean obtener.

Ejemplo
Un grupo de 20 pacientes entre 40 y 50 años se realizaron un examen para medir su nivel de colesterol (en mg/dl).
Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

184	207	194	174	Menor valor
185	206	200	177	
181	195	199	175	
184	198	191	202	
199	206	218	228	Mayor valor

Como se puede observar, los valores de la variable de estudio (nivel de colesterol) presentan un rango amplio (174 a 228). Por lo tanto, agruparemos los datos en 6 intervalos de tamaño 9, ya que:

$\frac{228 - 174}{6} = \frac{54}{6} = 9$. Luego, cada intervalo es de amplitud 9 (tamaño del intervalo).

La tabla de frecuencias correspondiente es:

Nivel de colesterol	F. absoluta	F. acumulada	F. relativa
170 - 179	3	3	3/20
180 - 189	4	7	4/20
190 - 199	6	13	6/20
200 - 209	5	18	5/20
210 - 219	1	19	1/20
220 - 229	1	20	1/20

Con este tipo de tabla preguntas como:

- ¿Cuántos pacientes tienen una medición entre 180 mg/dl y 189 mg/dl?
  4 pacientes (utilizamos la f. absoluta)
- ¿Cuántos pacientes tienen mediciones menores o iguales que a 199 mg/dl?
  13 pacientes (utilizamos la f. acumulada)
- ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente tenga una medición entre 200 mg/dl y 209 mg/dl?
  $\frac{5}{20} \approx$ 0,25. Es decir, tiene una probabilidad de 25% (utilizamos la f. relativa).

Media aritmética y moda para datos agrupados

EXPLORA

La siguiente tabla de distribución de frecuencias muestra la puntuación obtenida por 1.500 alumnos de 5º a 8º Básico en un cuestionario acerca de lo que significa el Bicentenario en nuestro país.

Categoría	Muy Bajo	Bajo	Regular	Bueno	Muy Bueno	Sobresaliente
Puntaje	0 -10	11 - 21	22 - 32	33 - 43	44 - 54	55 - 65
Frecuencia absoluta	350	400	420	200	80	50

¿Cuál es el promedio de puntaje obtenido en el cuestionario por los alumnos?

Para calcular el **promedio de una tabla para datos agrupados**, se busca un representante de cada intervalo o clase. Este representante es el promedio de los extremos del intervalo y se conoce como **marca de clase.** Observa y verifica los valores obtenidos:

Categoría	Muy Bajo	Bajo	Regular	Bueno	Muy Bueno	Sobresaliente
Puntaje	0 -10	11 - 21	22 - 32	33 - 43	44 - 54	55 - 65
Marca de clase	5	16	27	38	49	60
Frecuencia absoluta	350	400	420	200	80	50

Luego, el promedio se calcula sumando los productos de cada marca de clase por su frecuencia absoluta respectiva (cantidad de alumnos), y dividiendo por el total de alumnos

$$\frac{5 \bullet 350 + 16 \bullet 400 + 27 \bullet 420 + 38 \bullet 200 + 49 \bullet 80 + 60 \bullet 50}{1.500} = \frac{34.010}{1.500} = 22{,}67$$

Luego, el promedio es 22,67. ¿Es razonable el valor obtenido?
Observamos que la mayor cantidad de alumnos se da en el intervalo 22 – 32 (categoría “regular”). Como el promedio obtenido se encuentra dentro de este rango, podemos decir que es bastante adecuado para representar un valor central en torno al cual se concentran la mayoría de los alumnos del curso. Puedes verificar que el 50% de los alumnos se concentraron entre los intervalos “Muy bajo” y “Bajo”.

Para calcular la media aritmética ($\overline{x}$) para datos agrupados, sumamos todos los productos de cada marca de clase con la frecuencia absoluta respectiva y esta suma se divide por el número total de datos.

$$\overline{x} = \frac{\text{suma (marca de clase} \bullet \text{frecuencia absoluta)}}{\text{total de datos}}$$

En cursos anteriores, dado un grupo de datos no agrupados aprendimos a obtener la moda.
Ahora aprenderemos a obtener la moda para datos agrupados. Podemos seguir los siguientes pasos:

1º Identificar cuál es el intervalo en donde se encuentra la mayor frecuencia absoluta, a este intervalo le llamaremos intervalo modal. En nuestro ejemplo, el intervalo modal corresponde a 22 – 32, con una frecuencia de 420 alumnos.
2º Identificar las frecuencias absolutas del intervalo anterior y posterior al intervalo modal. En el ejemplo, el intervalo anterior corresponde a 11 – 21 con una frecuencia de 400 alumnos, y el intervalo posterior a 33 – 43, con una frecuencia de 200 alumnos.
3º Obtener diferencia de la frecuencia del intervalo modal y la frecuencia de clase anterior (d_1). Entonces tenemos, 420 – 400 = 20.
4º Obtener diferencia de la frecuencia del intervalo modal y la frecuencia de clase posterior (d_2). Entonces tenemos, 420 – 200 = 220.
5º Obtener el tamaño de los intervalos (**t**: debe ser constante). El tamaño de los intervalos es 10.
6º Obtener el número que representa el extremo inferior de la clase modal **(L_i)**. En el ejemplo, corresponde a 22.

Luego, el cálculo de la moda (Mo) está dado por la expresión:

$$Mo = L_i + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \bullet t$$

En el ejemplo, el valor aproximado de la moda corresponde a 23, ya que:

$$Mo = 22 + \frac{20}{20 + 220} \bullet 10 = 22,8$$

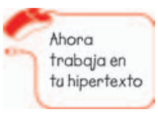
Esto significa que una estimación del puntaje más obtenido por los alumnos es de 23 puntos.

PRACTICA

Dadas las siguientes situaciones, obtén el valor de la media aritmética y la moda, respectivamente. Luego, responde.

1. En una empresa las edades del personal se resumen en la siguiente tabla.

Edades	Frecuencia absoluta	Marca de clase
20 - 25	25	
26 - 31	30	
32 - 37	45	
38 - 43	40	
44 - 49	50	



2. La tabla de frecuencias muestra el promedio que obtuvieron los alumnos de un curso, en matemática.

Notas	Frecuencia absoluta	Marca de clase
2,0 - 2,9	2	
3,0 - 3,9	6	
4,0 - 4,9	11	
5,0 - 5,9	10	
6,0 - 7,0	6	

Análisis de encuestas

EXPLORA

Un grupo de alumnos de un colegio decide realizar un trabajo de investigación sobre los hábitos deportivos de los alumnos. Para asegurarse de obtener buenos resultados, se hacen asesorar por su profesor de matemática, quien les da la pauta para diseñar una buena encuesta y poder sacar conclusiones de ella.

1. Establecer el objetivo del estudio y a quién estará dirigido.

- Objetivo: Investigar sobre los hábitos deportivos de los alumnos: si hacen ejercicio todos los días, cuánto tiempo, sus actividades preferidas, lugar donde las realizan, etc.
- A quiénes está dirigido: El objeto de estudio de la investigación serán los 1.200 alumnos del colegio "Puerto de Palos" que conforman la **población**. Si de ellos se toma una parte que represente los intereses de todos, a esa fracción la llamamos **muestra**. En este caso, la muestra es igual al 10% de la población. Para asegurarnos de la representatividad de la muestra y disminuir lo más posible los errores, se encuestará, al azar, a 120 alumnos, durante el recreo.

2. Plantear un cuestionario que responda a los objetivos del estudio, junto a las posibles respuestas.

a. Edad.
b. Sexo.
c. ¿Cuánto tiempo haces ejercicios?
d. ¿En qué lugar haces ejercicio?
e. ¿Cuáles son tus actividades deportivas preferidas? Dar una lista.

3. Recolección de la información en tabla de frecuencias.

Distribución de alumnos por edad

Edad	fi	Fi	hi	Hi
9 o menos	22	22	18%	18%
9 - 12	17	39	14%	32%
12 - 15	39	78	33%	65%
15 y más	42	120	35%	100%

Distribución por sexo

Sexo	fi	hi
Niños	58	48%
Niñas	62	52%

¿Haces ejercicio todos los días?

Respuesta	fi	hi
Sí	96	80%
No	24	20%

Alumnos que ejercitan todos los días. ¿Cuánto tiempo?

Tiempo	fi	Fi	hi	Hi
0 - 10 min	20	20	21%	21%
10 - 20 min	29	49	30%	51%
20 - 30 min	31	80	32%	83%
30 o más	16	96	17%	100%

Alumnos que no ejercitan todos los días. ¿Cuándo lo hacen?

Respuesta	fi	hi
Sólo en el colegio	4	17%
Fines de semana	20	83%

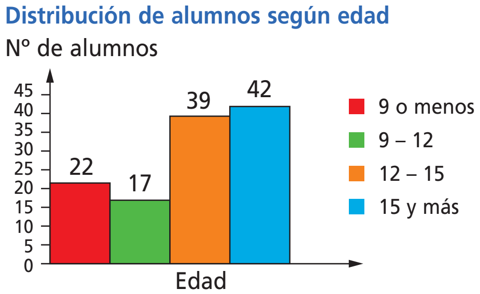
Lugar donde realiza deportes

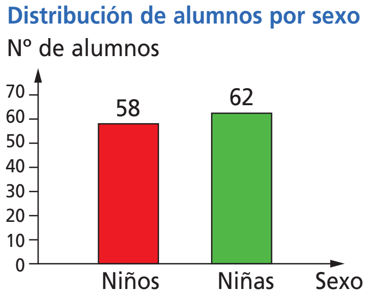
Lugar	fi	hi
Casa	36	30%
Parque	18	15%
Gimnasio	6	5%
Colegio	60	50%

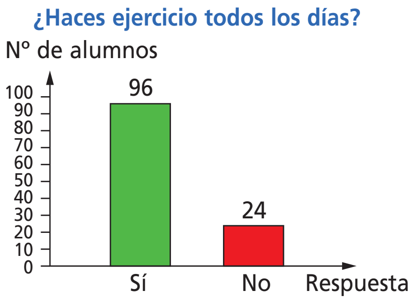
Actividad deportiva preferida

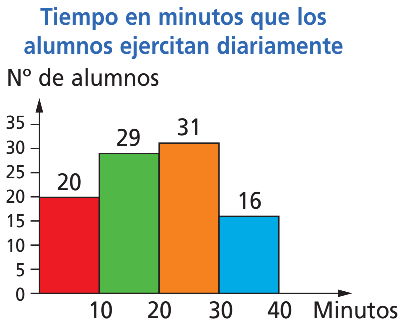
Actividad	fi	hi
Andar en bicicleta	48	40%
Jugar fútbol	36	30%
Trotar	12	10%
Nadar	24	20%

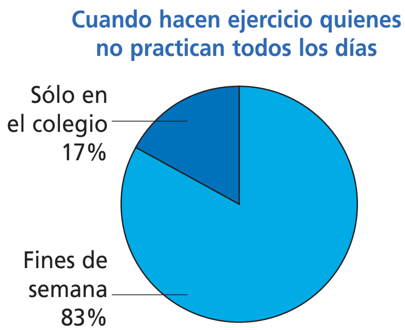
4. Representar la información en gráficos e interpretarlos.

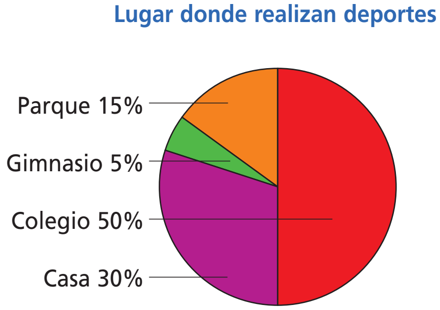


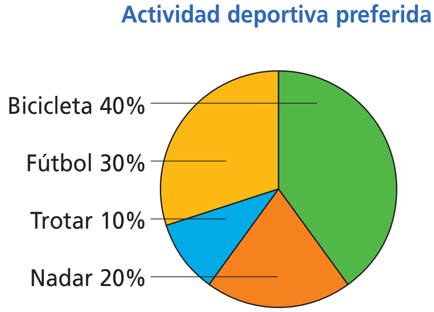












Interpretación: La muestra estaba compuesta por un 48% de niños y un 52% de niñas. La mayor parte de los alumnos encuestados es mayor de 12 años. El 80% de los alumnos dice hacer ejercicios todos los días. De ellos, el 50% hace menos de 20 minutos diarios. Entre quienes no hacen deportes todos los días, el 83% lo deja para los fines de semana. El valor de la moda expresa que el colegio es el lugar donde más practican deporte (40%) y la actividad preferida por los alumnos es andar en bicicleta.

5. Presentamos las conclusiones.

La mayor parte de los alumnos hace ejercicios todos los días, de ellos, casi la mitad se ejercita durante más de 20 minutos diarios.

De quienes no hacen ejercicio todos los días, la mayor parte dijo practicar deportes los fines de semana.

El lugar donde más hacen deportes es en el colegio y la actividad preferida por los alumnos es andar en bicicleta.

Análisis de encuestas

Pasos para realizar una encuesta:

1. Establecer objetivos, población (conjunto de elementos que son objeto de estudio) y muestra (parte representativa de la población).
2. Plantear un cuestionario que responda a los objetivos del estudio.
3. Recolectar la información en tablas de frecuencias.
4. Representar la información en gráficos e interpretarlos.
5. Presentar las conclusiones.

PRACTICA

Lee atentamente y resuelve.

1. Los siguientes resultados fueron obtenidos del Estudio Nacional de Opinión Pública Número 44 "Mujer, familia y valores" (Centro de Estudios Públicos, diciembre 2002) y se refieren a la tasa de participación laboral femenina. Observa las tablas y responde las preguntas relacionadas.

A. Tasa de participación laboral femenina por grupos de edad.

Grupos de edad (años)	% de participación dentro de su grupo
18 - 24	37%
25 - 34	55%
35 - 54	58%
55 y más	14%

B. Tasa de participación laboral femenina según zona.

Zona	Tasa
Urbana	46%
Rural	22%

C. Tasa de participación laboral femenina según años de educación.

Años de educación	Tasa
0 - 3 años	19%
4 - 8 años	34%
9 - 12 años	46%
13 años y más	61%

D. Tasa de participación laboral femenina de mujeres con hijos y sin hijos.

Tasa de participación	Tasa
Con hijos	41%
Sin hijos	48%

a. ¿Cuál es el grupo de edad que muestra una mayor participación laboral? Explica.

Completa con verdadero o falso según los datos anteriores.

2. ______ Las mujeres que viven en zonas rurales tienen menor participación laboral que quienes viven en zonas urbanas.

3. ______ Las mujeres que tienen estudios por sobre los secundarios tienen mayor participación laboral que aquellas con un menor nivel de estudios.

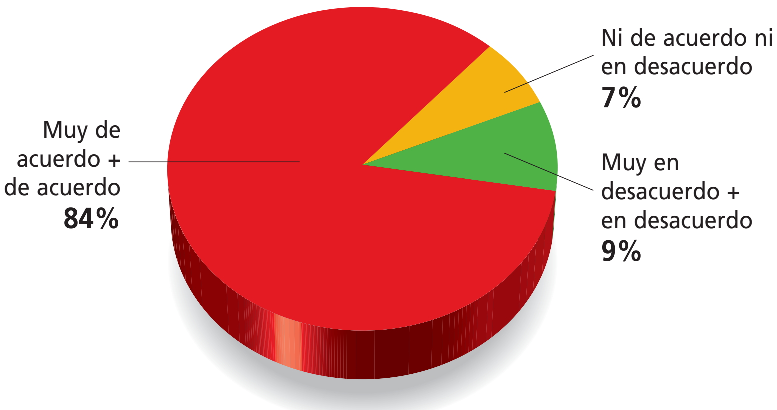
4. ______ Más de la mitad de las mujeres que no tienen hijos no trabaja.

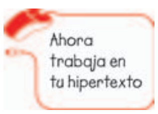
5. ______ La relación entre la cantidad de años de estudio y la tasa de participación laboral es aparentemente positiva.

EN EQUIPO

Lee y responde.

6. El siguiente gráfico refleja las respuestas de una encuesta en que se preguntó: ¿Cuán de acuerdo está usted con la siguiente afirmación: "ambos, el hombre y la mujer, deben contribuir al ingreso familiar"?





(fuente: CEP, Encuesta Nacional de Opinión Pública, diciembre 2002)

a. ¿Qué significa que el 9% de la muestra haya respondido "Muy en desacuerdo"?

____

b. Si 135 personas contestaron "Muy en desacuerdo", ¿cuántas personas en total contestaron la encuesta? ______________

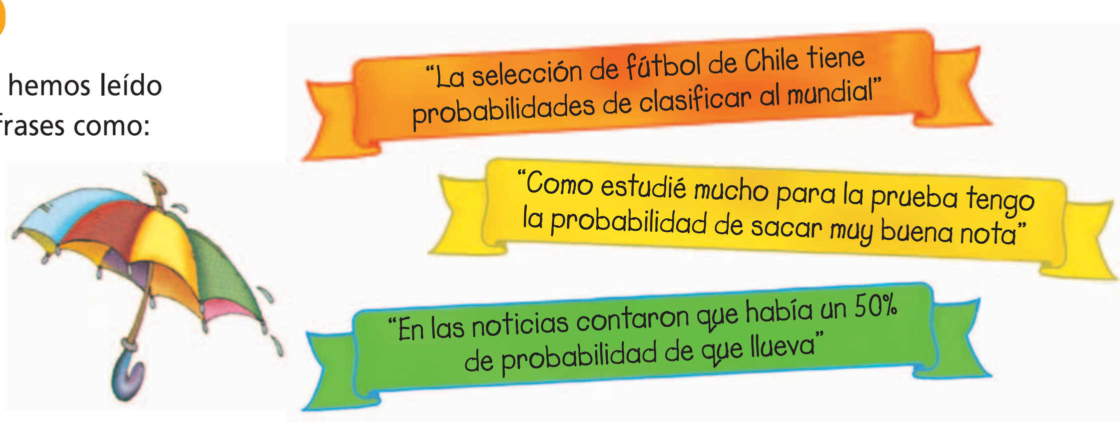
c. ¿Cuántas dijeron estar "Ni de acuerdo ni en desacuerdo"? ______________

d. Ordenen la información en una tabla de frecuencias.
e. Grafiquen la información en un gráfico circular. ¿Se asemeja al gráfico anterior?
f. Si ahora quisiéramos graficar las frecuencias absolutas de cada alternativa, ¿cuál es el gráfico más adecuado? Dibújenlo.

La probabilidad

EXPLORA

Muchas veces hemos leído o escuchado frases como:



Todas las frases anteriores poseen cierto grado de incertidumbre respecto a su ocurrencia, pues no sabemos con certeza lo que puede suceder. Sin embargo, es posible medir ese azar a través de la asignación de probabilidades.

Para conocer las probabilidades tenemos que revisar algunos conceptos básicos.

Conceptos básicos de probabilidad

Experimentos determinísticos: en este tipo de experimentos se conoce de antemano el resultado. Por ejemplo, se sabe de antemano que al mezclar témperas de color amarillo y rojo, en las proporciones adecuadas, resulta el color naranja.

Experimentos aleatorios: en este tipo de experimentos no se conoce de antemano el resultado, pero se puede predecir con certeza dicho resultado. Por ejemplo, al extraer una carta de un mazo, no se sabe que carta podría salir, pero se puede predecir la probabilidad de que salga una carta determinada.

Espacio muestral (Ω): corresponde al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

Suceso o evento elemental: corresponde a cada uno de los resultados de un experimento. Un evento puede ser:

- Evento seguro: coincide con el espacio muestral y es un evento que siempre ocurre.
- Evento imposible: es un evento que nunca ocurre.
- Evento mutuamente excluyentes: son dos eventos que no pueden suceder simultáneamente.

Ejemplo

Si se lanza una moneda al aire, se puede obtener cara o sello. Luego, el experimento es aleatorio, su espacio muestral es Ω = {cara, sello}, los sucesos elementales son: cara y sello y son eventos mutuamente excluyentes, porque no puede suceder que al lanzar una moneda salga cara y sello a la vez.

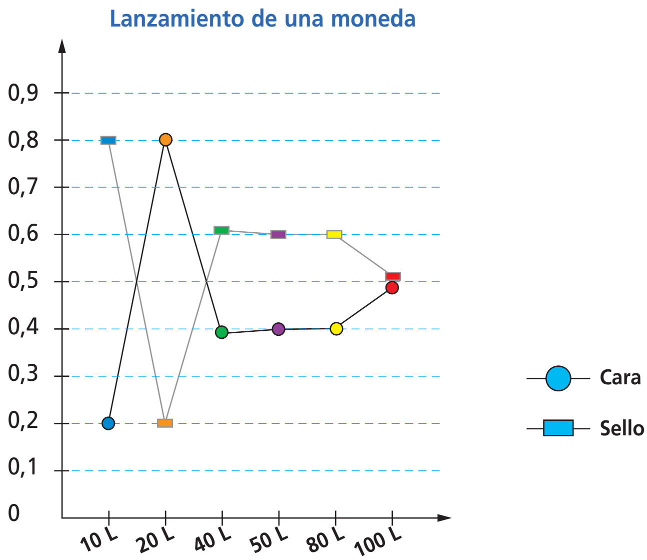
Al realizar un experimento, la probabilidad de ocurrencia de un determinado suceso (los posibles resultados de un experimento) se puede cuantificar, es decir, la probabilidad puede tomar valores entre 0 y 1, donde un suceso imposible tiene probabilidad 0 y, un suceso seguro es cuando la probabilidad tiene valor 1.

Ejemplo

Realizaremos el siguiente experimento. Lanzaremos una moneda al aire e iremos registrando los posibles resultados (lanzamientos ▶ L), y sus respectivas frecuencias relativas (FR). ¿Qué observas?

	10 L	FR	20 L	FR	40 L	FR	50 L	FR	80 L	FR	100 L	FR
Cara	2	0,2	16	0,8	15	0,375	20	0,4	32	0,4	48	0,48
Sello	8	0,8	4	0,2	25	0,625	30	0,6	48	0,6	52	0,52

Analicemos el gráfico, según las frecuencias relativas.



Como puedes observar, a medida que aumenta el número de lanzamientos, la frecuencia relativa de cada suceso tiende a estabilizarse. De esta manera, la probabilidad de:
P(salir cara) = 0,5
P(salir sello) = 0,5

Luego, al asignar un **valor a la probabilidad** a través de la frecuencia relativa, se deben considerar varias repeticiones del experimento para lograr alguna tendencia en ella y así estimar el valor de la probabilidad.

EN EQUIPO

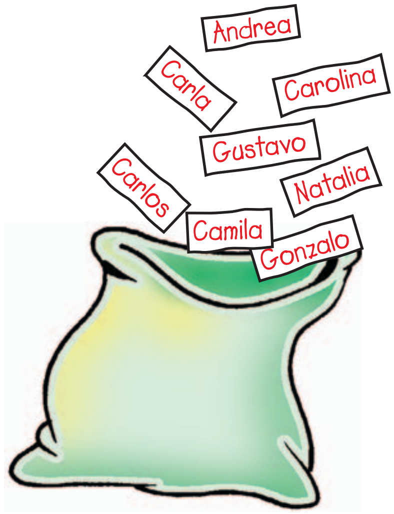
En grupos de 3 personas realicen el siguiente experimento y respondan las preguntas.
Lanzar un dado y obtener cuál es la probabilidad que salga un 1, ¿y un 2?, ¿y un 3?, ¿y un 4?, ¿y un 5?, ¿y un 6?

1. Lanzar el dado: 10 veces, 20 veces, 30 veces, 50 veces, 70 veces y 100 veces.
2. En una tabla registren los resultados obtenidos y las frecuencias relativas en los primeros 10 lanzamientos, luego, los 20 lanzamientos, 30, 50, 70 y 100 lanzamientos, respectivamente.
3. Grafiquen los resultados de todo el experimento.
4. Concluyan cuál es la probabilidad de obtener un 1, 2, 3, 4, 5 y 6, respectivamente.
5. Clasifiquen el tipo de experimento realizado.
6. ¿Cuál es el espacio muestral? ¿Cuáles son los eventos elementales?
7. Escriban dos eventos posibles, dos eventos mutuamente excluyentes y dos eventos imposibles.

Sucesos equiprobables

APRENDE

Un curso de 8 alumnos tuvo una salida pedagógica al campo, para investigar más acerca de algunos insectos. Todo lo investigado y anotado, debía ser escrito en un informe para ser entregado al profesor. Ninguno de los alumnos quiso hacerlo, por lo que uno de ellos recomendó realizar un sorteo.



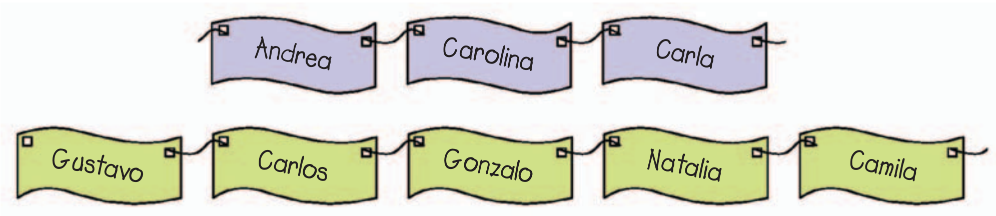
Este sorteo consistió en anotar el nombre de cada uno de ellos en un papelito, y luego sacar uno. Escribe el informe el alumno que corresponde al nombre del papelito.

El sorteo realizado es un tipo de **experimento aleatorio**, pues no sabemos cual será el resultado.

El **espacio muestral** de este experimento corresponde a:

Ω = {Andrea, Carolina, Carla, Gustavo, Carlos, Gonzalo, Natalia, Camila},
ya que son todos los posibles resultados que se pueden obtener al realizar el sorteo.

Los **eventos elementales** corresponden a:



Comparte con tu compañero de banco la siguiente pregunta:

¿Todos los compañeros tienen la misma probabilidad de ser elegidos?

En esta situación, como se pueden dar cuenta, todos tienen la **misma probabilidad de salir** por lo que ninguno de ellos se verá favorecido ni desfavorecido con el sorteo a realizar.

Cuando **sucesos elementales** tienen la misma probabilidad ocurrir los llamaremos **sucesos equiprobables**.

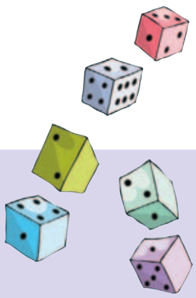
La palabra equiprobable, proviene del latín.
Equi significa igual, y viene del latín aequi.

Probable significa igual probabilidad.

Analiza si los siguientes experimentos son equiprobables.

Situación inicial planteada: extraer un nombre de la bolsa
Ω = {Andrea, Carolina, Carla, Gustavo, Carlos, Gonzalo, Natalia, Camila}
Si de los papelitos que se tienen, Carla ingresa **dos** papelitos con su nombre, ella tiene más probabilidades de salir elegida que sus compañeros. Luego, **no son sucesos equiprobables**.

Lanzar una moneda
Ω = {cara, sello}
Al lanzar una moneda, es igualmente probable obtener cara o sello, por lo que son **sucesos equiprobables**.



Lanzar un dado no cargado
$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Al lanzar el dado, todos los números tienen la misma probabilidad de salir. Luego, son **sucesos equiprobables**.

Si en un experimento todos los sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrir, se dice que los sucesos son equiprobables.

PRACTICA

Dados los siguientes experimentos, escribe el espacio muestral de cada uno, y luego, determina si sus resultados son equiprobables.

1. Escoger una niña, de un curso de 20 niños y 15 niñas.
2. Extraer sin mirar una bolita verde, de una caja que contiene 4 bolitas de color verde y 5 bolitas de color rojo.
3. Sin mirar, extraer una carta del naipe español.
4. Sin mirar, extraer de una urna una bolita con un número par, que contiene 3 números pares y 3 números impares.

Junto a un compañero realicen el siguiente experimento.

1º En una bolsa depositen 3 papeles pintados de color rojo, 2 papeles de color azul y 4 papeles de color amarillo.

2º Extraer un papelito, registrar su color y obtener su frecuencia relativa. Realizar esta extracción 50 veces, y registrar en una tabla el color de cada papelito sacado. Repitan lo mismo para 100 extracciones.

¿Son equiprobables los resultados de este experimento? Expliquen.

Regla de Laplace

En un curso se realizará la elección de presidente, entre los siguientes candidatos.

Cada alumno del curso puede votar por un solo candidato una vez.

Como puedes observar, en esta elección de presidente, todos tienen la misma probabilidad de salir electos, por lo que podemos decir que los resultados corresponden a **sucesos equiprobables**.

Cuando esto sucede, la probabilidad se puede obtener de la siguiente manera:

P(escoger a Daniela de presidenta) = $\frac{1}{5}$ — Corresponde a un candidato de un total de 5.

P(escoger a un hombre de presidente) = $\frac{2}{5}$ — 2 hombres de candidatos / 5 candidatos en total

P(escoger a una mujer de presidente) = $\frac{3}{5}$ — 3 mujeres de candidatas / 5 candidatos en total

Notación de probabilidad: P(A)
La probabilidad de un suceso A, se denota por P(A).
Si el suceso A corresponde a lanzar una moneda y que esta sea cara, su probabilidad se anota por:

$P(A) = \frac{1}{2} = 0,5$

De las situaciones anteriores podemos observar que el valor de la probabilidad se puede obtener mediante una fracción, donde su **denominador** representa a **todos los posibles resultados**, mientras que el **numerador** representa el **número de casos favorables**.

Por ejemplo, la probabilidad de escoger a una mujer presidenta corresponde a $\frac{3}{5}$, pues son 3 las mujeres de un total de 5 candidatos en total.

Una fracción se puede representar también como número decimal y como porcentaje.

Ejemplo
$\frac{1}{4} = 0,25$ ▶ 25%

También podemos decir, por ejemplo que:

La probabilidad de que una mujer sea presidenta es $\mathbf{\frac{3}{5}}$

La probabilidad de que una mujer sea presidenta es **0,6**

La probabilidad de que una mujer sea presidenta es de un **60%**

Todas las frases anteriores entregan la misma información, relacionadas con el valor de la probabilidad, escritas mediante distintas representaciones: **fracción, número decimal** y **porcentaje**, respectivamente.

Si en un experimento aleatorio los sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrir, es decir, son equiprobables, la probabilidad de que un suceso A ocurra esta dado por:

$$P(A) = \frac{\textit{número de casos favorables al suceso A}}{\textit{número de casos totales}}$$

Ejemplo

Al lanzar un dado, la probabilidad que el número sea primo es de $\frac{1}{2}$ ó 0,5 ó 50%, ya que,

Suceso A ▶ Obtener un número que sea primo

Casos favorables ▶ {2, 3, 5} ▶ 3 casos favorables

Casos totales ▶ {1, 2, 3, 4, 5, 6} ▶ 6 casos totales

$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ó 0,5 ó 50%

PRACTICA

Según cada experimento, escribe el número de resultados favorables y el de casos totales. Calcula su probabilidad.

En una caja poner las letras de la palabra PARALELEPIPEDO, y sacar una.

1. Obtener una vocal
2. Obtener una consonante
3. Obtener una P

Al lanzar un dado.

4. Obtener un número impar
5. Obtener un número menor o igual a 5

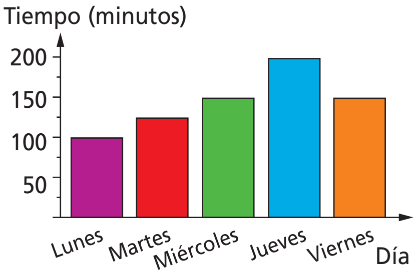
De una urna donde hay de 7 bolitas verdes, 5 bolitas azules y 3 bolitas rojas hay que extraer, sin mirar, una bolita. Calcula la probabilidad de:

6. extraer una bolita de color verde.
7. extraer una bolita de color azul.
8. extraer una bolita de color rojo.
9. extraer una bolita que no sea de color verde.
10. extraer una bolita que no sea de color rojo.
11. extraer una bolita que no sea de color azul.

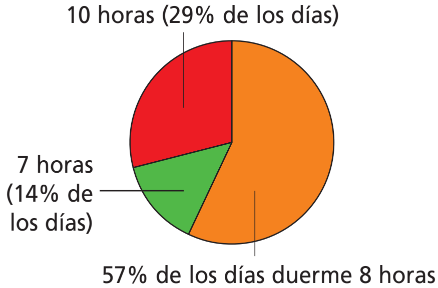
Más problemas

Loreto se está preparando para ganar la corrida anual de su colegio. Para ello, investigó algo sobre de la vida de Felipe, el ganador del último año. La información que obtuvo es la siguiente:

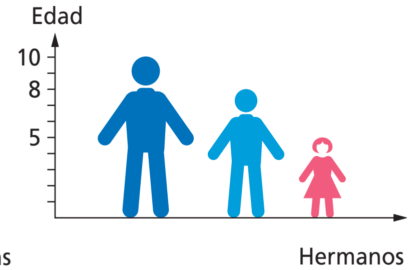
Tiempo en minutos que entrena diariamente



Horas que duerme diariamente



Edad de sus hermanos



¿Cuál o cuáles de estos gráficos le sirven a Loreto para su preparación física?

Comprender

¿Qué sabes del problema?
Los gráficos corresponden a aspectos de la vida de Felipe.

¿Qué debes encontrar?
Seleccionar aquellos gráficos cuya información sirva a Loreto.

Planificar

¿Cómo resolver el problema?
Interpretar cada gráfico.
Ver si Loreto puede adaptarse a las condiciones que muestra cada gráfico.

Resolver

- El gráfico 1 nos dice que cada lunes, Felipe entrena 1 hora 40 minutos. Los martes, 2 horas con 5 minutos; los miércoles 2 horas y media; los jueves 3 horas con 20 minutos y los viernes 2 horas y media.
- El gráfico 2 nos dice que el 57% de los días de una semana, es decir 4 días, Felipe duerme 8 horas; el 29% de los días duerme 10 horas y un 14% de los días duerme 7 horas.
- El gráfico 3 nos dice que Felipe tiene 2 hermanos, uno de 10 y otro de 8 años y una hermana de 5 años.

Por lo tanto, los gráficos 1 y 2 le sirven a Loreto para imitar a Felipe y comenzar a entrenar.

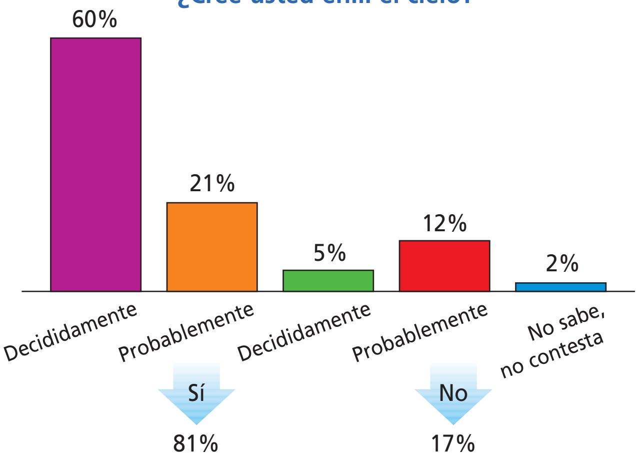
Revisar

Comparar la respuesta con los compañeros(as) y luego con tu profesor.

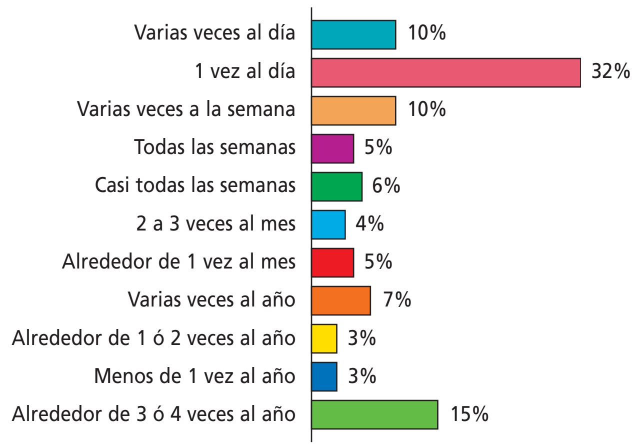
PRACTICA

1. Álvaro necesita información sobre las creencias religiosas de los chilenos. Para obtenerla recurre al estudio “Mapa de la religiosidad en Chile”, realizado por el Centro de Estudios Públicos el año 1998. Allí encontró los siguientes gráficos.

¿Cree usted en... el cielo?



¿Con qué frecuencia reza usted?



¿Cuál o cuáles gráficos le sirven a Álvaro para conocer nuestros hábitos religiosos?

Comprender

¿Qué sabes del problema?

¿Qué debes encontrar?

Planificar

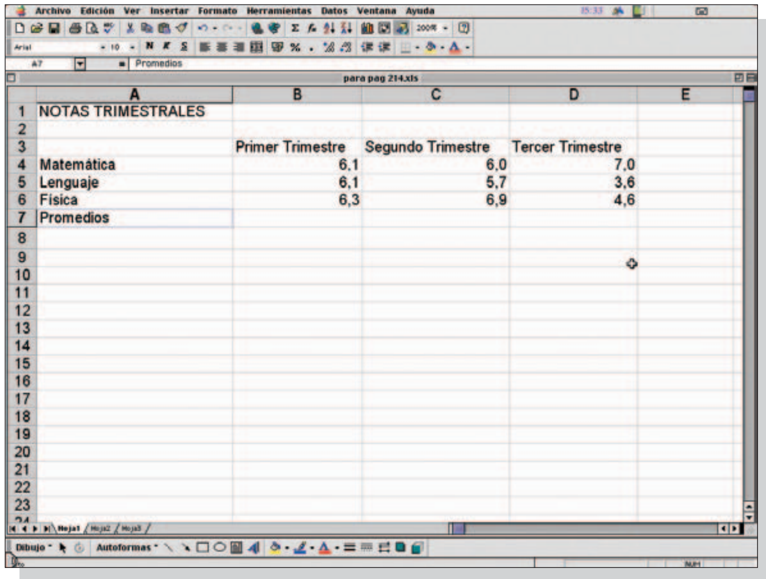
¿Cómo resolver el problema?

Resolver

Revisar

Uso del computador

1. Antonia usa el computador para llevar un registro de sus notas. Específicamente ella usa una planilla de cálculo, como el excel, para sacar sus promedios y analizar estadísticamente sus notas. Luego de ingresar sus notas en las celdas o casilleros correspondientes escribió ciertas fórmulas en otros casilleros. Practica siguiendo las instrucciones.



	A	B	C	D	E
1	NOTAS TRIMESTRALES				
2					
3		Primer Trimestre	Segundo Trimestre	Tercer Trimestre	
4	Matemática	6,1	6,0	7,0	
5	Lenguaje	6,1	5,7	3,6	
6	Física	6,3	6,9	4,6	
7	Promedios				

- Escribe en la celda B7 la siguiente formula: **=PROMEDIO(B4:B6)**
- Escribe en la celda B8 la siguiente formula: **=SI(B7>6;"Muy bueno")**
- Escribe en la celda B9 la siguiente formula: **=MEDIANA(B4:B6)**

a. ¿Qué fórmula habría que escribir para obtener el promedio del segundo semestre?

b. ¿Qué fórmula habría que escribir para encontrar la mediana en el tercer semestre?

c. Averigua para qué sirve la tecla f_x, y qué otras cosas puedes encontrar ahí.

d. Usa la tecla  para graficar la información de las notas de Antonia.

2. En las siguientes páginas puedes encontrar distintos resultados de estudios públicos, de opinión, etc.

www.ine.cl
www.cepchile.cl
www.encuestas.com
www.sernam.gov.cl

a. Selecciona algún tema de tu interés y sintetiza la información allí entregada en una tabla de frecuencias.
b. Usa el programa Excel para obtener medidas de tendencia central y luego interprétalas.
c. Escribe tus conclusiones y compáralas con los estudios de tus compañeros.

Síntesis

1. **Gráfico de barras**: sirve para comparar frecuencias de los valores.
2. **Pictograma**: se recomienda para representar variables cualitativas, por ejemplo: ciudad de origen.
3. **Gráfico circular o de sectores**: es recomendable para representar porcentajes. Para construirlo, se divide el círculo en sectores circulares proporcionales a la frecuencia que se quiere representar.
4. **Histograma**: se recomienda para representar datos agrupados. Se compone de líneas contiguas, en la cual cada una representa un intervalo.
5. **Frecuencia absoluta**: número de veces que aparece cada valor de una variable y el número total de observaciones. La suma de todas ellas es igual al tamaño de la población.
6. **Frecuencia relativa**: cociente entre la frecuencia absoluta de una variable y el número total de observaciones. La suma de ellas es siempre igual a 1.
7. Para realizar una encuesta hay que seguir los siguientes pasos:
   a. Definir el objeto de trabajo.
   b. Elegir una muestra dentro del grupo.
   c. Confeccionar cuestionarios y otros formularios de investigación que respondan a los objetivos del estudio.
   d. Recopilar la información y organizarla en tablas de frecuencias.
   e. Representar la información mediante gráficos.
   f. Interpretar los resultados y presentar conclusiones.
8. En un conjunto de datos, el **rango** corresponde a la diferencia entre el valor mayor y el valor menor de una variable.
9. **Intervalo:** conjunto de valores que toma una variable.
10. **Marca de clase:** representan al valor promedio de los extremos de un intervalo.
11. **Media aritmética (x) para datos agrupados:** esta se calcula de la siguiente manera:

$$\overline{x} = \frac{\text{suma (marca de clase} \bullet \text{frecuencia absoluta)}}{\text{total de datos}}$$

12. **Moda (Mo) para datos agrupados:** se calcula como $Mo = L_i + \frac{d_1}{d_1 + d_2} \bullet t$, donde

d_1 = diferencia de la frecuencia del intervalo modal y la frecuencia de clase anterior.

d_2 = diferencia de la frecuencia del intervalo modal y la frecuencia de clase posterior.

t = tamaño de los intervalos.

L_i = número que representa el extremo inferior de la clase modal.

13. **Experimentos determinísticos:** experimento donde se conoce de antemano el resultado.
14. **Experimentos aleatorios:** experimento donde no se conoce de antemano el resultado, pero se puede predecir con certeza dicho resultado.
15. **Espacio muestral** (Ω): corresponde al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.
16. **Suceso o evento elemental:** corresponde a cada uno de los resultados de un experimento. Un evento puede ser seguro, imposible o mutuamente excluyente.
17. La **probabilidad** puede tomar valores entre 0 y 1.
18. **Sucesos equiprobables:** sucesos que tienen la misma probabilidad de ocurrir.
19. La probabilidad de que un suceso A ocurra esta dado por la **Regla de Laplace**:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso A}}{\text{número total de casos}}$$

En tu cuaderno realiza un mapa conceptual que relacione **al menos** los conceptos dados a continuación: frecuencia relativa; frecuencia absoluta; gráfico de barras; gráfico circular; histograma; tabla de frecuencias.

Evaluación

Resuelve los siguientes problemas y marca la alternativa correcta en las preguntas 1 a la 8.

1. Las notas de dos amigos en la asignatura de Inglés son:

   Luis — 3, 7, 7, 4, 7 **Marcos** — 7, 7, 6, 5, 2

   ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es **verdadera**?

   A. Luis es más estudioso que Marcos
   B. Marcos no aprobó la asignatura
   C. Ambos son muy estudiosos en el colegio
   D. Ambos aprobaron Inglés

2. Un profesor fue calificado por sus alumnos obteniendo los siguientes porcentajes:

   Muy bueno: 50%
   Bueno: 25%
   Regular: 15%
   Malo: ?

   El porcentaje de alumnos que dijo que el profesor es malo es:

   A. 90% C. 1%
   B. 10% D. 0%

3. Si el día en que se hizo la encuesta había 40 estudiantes, ¿cuántos lo calificaron como regular?

   A. 5
   B. 6
   C. 15
   D. 20

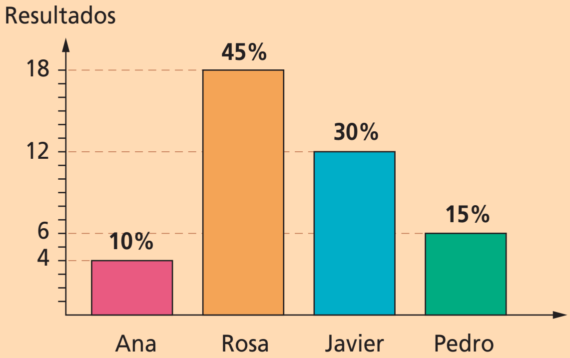
4. El número de veces que aparece cada valor de una variable se llama:

   A. frecuencia absoluta
   B. frecuencia relativa
   C. porcentaje
   D. frecuencia relativa acumulada

5. El gráfico recomendado para representar los datos del ejercicio 2 es:

   A. gráfico de barras
   B. histograma
   C. pictograma
   D. gráfico circular

6. En una elección de presidente de curso los resultados fueron expresados así:



   ¿Cuántos alumnos votaron en las elecciones?

   A. 20
   B. 40
   C. 60
   D. 100

7. La suma de todas las frecuencias absolutas en cualquier tabla es:

   A. 1
   B. 1%
   C. 100%
   D. El numero total de observaciones

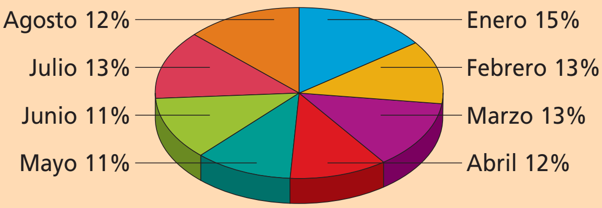
8. La suma de todas las frecuencias relativas en cualquier tabla es igual a:

   A. 100
   B. 100%
   C. El número total de observaciones
   D. 1

Lee y resuelve.

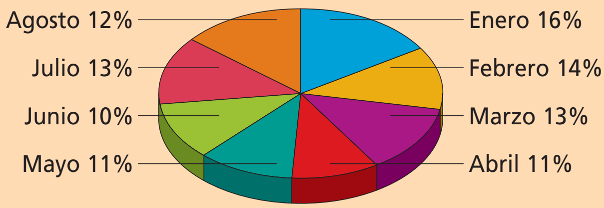
1. Los siguientes gráficos corresponden al porcentaje de pasajeros en vuelos nacionales e internacionales en el aeropuerto de Santiago en el 2006.

Porcentaje de pasajeros en vuelos nacionales en el aeropuerto de Santiago en el 2006 (1.773.740 pasajeros en total).



Fuente: www.aeropuertosantiago.cl

Porcentaje de pasajeros en vuelos internacionales en el aeropuerto de Santiago en 2006 (2.735.022 pasajeros en total).

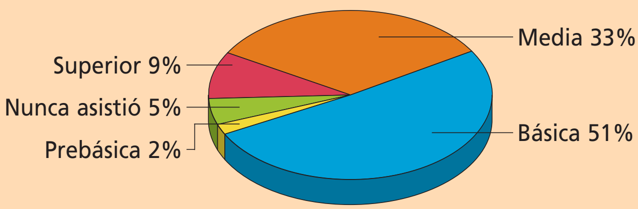


Fuente: www.aeropuertosantiago.cl

a. ¿Cuántas personas aproximadamente viajaron en cada mes?
b. Haz un gráfico de barras con los datos anteriores.

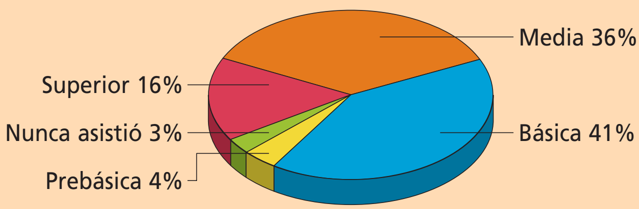
2. Los siguientes gráficos representan el nivel de instrucción de la población chilena, considerando los datos de los dos últimos censos.

Nivel de instrucción Mujeres 1992



Fuente: www.ine.cl

Nivel de instrucción Mujeres 2002



Fuente: www.ine.cl

a. ¿Cuál es la moda de nivel de instrucción en el año 1992? ¿Y en el año 2002?

¿Cómo trabajé?

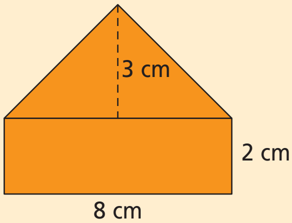
Marca según tu apreciación	No lo entendí	Lo entendí	Puedo explicarlo
Obtener información a partir de un conjunto de datos			
Interpretar distintos tipos de gráficos			
Interpretar información contenida en tablas			
Análisis de encuestas			

Taller de evaluación 2

Medición

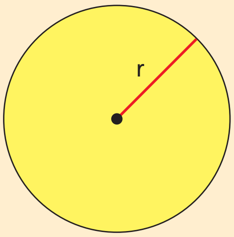
1. El área del polígono compuesto es:

A. 9 cm^2
B. 12 cm^2
C. 21 cm^2
D. 28 cm^2



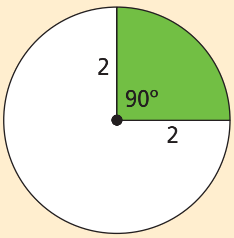
2. El perímetro de una circunferencia de radio 4 es:

A. 4π
B. 8π
C. 12π
D. 16π



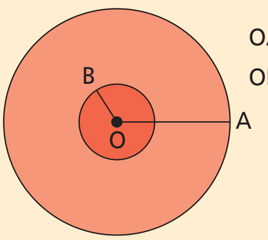
3. El perímetro del sector circular es:

A. $\pi + 2$
B. $\pi + 4$
C. $2\pi + 2$
D. $2\pi + 4$



4. El perímetro de la corona circular es:

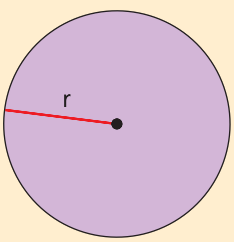
A. 32π
B. 16π
C. 8π
D. 6π



OA = 12
OB = 4

5. El área de un círculo de radio 5 es:

A. 5π
B. 10π
C. 20π
D. 25π



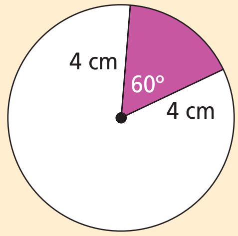
6. El área del sector circular es:

A. $\frac{8\pi}{3}$ cm^2

B. $\frac{8\pi}{6}$ cm^2

C. $\frac{16\pi}{3}$ cm^2

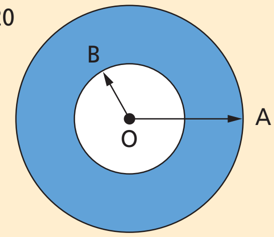
D. $\frac{6\pi}{3}$ cm^2



7. El área de la corona circular es:

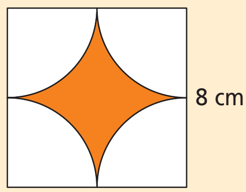
A. 64π
B. $400\pi^2$
C. $336\pi^2$
D. 336π

OA = 20
OB = 8



8. El área y el perímetro de la figura es, **respectivamente**:

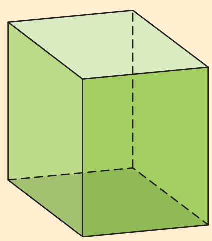
A. $8\pi - 64$; 8π
B. $64 - 16\pi$; 8π
C. $32 - 8\pi$; $64 - 16\pi$
D. $8\pi - 16$; $32 - 16\pi$



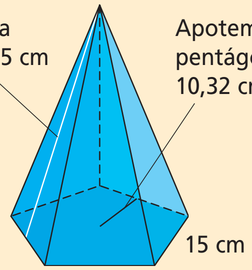
9. El área total del siguiente paralelepípedo de base cuadrada y recto es:

Lado de la base = 15 cm
Altura = 18 cm

A. 324 cm^2
B. 810 cm^2
C. 1.530 cm^2
D. 4.860 cm^2

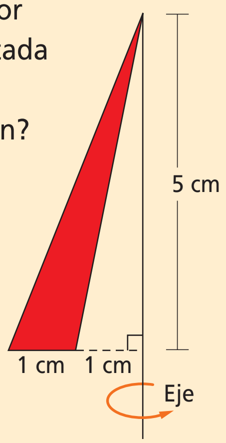


10. El área total de esta pirámide recta cuya base es un pentágono regular es:



A. 1.324,5 cm^2
B. 1.342 cm^2
C. 387 cm^2
D. 937 cm^2

11. Al girar la figura por el eje, la parte pintada genera un cuerpo. ¿Cuál es su volumen? ($\pi = 3$)



A. 5 cm^3
B. 15 cm^3
C. 20 cm^3
D. 25 cm^3

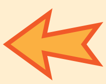
Movimientos en el plano

12. Según la siguiente figura,

¿Cuál de las siguientes figuras no representa una transformación isométrica de ella?

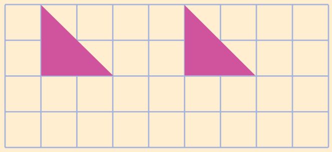
A.

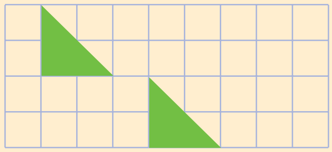

B.

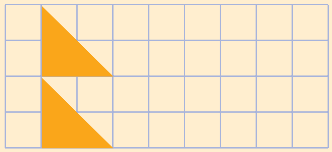

C.


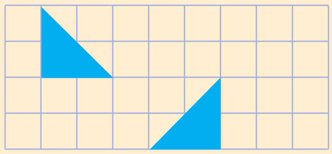
D.


13. ¿Cuál de las siguientes figuras no fue solo trasladada?

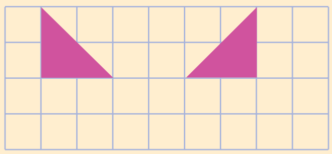
A.


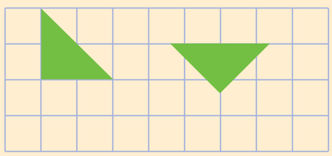
B.


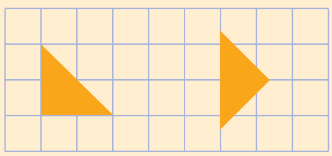
C.


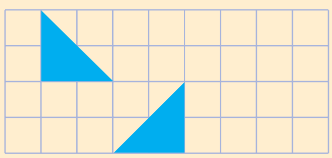
D.


14. ¿Cuál de las siguientes figuras fue reflejada?

A.


B.


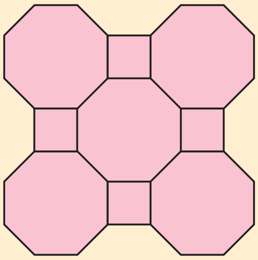
C.


D.


15. A una teselación que está formada por dos o más polígonos regulares, se la llama:

A. teselación regular.
B. teselación semiregular.
C. teselación no regular.
D. Ninguna de las anteriores.

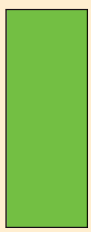
16. La siguiente teselación corresponde a una:



A. teselación regular.
B. teselación semiregular.
C. teselación no regular.
D. Ninguna de las anteriores.

Relaciones proporcionales

17. ¿Cuál es el valor de la razón en que están los lados del rectángulo?



A. 15,6
B. 13,2
C. 12,5
D. 12

18. 4 personas pintan una casa en 4 días. ¿Cuántos días tardarán en pintar la casa 8 personas?

A. 4 B. 8 C. 2 D. 16

19. 1.000 g de café son envasados en 4 frascos de 250 g. ¿Cuántos frascos se necesitan para envasar estos 1.000 g en frascos de 200 g?

A. 6 B. 5 C. 4 D. 3

20. Un árbol proyecta una sombra que es el doble del tamaño real del árbol. ¿En qué razón están la sombra con la altura del árbol?

A. 1 : 2 B. 1 : 20 C. 20 : 1 D. 2 : 1

21. En un mapa se muestra que la distancia entre dos ciudades es 4,5 cm. Si el mapa está hecho en una escala de 1 cm : 1000 km, ¿cuál es la distancia real entre estas ciudades?

A. 450 km C. 450 m
B. 4.500 km D. 4.500 m

22. Un curso tiene 40 alumnos. El 20% de ellos son hombres. ¿Cuántas mujeres hay en el curso?

A. 8 B. 38 C. 40 D. 32

23. Un pantalón cuesta $18.500 pero por una promoción tiene un descuento del 25%. ¿Cuál es el precio de pantalón según la promoción?

A. $4.625 C. $13.875
B. $13.785 D. $18.885

24. Un banco ofrece un interés de 0,3% mensual. Al invertir $800.000, ¿cuánto dinero se tendrá después de un mes?

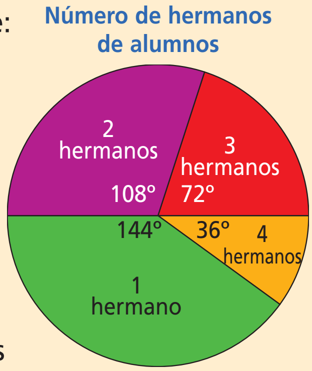
A. $802.000 C. $802.400
B. $1.040.000 D. $1.400.000

25. El precio de un producto con IVA incluido es de $32.500. ¿Cuál es el precio del producto **sin** IVA?

A. $27.311 C. $6.175
B. $26.325 D. $6.157

Tratamiento de la información

26. El siguiente gráfico, recibe el nombre de:



A. histograma
B. pictograma
C. gráfico circular
D. gráfico de barras

27. De acuerdo al gráfico anterior, la mayoría de los alumnos tienen:

A. 1 hermano **B.** 2 hermanos **C.** 3 hermanos **D.** 4 hermanos

28. Se ha pesado a 100 alumnos de un colegio, obteniéndose la tabla adjunta. ¿Qué porcentaje de alumnos pesa menos de 71 kilogramos?

Pesos	Nº de alumnos
46 – 50	4
51 – 55	11
56 – 60	30
61 – 65	28
66 – 70	20
71 – 75	5
76 – 80	2

A. 7% **B.** 20% **C.** 70% **D.** 93%

29. ¿Qué porcentaje de alumnos pesa más de 60 kilogramos?

A. 28% **B.** 45% **C.** 55% **D.** 93%

30. La frecuencia absoluta acumulada en el intervalo 51 - 55 corresponde a:

A. 11 **B.** 15 **C.** 30 **D.** 85

31. ¿Cuál es la probabilidad que un alumno pese entre 61 - 65 kilogramos?

A. 0,11
B. 0,28
C. 0,3
D. 0,5

32. ¿Qué categoría tiene la probabilidad de 0,2?

A. 51 - 55
B. 66 - 70
C. 71 - 75
D. 76 - 80

¿Cómo trabajé?

Revisa tus respuestas en el **solucionario** (página 228) y pinta, de izquierda a derecha, tantos cuadraditos como respuestas correctas tengas. Así sabrás qué temas dominas y en cuáles debes mejorar.

	Debo repasar	Bien	Muy bien	Excelente
Medición	☐☐☐☐☐	☐☐☐	☐☐	☐
Movimientos en el plano	☐☐	☐	☐	☐
Relaciones proporcionales	☐☐☐	☐☐☐	☐☐	☐
Tratamiento de la información	☐☐☐	☐☐	☐	☐

Unidad 1 Números positivos y negativos

Página 8

1. 68,97; 41,15
2. 7.290; 1.948
3. 525,5; 2,5
4. 12.360; 515

Página 9

2. 14.959 m
3. 1.041 m

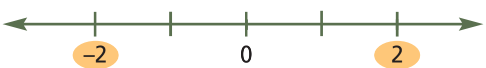
Página 10

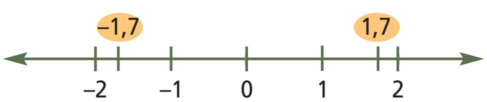
1. –10.000
2. –7,3 °C
3. –5.000 m
4. 1.864
5. 10,25 °C

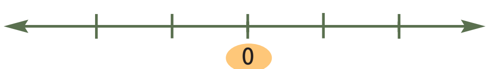
Página 11

7. Calama, Coihaique y Punta Arenas
8. Arica, La Serena y Curicó
9. Arica: –3 °C
   Calama: +13 °C
   La Serena: +4 °C
   Curicó: +2 °C
   Coihaique: +14 °C
   Punta Arenas: +19 °C
10. –5 °C
11. 18 pisos

Página 12

1.


2.


3.


4. En Linares
5. El hombre
6. 8 y 17 años respectivamente

Página 13

4.

Sucesor	–1	4	–1	2	–9	1
Número entero	–2	3	–2	1	–10	0
Antecesor	–3	2	–3	0	–11	–1

Página 14

1. 1,5 °C
2. –1,5 °C

3. 40
4. 30
5. 20
6. 10
7. 0
8. 4
9. 1
10. –3
11. –7
12. –10
13. 0,71
14. 0,23
15. –0,29
16. –0,81
17. –1,29

Página 15

21. a. –8.000 b. Debo $8.000

Página 16

1. –2
2. –12
3. –4
4. 7
5. –11
6. 4
7. –22
8. 0
9. –13
10. –6
11. 11
12. –1

Página 17

13. –3
14. –19
15. 8
16. 15
17. 16
18. –6
19. 0
20. –9
21. –6

24. a. Aproximadamente 2 m, 3 m, 4 m, 5 m y 5,5 m
    b. Aproximadamente 3,5 m

Página 18

1. 14
2. –15
3. 0
4. 13
5. –16,7
6. –23
7. 13
8. 0
9. 400
10. –5,4
11. 15
12. 2,5

13. 1
14. 7
15. –22
16. 5
17. 19
18. 18
19. –10
20. –8
21. 3
22. –3
23. 2
24. –26

Página 19

26. a. 5
b. 3
c. 4
d. 11
e. 10
f. 0
g. –4
h. –6

27. 18 °C
28. –4 °C
29. 9 °C
30. a. –3 °C
b. 0 °C

31. 5 kg – 6 kg – 14 kg; 75 kg

Página 21

1. –15
2. 0
3. –5
4. 7
5. 4
6. –7
7. 0
8. 45
9. 20
10. –18
11. 40
12. –28

19. –3
20. –7
21. –8
22. 3
23. –1
24. 16
25. –13
26. 10
27. –2

28. a. 75 y –50 puntos respectivamente
b. 12 y –8 puntos respectivamente
c. Rodrigo, Alejandra, Gonzalo, Cristián

29. a. 10 °C
b. –12 °C
c. 6 °C
d. –8 °C

Página 22

1. –1
2. –2
3. –9
4. 9
5. –3
6. –2
7. 11
8. –1
9. –20
10. 3,2
11. –10
12. 15,7

Página 23

1. 60
2. 39
3. –55
4. –45
5. –10
6. 50
7. –33
8. 76
9. –60
10. –60
11. 9
12. –60

16. –20
17. –10
18. 63
19. 48
20. –4
21. 126
22. –127
23. –333
24. –100
25. –12
26. 120
27. 2.250

28.

(20 : 5) : (–2)	10 : (–5) = 2
(108 : 4) : 9	(48 : 2) : (–2)
(–120 : 6) : (–10)	(72 : (–9)) : 4
(72 : (–9)) : 8	– (48 : 2) : (–8)
(36 : 3) : (–1)	(42 : 3) : 7

Página 24

1. 6
2. –9
3. 6
4. 960
5. 0
6. –0,1
7. 0
8. 12
9. 1

Página 25

1. –11
2. –3
3. 2
4. 7
5. 12
6. –54
7. –13
8. 4
9. 35
10. 10

11. a. $52.000
b. $135.000

Página 27

2. –48,5 °C
3. Aproximadamente 56 minutos

Página 28

1. 1
2. 30
3. –12
4. 1.200
5. –72
6. –32
7. –100.000.000
8. 1
9. –243
10. –150
11. 3.600
12. 1

Página 30

1. C
2. B
3. D
4. D
5. B
6. A
7. A
8. D

Página 31

1. **a.** 75 años
b. 212 años
c. En 1788

2. **a.** –4
b. –11
c. –10
d. 74
e. 0
f. 6

3. **a.** 26
b. 85
c. 11
d. 5

Unidad 2 Potencias

Página 32

1. 2^4
2. 2^5
3. 1^2
4. $\left(\frac{2}{3}\right)^3$
5. $(0{,}2)^4$
6. $(0{,}3) \bullet (0{,}3)$
7. $3 \bullet 3$
8. $0 \bullet 0 \bullet 0 \bullet 0 \bullet 0$
9. $\frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2} \bullet \frac{1}{2}$
10. 32
11. 1
12. $\frac{1}{27}$
13. 1,44
14. Base: Indica el factor que se repite.
Exponente: Indica cuántas veces se repite el factor.

Página 33

a. $6^2 = 36$
b. $6^3 = 216$
c. $6^8 = 1.679.618$
d. 7

Página 34

1. 2^4
2. 5^1
3. $\left(\frac{1}{2}\right)^5$
4. 7^2
5. $(-2)^3$
6. $\left(\frac{2}{3}\right)^3$

7. 4
8. 16
9. 64
10. 256
11. –8
12. –32
13. –128
14. –512

Página 35

15. Positivo
16. Negativo

17. $3 \bullet 3 \bullet 3 \bullet 3 = 81$
18. $(-3) \bullet (-3) \bullet (-3) \bullet (-3) \bullet (-3) = -243$
19. $(-5) \bullet (-5) \bullet (-5) = -125$
20. $\left(-\frac{1}{2}\right) \bullet \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
21. $(-0{,}2) \bullet (-0{,}2) \bullet (-0{,}2) \bullet (-0{,}2) = 0{,}0016$
22. $(0{,}3) \bullet (0{,}3) \bullet (0{,}3) \bullet (0{,}3) \bullet (0{,}3) = 0{,}00243$

23. 3
24. 5
25. $(-5)^3$
26. 2 o cualquier número par
27. 1 o cualquier número impar
28. 2
29. 3
30. 6
31. 3
32. 3
33. 3
34. 2

35. $18^3 + 9^3$
36. $(-4)^3 + (-4)^3 + (-4)^3 = 3 \bullet (-4)^3$

41. a. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ pelotas
b. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^3 \cdot 7 = 189$ pelotas

Página 36

1. $3 \cdot 9 \cdot 27 = 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 = 3^6 = 729$
2. $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$
3. $2^8 = 256$
4. $(-3)^6 = 729$
5. $(-5)^4 = 625$
6. $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$
7. $(-0,3)^5 = -0,00243$
8. $(-1)^{10} = 1$
9. $(-2)^9 = -512$
10. $(0,2)^5 = 0,00032$
11. $\left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

Página 37

1. 15.625; 625; 25; 2
2. 256; 8; 32; 5
3. 656; –243; –27; 3
4. –7; –7; 1; –7; 0
6. $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$
7. $(-3)^3 = -27$
8. $(0,2)^3 = 0,008$
9. $3^3 = 27$
10. $(-10)^5 = -100.000$
11. 8
12. 3
13. 5

Página 39

8. $(-4)^{-1}$
9. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$
10. $(-3)^{-3}$
11. $(2)^{-10}$
12. $(-2)^{-2}$
13. $\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}$
14. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$
15. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$
16. 1
17. 1
18. 2.187
19. $\frac{1}{128}$
20. $\frac{1}{4} = 0,25$
21. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$
22. $\frac{1}{16} = 0,0625$
23. –18
24. 0
26. $3^{-2} \cdot 5^3 \cdot 5^2 \cdot 3^{-1} = 5^5 \cdot 3^{-3} = 5^5 \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right) = \frac{3.125}{27}$
27. $2^0 \cdot 2^{-3} \cdot 3^2 \cdot 3^{-5} = 2^{-3} \cdot 3^{-3} =$

$$\frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{1}{(2 \cdot 3)^3} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

28. $2 \cdot 2^{-3} \cdot 2^5 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{-3} =$

$$2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^{-3} = 2^3 \cdot 3^4 \cdot \frac{1}{5^3} = \frac{648}{125}$$

29. a. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$ b. 2^6; 64 cm

Página 41

1. $45^2 = 2.025$
2. $3^2 = 9$
3. $(-6)^3 = -216$
4. $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$
5. $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
6. $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}$
8. $100^3 : 10^3 = 1.000$
9. $(-3)^3 \cdot 2^3 = -216$
10. $50^{-2} : 25^{-2} = \frac{1}{4}$
11. $2^2 : (0,5)^2 = 16$
12. $(-2)^3 \cdot (-5)^3 = 1.000$
22. $3^3 \cdot 2^3 = 6^3$
23. $5^2 \cdot 4^2 = 20^2$

Página 43

1. a. 4.096
   b. 262.144
   c. 16.384

2. En 5 horas y 20 minutos

3. a. 14:40 h
   b. 15:20 h
   c. 524.288

4. a. 729 b. 121

Página 45

1. Al 6º día
2. Al 9º día
3. 49.152
4. 64.512
5. El 3er día

6. a. Al tercer año
   b. 32.921; 21.947
   c. Después de 30 años

Página 47

3. $8 \cdot 10^{2}$
4. $85 \cdot 10^{6}$
5. $456 \cdot 10^{5}$
7. $3 \cdot 10^{-5}$
8. $35 \cdot 10^{-8}$
9. $125 \cdot 10^{-3}$

10. a. 300.000,0 km/h
    b. 300.000.000 m/s
    c. 10 ceros; 11 ceros

11. a. 10^{86} veces más grande

Página 49

1. La cifra es 9
2. a. 8 b. 7 c. 3 d. 6

Página 50

Cálculo mental

1. 4
2. 4
3. 1
4. 27
5. $\frac{1}{2}$
6. –2
7. $-\frac{1}{2}$
8. 9
9. –27
10. 1
11. –1
12. 2
13. 1
14. –1
15. 1
16. 2
17. 0,04
18. $\frac{4}{9}$

Uso de la calculadora

1. 32
2. 0,0625
3. –8
4. 0
5. Error
6. $0,\overline{1}$
7. 0,01
8. –0,125
9. 0,008
10. 25

Página 52

1. C
2. D
3. C
4. A
5. C
6. A
7. C
8. B
9. D

Página 53

1. a. 4^{3}
   b. $(-2)^{2}$
   c. $\left(\frac{1}{5}\right)^{2}$
   d. $\frac{7^{3}}{2}$

3. a. –5
   b. –5
   c. 6
   d. 2
   e. –2
   f. 2
   g. 2
   h. 0
   i. 5

Unidad 3 Números decimales y fracciones

Página 54

1. 0,7
2. 4,5
3. –1,25
4. 1,08
5. 0,3
6. 4,12
7. 4,84
8. –19,47

9. $\frac{1}{2}$ 10. $\frac{7}{3}$ 11. $\frac{2}{3}$ 12. $\frac{7}{8}$

13. $4\frac{1}{2}$ 14. $2\frac{2}{7}$ 15. $2\frac{2}{3}$ 16. $1\frac{1}{7}$

17. $\frac{5}{2}$ 18. $\frac{11}{3}$ 19. $\frac{23}{4}$ 20. $\frac{79}{9}$

Página 55

a. 13,9 g
b. 1,35 g
c. 131,8 g
d. 201,95 g

Página 56

1. $2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$
2. $5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$
3. $3 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$
4. $1 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^0$
5. $2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2$
6. $1 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$
7. $2 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3$
8. $1 \cdot 10^9 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$
9. $1 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^3$
10. $2 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^0$

Página 57

1. $3 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2}$
2. $2 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$
3. $2 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3}$
4. $3 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4}$
5. $3 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-4}$
6. $1 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-6}$

Página 58

1. 3.580
2. 139.000
3. 50.700.000
4. 3.010.000.000
5. 0,023
6. 0,00395
7. 0,000278
8. 0,000000193
9. $2,35 \cdot 10^4$
10. $7,55 \cdot 10^6$
11. $2,3 \cdot 10^{-5}$
12. $1,7 \cdot 10^{-6}$
13. $2,53 \cdot 10^1$
14. $1,354 \cdot 10^2$
15. $2,32 \cdot 10^6$
16. $2,7 \cdot 10^5$
17. $3,54 \cdot 10^{-10}$
18. $2,356 \cdot 10^{-6}$

Página 59

20. 1.700.000 años = $1,7 \cdot 10^6$
21. 100.000.000.000.000 = $1 \cdot 10^{14}$
22. 778.330.000 = $7,7833 \cdot 10^8$
    142.984 = $1,42984 \cdot 10^5$
23. 0,0000032 = $3,2 \cdot 10^{-6}$
24. 0,005 = $5 \cdot 10^{-3}$
    0,009 = $9 \cdot 10^{-3}$
25. 900.000 = $9 \cdot 10^5$
    60.000.000 = $6 \cdot 10^7$

Página 61

1. Finito
2. Periódico
3. Semiperiódico
4. Periódico
5. Periódico
6. Periódico
7. Semiperiódico
8. Periódico

Página 6

1. $\frac{516-5}{990} = \frac{511}{990}$

2. $2 + \frac{321-3}{990} = 2\frac{318}{990} = \frac{2.298}{990}$

3. $5 + 0,\overline{37} = 5 + \frac{37-0}{99} = 5\frac{37}{99} = \frac{532}{99}$

4. $0,1\overline{16} < 0,1\overline{6} < 0,\overline{205} < 0,\overline{23} < 0,\overline{25} < 0,\overline{32} < 0,\overline{3}$
   $\frac{115}{990} < \frac{15}{90} < \frac{205}{999} < \frac{23}{99} < \frac{25}{99} < \frac{32}{9} < \frac{3}{9}$

5. $\frac{977}{100}; \frac{483}{25}; \frac{2159}{50}; \frac{2339}{50}; \frac{1049}{100}; \frac{1067}{50}; \frac{238}{5};$
   $\frac{1221}{100}; \frac{2617}{50}$

Página 65

1. 2,357 y 2,357
2. 3,17 y 3,18
3. 0,1711 y 0,1711
4. 0,17
5. 0,78

6. 0,67
7. 0,78
8. 0,78
9. 1,31

10. 3,1415 y 3,1416
    a. 3,1416

11. a. Un número irracional
    b. 1,41; 1,41
    c. A la millonésima

Página 67

1. Nado: 6,2 km; Trote:11,3 km; Bicicleta: 24,8 km
2. 11,46 litros.

Página 68

2. a. $7{,}5 \cdot 10^{16}$
   b. $6{,}001 \cdot 10^{12}$
   c. $8{,}5 \cdot 10^{-10}$
   d. $6 \cdot 10^{-13}$
   e. $1 \cdot 10^{-14}$
   f. $2{,}3 \cdot 10^{13}$

Página 70

1. D
2. D
3. D
4. D
5. A
6. A
7. B
8. C
9. C
10. A

Página 71

1. 36 litros
2. 3 toneladas

Unidad 4 Ecuaciones de primer grado

Página 72

1. 24
2. 18
3. 4
4. 2
5. 2
6. 3
7. –2
8. 2
9. F
10. F
11. V
12. F

Página 73

1. $450
2. $400
3. Es más barato comprar 4 kg de limones
4. $1.000
5. 10 kg

Página 74

3. Se mantiene la igualdad

Página 75

10. –4
11. –37
12. –6
13. –4
14. –22
15. –41
16. 56
17. –15
18. –13
19. 39
20. Sí
21. No
22. Sí
23. No
24. Sí
25. Sí
26. No
27. Sí
28. No
29. No
30. Si x = –4 no se cumple ninguna igualdad

Página 76

1. $3 - 3 \cdot 12$
2. $x - 10$
3. $2 \cdot (4 + (-7))$
4. $3 \cdot (-2) - 4$

Página 77

15. $a \cdot 420$
16. $4 \cdot c$
17. $x \cdot 180$
18. $y \cdot 220$
19. $2 \cdot x$
20. $8 \cdot x$
21. $5 \cdot t$
22. $x - 9$
23. $x + 6$
24. $83 - x$
25. $2 \cdot x$
26. $x - x = 0$
27. $\frac{c_1 \cdot c_2}{2}$
28. $\frac{h \cdot b}{2}$
29. $x \cdot y$
30. $a \cdot a = a^2$
31. $(a + 3) \cdot (a + 3) = (a + 3)^2$
32. $13 + 7 = 20$
33. $x + y = 30$
34. $2x = 50$
35. $\frac{36}{2} = 18$
36. $\frac{y}{4} = 9$
37. $3x = 24$
38. $y \cdot 10 = 100$
39. $\frac{x}{3} = 17$
40. $\frac{z}{5} - 3 = z$
41. $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot a = 7$

Página 78

1. $x = 8$
2. $z = 2$
3. $x = 4$
4. $x = -4$
5. $v = 15$
6. $y = -6$

7. $x = 0$
8. $x = 7$
9. $x = -28$
10. $v = -34$
11. $x = -28$
12. $x = 36$
13. $z = 13$
14. $x = 5$

Página 79

21. $x = 4$
22. $y = 10$
23. $z = 3$
24. $w = 6$
25. $x + 3.800 = 5.600$; $x = \$1.800$
26. $50.000 - 42.000 = x$; $x = \$8.000$
27. $17.000 - x = \frac{17.000}{2}$; $x = \$8.500$
28. $5.000 - 322 = x$; $x = \$4.678$
29. $x + 170 = 1.000$; $x = \$830$
30. $5.700 + 3.000 = x$; $x = \$8.700$

Página 80

1. $x = 12$
2. $x = -5$
3. $x = 6$
4. $m = -8$
5. $u = -6$
6. $x = 7$
7. $v = -12$
8. $x = 4$
9. $a = 10$
10. $z = 10$
11. $y = 15$
12. $a = 5$
13. $b = -8$
14. $x = 2$
15. $z = 9$
16. $w = 4$
17. $v = -7$
18. $v = 8$
19. $x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

Página 81

23. a. Comprar 4 rollos en $800
24. 5 kg
25. $53 aproximadamente
26. $673 aproximadamente
27. $333 aproximadamente
28. $89
29. 6 paquetes de 500 g
30. 42,5 m

Página 82

1. $x = 400$
2. $x = 100$

$\frac{35}{9}$

Página 82

3. $\frac{1.585}{3}$
4. 45
5. $\frac{35}{9}$
6. $\frac{38}{3}$
7. $\frac{83}{45}$
8. 5
9. -503
10. 4
11. -7
12. 3
13. $-\frac{5}{2}$
14. -9

18. $3x - x = 80$; $x = 40$
19. $x + x - 1 = 1$; $x = 1$
20. $x + \frac{x}{2} = 60$; $x = 40$
21. $x + 3x = 600$; \$150; \$450
22. $3x + 750 = 1.200$; \$90
23. $5.000 + 3x = 11.900$; \$2.300
24. $5x + 0{,}75 = 12$; 2,25 m
25. $z + 600 = 1.000$; \$400
26. a. Javier $170; Camila $130
    b. 8 monedas

Página 84

1. $x = -\frac{2}{5}$
2. $v = -\frac{2}{5}$
3. $x = \frac{13}{10}$
4. $x = \frac{7}{17}$
5. $x = 13$
6. $u = 1$
7. $u = 3$
8. $y = 6$
9. $x = 1$
10. $y = \frac{1}{2}$
11. $v = \frac{16}{7}$
12. $v = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$
13. $b = \frac{53}{52}$
14. $z = \frac{14}{15}$
15. $y = \frac{149}{12}$
16. $u = \frac{7}{4}$
17. $z = -1$
18. $v = \frac{7}{19}$
19. $u = \frac{9}{5}$
20. $w = \frac{16}{5}$

Página 85

22. a. Máquina A: –5; Máquina B: 7
    b. 8
    c. 3

Página 89

1. Necesita un 7,3
2. Sobre un 6,8

Página 90

Cálculo mental

1. x = –1	8. n = 9	15. x = 13
2. y = 0	9. y = 6	16. x = 8
3. v = 8	10. $r = \frac{1}{10}$	17. z = 4
4. z = 1	11. z = 4	18. b = 7
5. x = 4	12. b = 3	19. x = 7
6. a = 5	13. x = 8	20. a = 0
7. y = 4	14. x = 13	

21. 1.000.000
22. $\frac{1}{10}$
23. 1.000
24. $\frac{1}{10.000}$

Uso de la calculadora

1. x = 5.000	4. x = –2,7007299	7. x = 1.900.980,99
2. x = 15.650	5. x = 97,5	8. $x = \frac{127}{407}$
3. $\frac{1}{100.000}$	6. x = 100.000.000	9. x = –15.184,88

Página 92

1. A	6. B
2. D	7. D
3. A	8. C
4. D	9. D
5. D	10. C

Página 93

1. 108 cm^2
2. 14 cm y 56 cm
3. 58 y 122
4. 500 metros
5. $5.000
   a. $15.300
6. 9, 10 y 11

Unidad 5 Geometría

Página 94

1. Recto	7. 2
2. Agudo	8. Trapecio
3. Obtuso	9. Trapezoide
4. Agudo	10. 3
5. 71°	11. Isósceles
6. 109°	12. Escaleno

Página 97

3. V
4. V
5. V
6. V
7. F
8. z y x; y y w; p y s; q y r; u y w; t y v
9. y, q, u; z, s, v; x, p, t; w, r, w

10. z, p; w, q; s, t; r, u
11. y, r; x, s; q, w; p, v

14. x = 55°
15. y = 30°
16. α = 120°
17. α = 48°
18. α = 65°
19. α = 130°

Página 106

20. b. 70°
    c. Son iguales ya que son correspondientes
    c. Sí
21. a. Son suplementarios
    b. 70° y 110°, respectivamente
    c. Sí
22. b. Son iguales c. No

Página 107

23. x = 125°; y = 125°; z = 125°
24. x = 145°; y = 52° a. No son paralelas
25. x = 50°; y = 130°
26. y = 120°; x = 60°

Página 109

1. x = 80°	2. x = 72°	3. x = 170°
4. 900°	5. 1.080° • 1.800°	6. 1.440°
7. 720°	8. 1.800°	9. 360°

Página 110

1. 4 m	3. 60°
2. 180°	4. El de la circunferencia exterior

Página 111

5. Diámetro	8. Cuatro	11. $13,\overline{3}$%
6. Corona circular	9. Doce	
7. 2,5 cm	10. $16,\overline{6}$%	

Página 113

1. Regular
2. Irregular
3. Irregular
4. Regular
5. Que son congruentes
6. Que son congruentes

8. Aumentan
9. Disminuyen

Página 118

1. B	4. D
2. C	5. B
3. A	6. A

Unidad 6 Medición

Página 124

1. a. 16 cm b. 16 cm^2
2. 20 cm^2
3. 20 cm
4. a. 26 cm b. 32 cm^2

Página 125

1. 80 rollos
2. 9.600.000 kg
3. 1 km = 1.000 m
4. 10.000.000 kg

Página 126

1. 20 cm	3. 20 cm	5. 24 cm
2. 14 cm	4. 24 cm	6. 20 cm

Página 127

7. 22 cm^2	9. 42 cm^2	11. 15 cm^2
8. 24 cm^2	10. 45 cm^2	12. 27 cm^2

13. A y C
14. F y H

Página 128

1. 12,56 cm	13. 12 cm
2. 37,68 cm	14. 8 cm
3. 56,52 cm	15. 5 cm
4. 43,96 cm	16. 30 cm
5. 3,14 m	17. 50 cm

10. z, p; w, q; s, t; r, u
11. y, r; x, s; q, w; p, v

14. $x = 55°$
15. $y = 30°$
16. $\alpha = 120°$
17. $\alpha = 48°$
18. $\alpha = 65°$
19. $\alpha = 130°$

Página 98

20. **b.** 70°
c. Son iguales ya que son correspondientes
c. Sí
21. **a.** Son suplementarios
b. 70° y 110°, respectivamente
c. Sí
22. **b.** Son iguales **c.** No

Página 99

23. $x = 125°$; $y = 125°$; $z = 125°$
24. $x = 145°$; $y = 52°$ **a.** No son paralelas
25. $x = 50°$; $y = 130°$
26. $y = 120°$; $x = 60°$

Página 101

1. $x = 80°$ **2.** $x = 72°$ **3.** $x = 170°$
4. 900° **5.** 1.080° • 1.800° **6.** 1.440°
7. 720° **8.** 1.800° **9.** 360°

Página 103

1. 4 m **3.** 60°
2. 180° **4.** El de la circunferencia exterior
5. Diámetro **8.** Cuatro **11.** 13,3%
6. Corona circular **9.** Doce
7. 2,5 cm **10.** 16,6%

Página 113

1. Regular
2. Irregular
3. Irregular
4. Regular
5. Que son congruentes
6. Que son congruentes

8. Aumentan
9. Disminuyen

Página 118

1. B **4.** D
2. C **5.** B
3. A **6.** A

Taller de evaluación 1

Números positivos y negativos

1. D **2.** D
3. A **4.** A
5. C **6.** C
7. B **8.** C

Potencias

9. C **10.** B
11. B **12.** D
13. C **14.** A

Números decimales y fracciones

15. D **16.** B
17. C **18.** C
19. A **20.** D
21. C **22.** D
23. D

Ecuaciones

24. D **25.** D
26. D **27.** A
28. B **29.** C
30. C **31.** D

Geometría

32. B **33.** A
34. C **35.** C
36. D **37.** D
38. B

Unidad 6 Medición

Página 116

1. a. 16 cm b. 16 cm^2
2. 20 cm^2
3. 20 cm
4. 26 cm y 32 cm^2, respectivamente

Página 117

1. 80 rollos
2. 9.600.000 kg
3. 1 km = 1.000 m
4. 10.000.000 kg

Página 118

1. 20 cm
2. 14 cm
3. 20 cm
4. 24 cm
5. 24 cm
6. 20 cm

Página 119

7. 22 cm^2
8. 24 cm^2
9. 42 cm^2
10. 45 cm^2
11. 15 cm^2
12. 27 cm^2

13. A y C
14. F y H

Página 120

1. 12,56 cm
2. 37,68 cm
3. 56,52 cm
4. 43,96 cm
5. 3,14 m
6. 8,792 m
7. 5,495 m
8. 3,768 m
9. 19,72 km
10. 1,256 km
11. 4,71 km
12. 628 km
13. 12 cm
14. 8 cm
15. 5 cm
16. 30 cm
17. 50 cm
18. 50 cm
19. 24 m
20. 10 m
21. 0,1 km
22. 1.000 km
23. 200 km
24. 150 km

Página 121

26. 9,14 m
27. 8,355 m
28. 13,065 m
30. 125,6 μ
31. 75,36 μ
32. 251,2 μ

Página 122

1. 200,96 cm^2
2. 50,24 cm^2
3. 4,5216 cm^2
4. 271,579 cm^2
5. 0,2826 cm^2
6. 112.163,9 cm^2
7. 30,96 cm^2
8. 0,0907 cm^2
9. 32,1536 cm^2
10. 1.256 cm^2
11. 2.978,73 cm^2
12. 0,07065 cm^2

13. 4 μ
14. 2 μ
15. 10 μ
16. 5 μ
17. 0,1 μ
18. 9 μ
19. 6 μ
20. 0,2 μ
21. 12 μ
22. 100 μ
23. 15 μ
24. 13 μ

25. 2,257 m aproximadamente
26. 162,77 m

Página 123

27.

Nº de divisiones de la circunferencia	Ángulo del sector circular	Fracción del sector circular	Área
1	360º	1	$\pi \cdot r^2$
2	$\frac{360º}{2} = 180º$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \pi \cdot r^2$
3	120º	$\frac{1}{3}$	$\frac{\pi r^2}{3}$
4	90º	$\frac{1}{4}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
5	72º	$\frac{1}{5}$	$\frac{\pi r^2}{5}$
6	60º	$\frac{1}{6}$	$\frac{\pi r^2}{6}$
10	36º	$\frac{1}{10}$	$\frac{\pi r^2}{10}$

a. Aumenta al doble

28. 0,785 cm^2 **29.** 1,047 cm^2 **30.** 2,355 cm^2

31.

Círculo	Radio	Área	Área de corona circular
Celeste	15	706,5	$225\pi - 100\pi = 125\pi$
Roja	10	314	$100\pi - 25\pi = 75\pi$
Verde	5	78,5	$25\pi - 4\pi = 21\pi$

32. Área = $36\pi - 28{,}09\pi = 7{,}91\pi$ aproximadamente

Página 124

1. Á = 15,25 cm^2; P = 29,7 cm
2. Á = 60,56 cm^2; P = 36,56 cm
3. Á = 200,96 cm^2; P = 114,24 cm
4. Á = 20,52 cm^2; P = 18,84 cm
5. Á = 7,63 cm^2 aproximadamente
6. Á = 5,78 cm^2 aproximadamente

Página 125

7. Á = 0,86 cm^2 aproximadamente
8. Á = 5,16 cm^2 aproximadamente
9. Á = 24π cm^2; P = 45,68 cm
10. Á = 32π cm^2; P = 50,24 cm
11. Á = 18π cm^2; P = 37,68 cm
12. Á = 9π cm^2; P = 37,68 cm
13. Á = 20π cm^2; P = 37,38 cm
14. Á = 25π cm^2; P = 51,4 cm

15. a. 15 m^2
    b. 0,785 m^2
    c. 13,43 cm^2
    d. 3 tarros
    e. $2.550

Página 127

1. El segundo
2. El primero
3. 4 cm^3
4. 16 cm^3
5. 30 cm^3
6. 16 m^3
7. 1 mm
8. 10 m = 1 dam
9. 1 dm^3
10. Hectómetro
11. Metro
12. Cubo, 1 km
13. 1.000.000

Página 129

2. El del medio
3. a. 6.000 cm^2 b. 7.800 cm^2
4. No
   a. 1.500 cm^2 b. 1.950 cm^2 c. 5.625 cm^3
5. a. 2,24 cm^2 b. 3.234 cm^2

Página 130

1. a. 9 b. 9
2. a. 28 cm^2 b. 18 c. 392 cm^3

Página 131

3. a. 120 cm^2 b. 61,95 cm^2 c. 247,8 cm^3
4. a. 10, 7 y 15 c. 16, 10 y 24
   b. 12, 8 y 18 d. 2n, n + 2 y 3n
5. a. 14 b. 21 c. 9
6. 1.987,2 cm^3
7. 7.747,5 cm^2

Página 132

1. Hexágono
2. Octágono
3. Hexágono

Página 133

4. 1.536 cm^2
5. 372,7 cm^2
6. 666,67 cm^3
7. a. 256 cm^3 b. 374,4 cm^3
8. a. 241,4 cm^2 b. 166,67 cm^3
9. La pirámide

Página 134

1. 2.826 cm^2
2. 7.065 cm^2

Página 135

3. 2.512 cm^2
4. 1.808,64 cm^2
6. a. Aumenta el área lateral al doble y el área aumenta al cuádruple.

b. Aumenta el área lateral al doble.
c. El área de las bases disminuye a la cuarta parte.
d. El área de las bases aumenta al cuádruple.

7. a. 40 cm
b. 1.884 cm^2
c. 4.396 cm^2

Página 136

1. 240º
2. 20 cm
3. 3 cm

Página 137

1. 75,36 cm^2
2. 351,68 cm^2
3. h; a; bases; cono; pirámide; cono

Página 139

1. 240 cm^3
2. 502,4 cm^3
3. a. 47,1 cm^3
b. 41,54 cm^3
4. 904,32 cm^3
5. 0,96 cm
6. 1,172,3 cm^3
7. a. 188,4 cm^3
b. 452,16 cm^3
c. 640,56 cm^3
8. a. 1.000 cm^3
b. 523,3 cm^3
c. 476,6 cm^3

Página 141

2. 8 caminos de 3 aristas; 8 caminos de 4 aristas
3. Solo 2

Página 144

1. C
2. A
3. A
4. B
5. D
6. C
7. B
8. C

Página 145

1. 196,25 cm^2
2. 126,6 cm^2
3. a. 39 cm^2 b. 93 cm^2
4. 29,3 cm^3

Unidad 7 Movimientos en el plano

Página 146

	Nº lados	Suma de medidas de ángulos interiores
4. Cuadrado	4	360
5. Pentágono	5	520
6. Hexágono	6	720
7. Heptágono	7	900

Página 149

3. Sí, ya que no cambia ni la forma ni el tamaño solo la posición.
4. Sí
5. No
6. Sí
7. Sí

Página 151

1. 4 cuadrados hacia el este.
2. 4 cuadrados hacia el oeste y uno hacia el norte.

Página 154

1. Si, corresponde a rotación.
2. Si, corresponde a rotación.

Página 155

3. Si, corresponde a rotación.
4. Si, corresponde a rotación.

Página 157

7. Una teselación semirregular.
8. Un hexágono regular y un triángulo equilátero.

Página 161

1. Rotaciones y traslaciones.
2. Rotaciones y traslaciones

Página 164

1. D
2. D
3. C
4. C
5. D
6. D

Página 165

8. Si

Unidad 8 Relaciones proporcionales

Página 166

1. $\frac{6}{14}$; $\frac{9}{21}$ 3. $-\frac{10}{24}$; $-\frac{15}{36}$

2. $\frac{4}{18}$; $\frac{6}{27}$ 4. $-\frac{2}{60}$; $-\frac{3}{90}$

5. 0,05 6. –0,2 7. 0,33 8. 0,999

Página 167

a. 123 g
b. 17,22 g
c. 152 kcal
d. 82%
e. 90,243902 g

Página 169

1. 5 3. –5 5. 90
2. 12 4. 9 6. 4.000

7. x = 8 9. x = 6 11. x = 22
8. x = 35 10. x = 6 12. x = 30

13. Sí 15. Si 17. Sí
14. Sí 16. Sí 18. No
19. 30, 60, 90
20. 48 cm, 80 cm, 112 cm

Página 171

Fotografía 3 es proporcional.

4.

	Tiempo trascurrido en años			
	1	5	10	15
Padre	41	45	50	55
Hijo	21	25	30	35

5. Las edades no son proporcionales.

Página 173

Las entradas para el partido de Copa Davis, Chile – Australia, para volver al grupo mundial, tienen el valor de $ 24.000.

1. a. $ 120.000
1. b. y = 24.000 · x, donde
1. c. Variable dependiente: y: representa el valor a cancelar por el total de entradas.

Variable dependiente: x: cantidad de entradas compradas.

1. d. Completa la siguiente tabla según corresponda.

Página 175

1.

Cantidad de helados	1	2	3	4	8	9	10
Precio ($)	260	520	780	1.040	2.080	2.340	2.600

a. Dividir el precio por $260
b. Multiplicar $260 por la cantidad
c. 14 helados
d. k = 260

2.

A	B
8	2
12	3
16	4
20	5
24	6

a. Una línea recta que pasa por el origen

Página 176

4. a. Sí b. Sí c. No d. No

5. b. El auto rojo, porque va a 40 km/h
c. En 2 horas
d. Verde: 30 km/h Rojo: 40 km/h
e. 300 km
f. 12 horas
g. Cada auto por separado recorre lo mismo cada intervalo de tiempo.

6. 8º A: $91.452 aproximadamente
8º B: $82.742 aproximadamente
8º C: $95.806 aproximadamente

Página 177

7. a. Si b aumenta, el perímetro aumenta. Si b disminuye el perímetro también.

8. Antonia: $140.488 aproximadamente
Alejandra: $175.610 aproximadamente
Andrea: $163.902 aproximadamente

9. a. Disminuye 1 litro por cada 18 kilómetros

Página 179

1. a. 500 km

b.

Velocidad (km/h)	Tiempo (h)
100	5
50	10
25	20
$16,\overline{6}$	30
12,5	40

c. 62,5 km/h

d. $16,\overline{6}$ h

e. Una línea curva

f. 100 horas

2. a. No b. No c. Sí d. No

Página 180

3. a. Siempre se obtiene el mismo resultado.

4. 20; No; No; No

Página 181

10. Problema 1: Sí; inversa; 75
Problema 2: Sí; directa; 10 kg
Problema 3: Sí; inversa; 3,6 días

Página 183

4. Sí, circunferencias y polígonos regulares en general.
5. 6,25 veces

6. a. AB : DE = 4 : 2 = 2 : 1
BC : EF = 5 : 2,5 = 2 : 1
AC : DF = 3 : 1,5 = 2 : 1
Se mantiene la razón
b. 6 : 1,5 = 4 : 1

Página 184

1. 0,034 m = 3,4 cm
2. 15.250.000 cm = 152.500 m
= 152,5 km

Página 185

3. 4,3 m
4. 1,9 m; 0,9 m
5. 0,4 m; 1,3 m
6. 1,8 m; 0,7 m
7. 1,1 m; 0,6 m
8. 1,6 m
9. 3,75 m; 950 m; 15.000 m; 60 km; 60 km

10. a. 10 cm • 5,0 cm
b. 101 m • 50 m
c. 8 m • 10 m
d. 50 cm^2 : 5.000 m^2 ▶ 1 cm^2 : 100 m^2

Página 187

1. 500
2. 3,375
3. 583,2
4. 2.188,8
5. 3.430
6. 11.280
7. 108.000
8. 900.000

10. 80 preguntas correctas
100 preguntas correctas

11. Hombres: 49,26885%
Mujeres: 50,73%
12. 60%

Página 188

1. $3.960.000 2. El de $630.000

3. 150 g ▶ + 15% ▶ 172,5 g
200 g ▶ + 15% ▶ 230 g
250 g ▶ + 15% ▶ 287,5 g
500 g ▶ + 15% ▶ 575 g

4. a. 900 kilos (0,9 toneladas)
b. No

Página 189

5. $5.200
6. a. $9.600 b. $9.120
8. 45%
9. En 80 cm
10. $4.056
12. $25.691
13. a. $1.507.650

Página 191

1. a. $450 b. $11 c. $1.500

2. a. A: $8.146 con IVA
B: $4.079 con IVA
C: $5.018 con IVA
D: $10.629 con IVA
E: $5.414 con IVA

b. $33.285 c. Sí

Página 193

1. $1.244.400
2. $37.380.000

Página 194

Cálculo mental

1. 57	6. 15	11. 1.000	16. 150
2. 64	7. 80	12. 2.000	17. 50
3. 16	8. 5	13. 100	18. 100
4. 25	9. 100	14. 10	19. 50
5. 7	10. 500	15. 10	

Uso calculadora

1. $132.000	5. $372.882	9. $160.941
2. $209.880	6. $3.080.000	10. $693.158
3. $112.640	7. $415.422	11. $796.320
4. $288.112	8. $545.429	12. $1.323.882

Página 196

1. C	3. A	5. B	7. B	9. D	11. B
2. B	4. D	6. B	8. C	10. C	12. B

Página 197

1. $550 2. $17.227 3. $285.600

Unidad 9 Tratamiento de la información

Página 198

3. a. 5 b. 5 c. 5

Página 199

1. a. 68.493 personas
b. La etnia mapuche.

Página 201

2. a. Circular b. Barras c. Histograma
3. a. 25% b. 43,75%

Página 203

a. 22
b. 24
c. 62,7%
d. 38%
e. Sábado; 24%
f. 8 personas aproximadamente

Página 204

x	3	5	8	12	20
y	72.000	120.000	192.000	288.000	480.000

3. 3 comunas
4. Independencia, Santiago Sur y Cerillos
5. 2 comunas, La Florida y Las Condes
6. Pudahuel
7. 5 comunas
8. 2 comunas
9. 6 comunas
10. Una comuna

Página 206

1. Promedio: aproximadamente 36,4
   Moda: aproximadamente 35,75

1. Promedio: aproximadamente 4,8
   Moda: aproximadamente 47,5

Página 210

1. a. Entre 35 y 54 años

Página 211

2. V 3. V 4. V 5. V
6. a. El 9% de los encuestados no están de acuerdo en que el hombre y la mujer contribuyan de igual manera al ingreso familiar.
   b. 1.500 personas
   c. 105 personas

Página 213

4. Probabilidad de obtener un 1 ► 1/6
   Probabilidad de obtener un 2 ► 1/6
   Probabilidad de obtener un 3 ► 1/6
   Probabilidad de obtener un 4 ► 1/6
   Probabilidad de obtener un 5 ► 1/6
   Probabilidad de obtener un 6 ► 1/6

5. Experimento aleatorio
6. Espacio muestral = {1, 2, 3, 4, 5, 6}; Eventos elementales = {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}

Página 215

1. Espacio muestral ► 35 niños. Resultados equiprobables,
2. Espacio muestral ► 9 bolitas en la caja. Resultados equiprobables.
3. Espacio muestral ► todas las cartas del naipe español. Resultados equiprobables.
4. Espacio muestral ► las 6 bolitas de la urna. Resultados equiprobables.

Página 217

1. 7/14
2. 7/14
3. 3/14
4. 3/6
5. 5/6
6. 7/15
7. 5/15
8. 3/15
9. 8/15
10. 12/15
11. 10/15

Página 220

1. = promedio (C4:C6)
2. = mediana (D4:D6)

Página 222

1. D 2. B 3. B 4. A 5. D 6. A 7. D 8. B

Página 223

1. a. Enero: aprox. 703.665 personas
Febrero: aprox. 613.489 personas.
Marzo: aprox. 586.139 personas.
Abril: aprox. 513.701 personas.
Mayo: aprox. 495.963 personas.
Junio: aprox. 468.613 personas.
Julio: aprox. 586.139 personas.
Agosto: aprox. 541.052 personas.
2. a. Básica, Básica.

Taller de evaluación 2

Medición

1. D
2. B
3. B
4. A
5. D
6. A
7. D
8. B
9. C
10. A
11. B

Movimientos en el plano

12. D
13. D
14. A
15. B
16. B

Medición

17. D
18. C
19. B
20. D
21. B
22. D
23. C
24. C
25. A

Tratamiento de la información

26. C
27. A
28. D
29. C
30. B
31. B
32. B