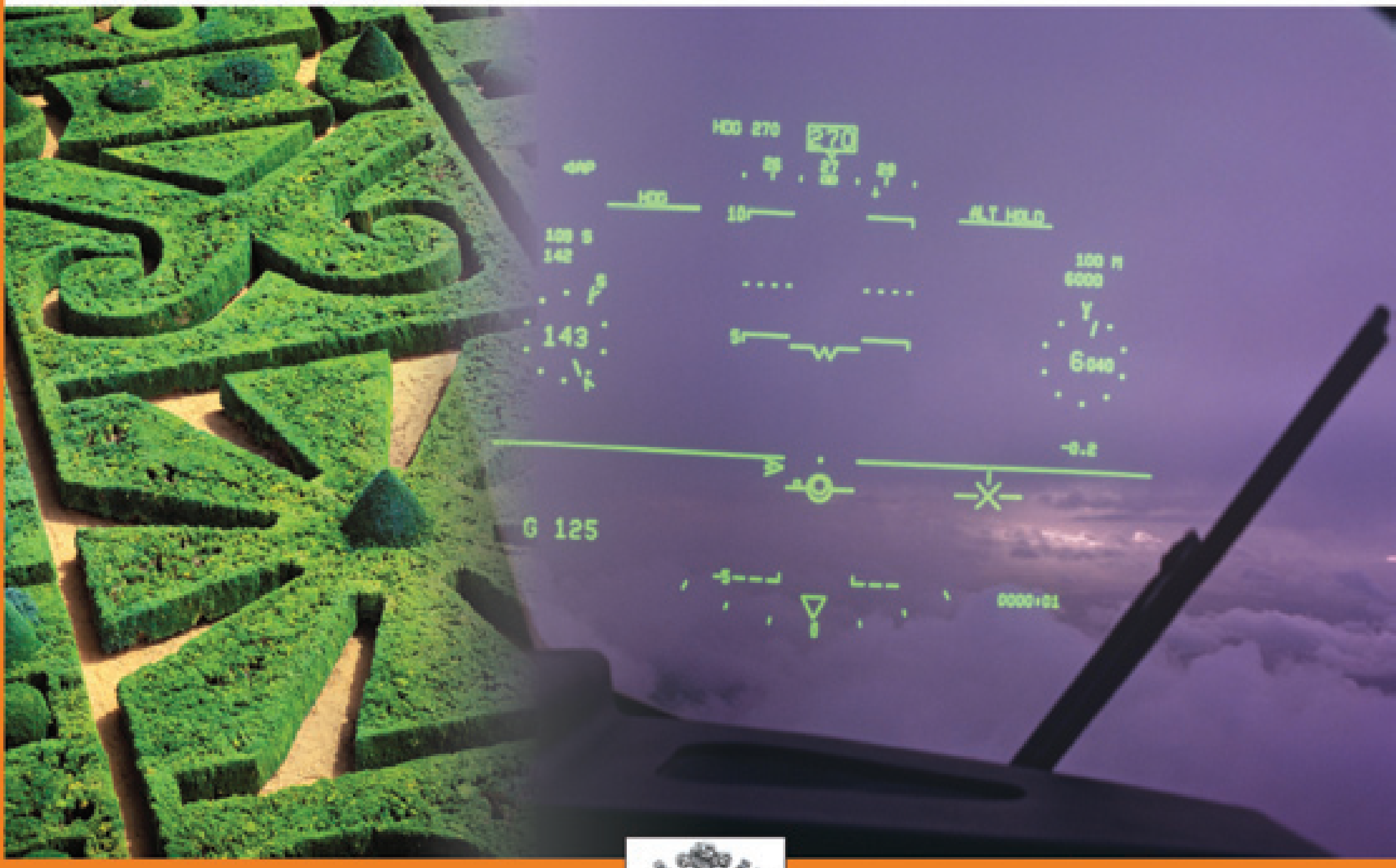
TEXTO PARA EL ESTUDIANTE

7º Educación Básica

Matemática

Javiera Setz Mena • Florencia Darrigrandi Navarro



AÑO 2011

EDICIÓN ESPECIAL PARA
EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN
PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Santillana

MATEMÁTICA 7º Educación Básica TEXTO PARA EL ESTUDIANTE Año 2011 Santillana

Nombre: ____________________

Curso: ____________________

Escuela o Liceo: ____________________

El material didáctico **Matemática 7°,**
para **Séptimo Año de Educación Básica,** es
una obra colectiva, creada y diseñada por
el Departamento de Investigaciones Educativas
de Editorial Santillana, bajo la dirección de:
MANUEL JOSÉ ROJAS LEIVA

Coordinación del proyecto:
EUGENIA ÁGUILA GARAY

Coordinación Área Matemática:
VIVIANA LÓPEZ FUSTER

Edición:
VIVIANA LÓPEZ FUSTER

Autoras:
JAVIERA SETZ MENA
FLORENCIA DARRIGRANDI NAVARRO

Revisión de especialista:
LORNA JIMÉNEZ MARTÍNEZ

Corrección de estilo:
ISABEL SPOERER VARELA
ASTRID FERNÁNDEZ BRAVO

Documentación:
PAULINA NOVOA VENTURINO
JUAN CARLOS REYES LLANOS

La realización gráfica ha sido efectuada bajo la dirección de:
VERÓNICA ROJAS LUNA

Coordinación gráfica:
CARLOTA GODOY BUSTOS

Coordinación licitación:
XENIA VENEGAS ZEVALLOS

Diseño y diagramación:
MARIELA PINEDA GÁLVEZ

Ilustraciones:
MARTÍN OYARCE GALLARDO

Fotografías:
ARCHIVO SANTILLANA
CÉSAR VARGAS ULLOA
JORGE QUITO SOTO
LATINSTOCK

Cubierta:
XENIA VENEGAS ZEVALLOS

Producción:
GERMÁN URRUTIA GARÍN

Dr. Aníbal Ariztía 1444, Providencia, Santiago (Chile)
PRINTED IN CHILE
Impreso en Chile por World Color S.A.
ISBN: 978 - 956 - 1486 - 7
Inscripción N° 176.935
www.santillana.cl

Referencias de los Textos *Matemática 7* y *Matemática 8*, Educación Básica, Proyecto punto cl, de los autores: Patricia Urzúa Figueroa, Maryorie Benavides Simon, Alexandra Gederlini Gollerino, María José González Clares, Gladys Sepúlveda Romero, Cristián Vergara Bize. Santillana del Pacífico S.A. de Ediciones, Santiago, Chile, 2007.

TEXTO PARA EL ESTUDIANTE

Matemática

7º Educación Básica

JAVIERA SETZ MENA

LICENCIADA EN MATEMÁTICA,

PROFESORA DE MATEMÁTICA, EDUCACIÓN MEDIA,

LICENCIADA EN EDUCACIÓN

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE

FLORENCIA DARRIGRANDI NAVARRO

LICENCIADA EN MATEMÁTICA CON MENCIÓN EN ESTADÍSTICA,

MAGÍSTER EN ESTADÍSTICA,

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE.

GOBIERNO DE CHILE

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Presentación del texto

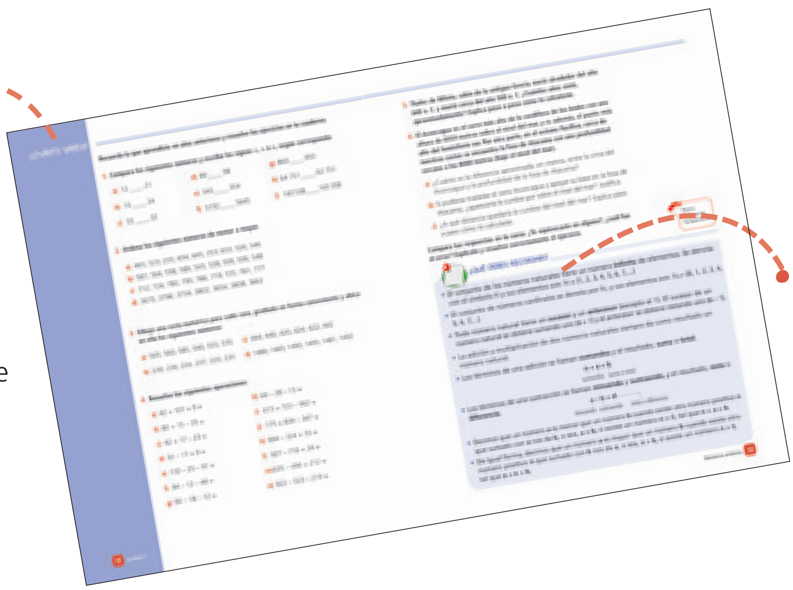
Te damos la bienvenida a este nuevo año escolar. El texto **Matemática 7** te invita a comprender que la matemática es parte del mundo que te rodea. A través de sus 7 unidades te enfrentarás a diversas situaciones en las que podrás explorar, aprender y construir conceptos relacionados con los números y las operaciones, geometría, álgebra, datos y azar. En ellas encontrarás las siguientes páginas y secciones:

Páginas de inicio

CONVERSEMOS DE...
Sección que te plantea preguntas relacionadas con la imagen y con los contenidos de la unidad que te permitirán exponer tus ideas, dar opiniones y argumentar a partir de tus experiencias.

- **EN ESTA UNIDAD PODRÁS...**
En esta sección conocerás los principales objetivos que se espera que logres con el desarrollo de la unidad.

Te invitamos a ingresar al hipertexto donde encontrarás recursos y actividades interactivas que complementarán tu aprendizaje.



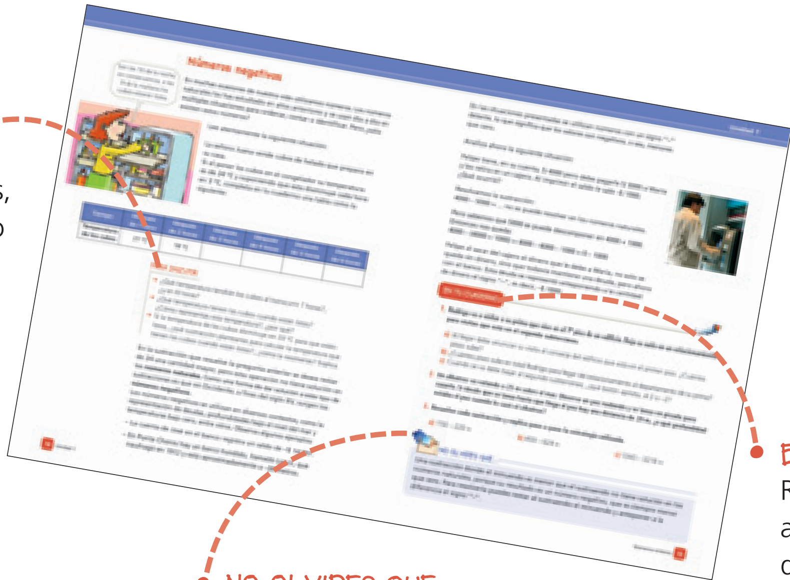
- **¿CUÁNTO SABES?**
Podrás resolver ejercicios y problemas que te ayudarán a recordar conocimientos que serán la base para el desarrollo de la unidad.

¿QUÉ DEBES RECORDAR?
Encontrarás el resumen de los principales conceptos trabajados en años anteriores y que te servirán como apoyo para los aprendizajes que se espera que logres en la unidad.

Páginas de desarrollo

En estas páginas podrás explorar y construir nuevos conceptos y aplicarlos para resolver diversas situaciones, actividades y problemas.

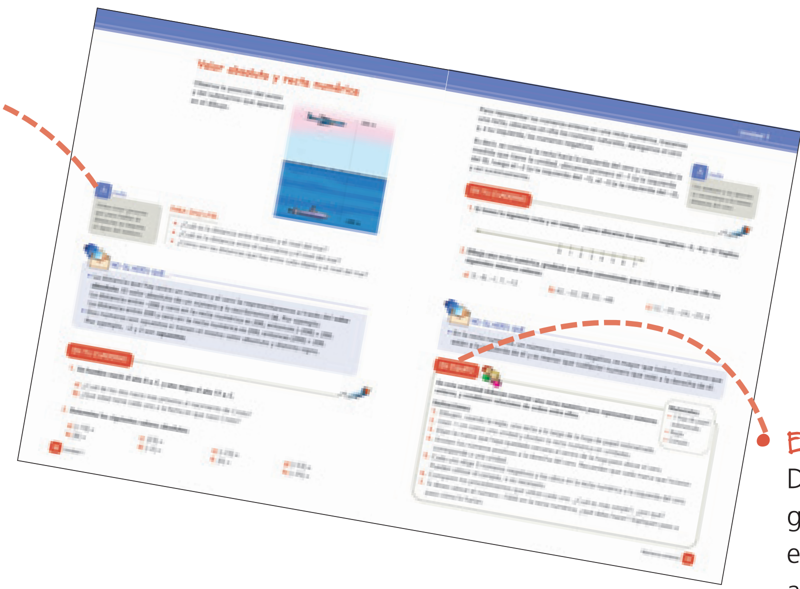
PARA DISCUTIR
Por medio de preguntas, explorarás el contenido matemático que aprenderás, pondrás en práctica lo que ya sabes, compartirás tus ideas y extraerás conclusiones.



EN TU CUADERNO
Resolverás variadas actividades para ir descubriendo los conceptos y reforzar así tu aprendizaje.

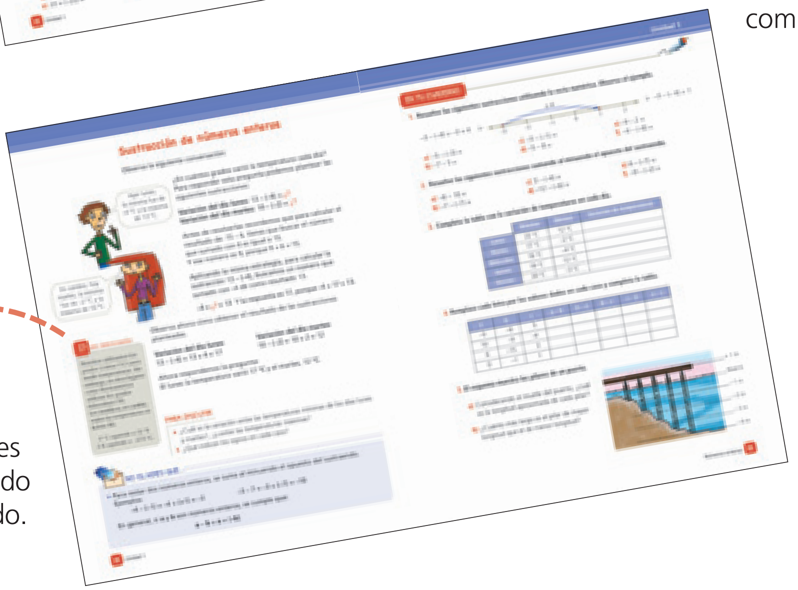
NO OLVIDES QUE...
Encontrarás explicaciones, descripciones o definiciones que destacan y precisan lo que vas aprendiendo.

AYUDA
Te recuerda un contenido o procedimiento.

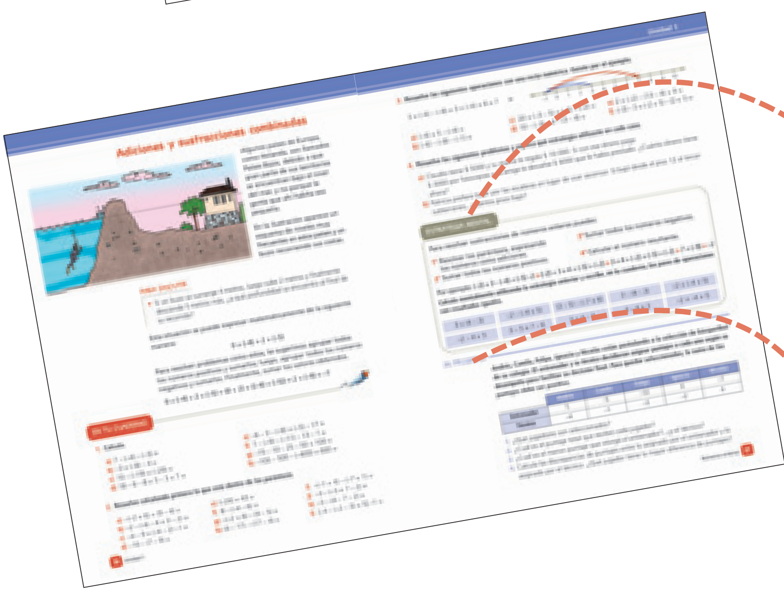


EN EQUIPO
Desarrollarás en grupo entretenidas e interesantes actividades que te permitirán progresar en tu aprendizaje.

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS
Aprenderás a ocupar la calculadora para resolver diversos ejercicios y a utilizar planillas de cálculo o programas computacionales.



DATO INTERESANTE
Conocerás algunas relaciones o aplicaciones interesantes del contenido que se está desarrollando.



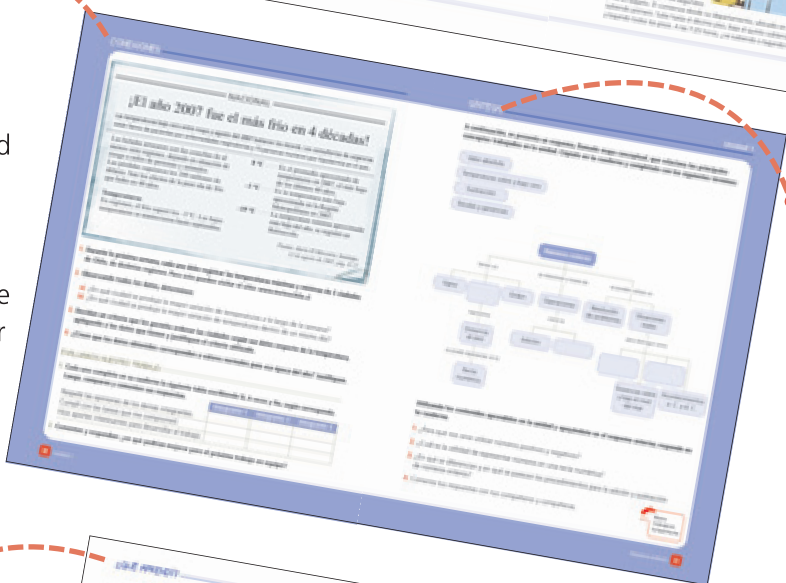
ESTRATEGIA MENTAL
Encontrarás diversas estrategias de cálculo mental e imaginación espacial.

MI PROGRESO
Resolverás actividades que te permitirán evaluar tu progreso en el logro de los aprendizajes.

Páginas de cierre

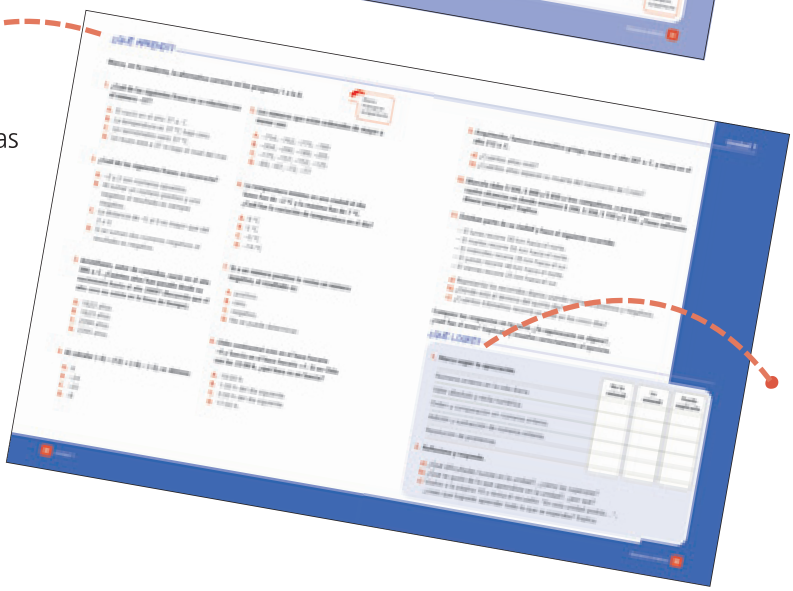
- **BUSCANDO ESTRATEGIAS**
  Observarás un problema resuelto paso a paso a través de una determinada estrategia. Podrás aprender y practicar la estrategia utilizada y buscar otras que te permitan encontrar la solución.

- **CONEXIONES**
  A partir de una noticia o tema, desarrollarás en equipo una actividad que te permitirá aplicar lo que aprendiste en la unidad. Además, te invitamos a evaluar tu actitud y la de cada integrante del grupo para que puedas mejorar tu forma de trabajar.



- **SÍNTESIS**
  Podrás organizar y sintetizar lo aprendido utilizando un organizador gráfico. Además, aclararás los conceptos trabajados respondiendo preguntas sobre estos y sus relaciones.

- **¿QUÉ APRENDÍ?**
  En estas dos páginas responderás preguntas de selección múltiple y actividades de desarrollo para evaluar lo que has aprendido en la unidad.



- **¿QUÉ LOGRÉ?**
  Evaluarás y reflexionarás sobre los aprendizajes que adquiriste en esta unidad.

Índice

UNIDAD

1 Números enteros

EN ESTA UNIDAD PODRÁS...

- Interpretar y comunicar información que utilizan los números enteros.
- Reconocer que en el conjunto de los números enteros es posible resolver problemas que no tienen solución en los números naturales.
- Representar números enteros en la recta numérica y determinar las relaciones de orden entre ellos.
- Interpretar las operaciones de adición y sustracción en el ámbito de los números enteros.
- Determinar procedimientos para calcular adiciones y sustracciones con números enteros.
- Resolver problemas en contextos variados en los que se utilizan adiciones y sustracciones con números enteros.

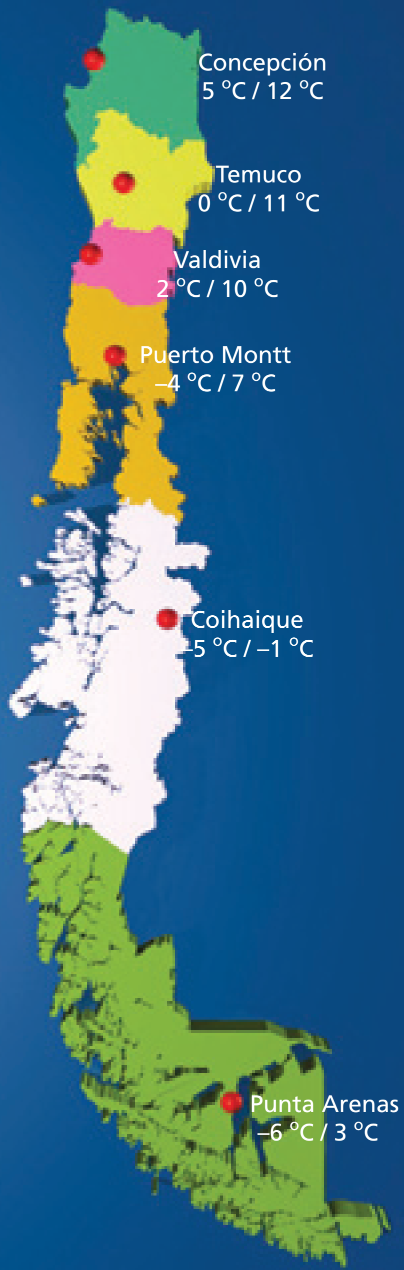
CONVERSEMOS DE...

Cuando ves el pronóstico del tiempo, ¿en qué te fijas?

En él se dan a conocer distintos indicadores para cada región del país, como las temperaturas mínimas y máximas, la presión atmosférica, la humedad relativa del aire, la cantidad de agua caída, las condiciones del viento y del mar y el índice de radiación ultravioleta, entre otros.
Estos indicadores nos sirven, por ejemplo, para saber si al día siguiente hará frío o calor, si estará soleado o nublado o si lloverá, con lo que podemos prepararnos para salir abrigados o con paraguas, usar bloqueador solar, limpiar las canaletas, cuidar las siembras y los animales y asegurar las embarcaciones.

Observando el mapa sinóptico, responde:

1. ¿Qué significa que la Antártica tendrá una temperatura mínima de –5 °C?, ¿y que en Temuco la temperatura mínima será de 0 °C?
2. ¿Cuánto es la diferencia entre la temperatura mínima y la máxima anunciadas para Concepción?, ¿y para Punta Arenas?
3. Si la temperatura máxima pronosticada para Valparaíso disminuyera 10 grados en la noche, ¿a cuánto descendería la temperatura?, ¿y si esto ocurriera en Puerto Montt?
4. Si la temperatura mínima anunciada para La Serena aumentara 15 grados cerca del mediodía, ¿a cuánto ascendería la temperatura?, ¿y si esto ocurriera en Coihaique?



Ahora trabaja en tu hipertexto

Recuerda lo que aprendiste en años anteriores y resuelve los ejercicios en tu cuaderno.

1. Compara los siguientes números y escribe los signos <, > o =, según corresponda:

a) 12 ____ 21	d) 89 ____ 98	g) 860 ____ 950
b) 10 ____ 24	e) 345 ____ 354	h) 64 751 ____ 62 751
c) 33 ____ 32	f) 5732 ____ 5645	i) 143 538 ____ 143 358

2. Ordena los siguientes números de menor a mayor.

a) 465; 523; 235; 654; 645; 253; 653; 526; 546

b) 587; 564; 598; 589; 543; 528; 509; 506; 548

c) 712; 724; 780; 795; 786; 719; 725; 781; 777

d) 3675; 3796; 3734; 3802; 3654; 3808; 3662

3. Dibuja una recta numérica para cada caso, gradúala en forma conveniente y ubica en ella los siguientes números:

a) 565; 560; 585; 540; 555; 570

b) 239; 236; 224; 237; 220; 235

c) 444; 440; 420; 424; 422; 442

d) 1486; 1483; 1490; 1495; 1481; 1492

4. Resuelve las siguientes operaciones:

a) 42 + 101 + 9 =

b) 80 + 15 – 35 =

c) 42 + 17 – 23 =

d) 32 – 17 + 9 =

e) 132 – 25 – 91 =

f) 84 – 12 – 48 =

g) 90 – 18 – 12 =

h) 64 – 28 – 13 =

i) 673 + 723 – 962 =

j) 175 + 834 – 347 =

k) 894 – 324 + 55 =

l) 927 – 716 + 24 =

m) 635 – 490 + 212 =

n) 922 – 523 – 219 =

5. **Thales de Mileto, sabio de la antigua Grecia, nació alrededor del año 640 a. C. y murió cerca del año 560 a. C. ¿Cuántos años vivió, aproximadamente? Explica paso a paso cómo lo calculaste.**

6. **El Aconcagua es el cerro más alto de la cordillera de los Andes con una altura de 6959 metros sobre el nivel del mar, y es además, el punto más alto del hemisferio sur. Por otra parte, en el océano Pacífico, cerca de nuestras costas se encuentra la fosa de Atacama con una profundidad cercana a los 8000 metros (bajo el nivel del mar).**

   a) ¿Cuánto es la diferencia aproximada, en metros, entre la cima del Aconcagua y la profundidad de la fosa de Atacama?

   b) Si pudieras trasladar el cerro Aconcagua y apoyar su base en la fosa de Atacama, ¿aparecería la cumbre por sobre el nivel del mar? Justifica.

   c) ¿A qué distancia quedaría la cumbre del nivel del mar? Explica paso a paso cómo lo calculaste.

Compara tus respuestas en tu curso. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.

Ahora trabaja en tu hipertexto

¿QUÉ DEBES RECORDAR?

- El conjunto de los números naturales tiene un número **infinito** de elementos. Se denota con el símbolo $\mathbb{N}$ y sus elementos son: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...\}$
- El conjunto de números cardinales se denota por $\mathbb{N}_0$ y sus elementos son: $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,...\}$
- Todo número natural tiene un **sucesor** y un **antecesor** (excepto el 1). El sucesor de un número natural se obtiene sumando uno (**n** + 1) y el antecesor se obtiene restando uno (**n** – 1).
- La adición y multiplicación de dos números naturales siempre da como resultado un número natural.
- Los términos de una adición se llaman **sumandos** y el resultado, **suma** o **total**.

$$\underbrace{\mathbf{n} + \mathbf{a}}_{\text{sumandos}} = \underbrace{\mathbf{b}}_{\text{suma o total}}$$

- Los términos de una sustracción se llaman **minuendo** y **sustraendo,** y el resultado, **resta** o **diferencia**.

$$\underset{\text{minuendo}}{\mathbf{a}} - \underset{\text{sustraendo}}{\mathbf{b}} = \underset{\text{resta o diferencia}}{\mathbf{d}}$$

- Decimos que un número **a** es menor que un número **b** cuando existe otro número positivo **n** que sumado con **a** nos da **b**, o sea, **a** < **b,** si existe un número **n** > 0, tal que **n + a = b**.
- De igual forma, decimos que un número **a** es mayor que un número **b** cuando existe otro número positivo **n** que sumado con **b** nos da **a**, o sea, **a** > **b,** si existe un número **n** > 0, tal que **a = n + b**.

Números negativos

En muchas ocasiones de nuestra vida utilizamos números. Los números naturales los has estudiado en años anteriores y se usan día a día en múltiples situaciones para ordenar, contar o identificar. Pero ¿solo existen estos números?

Lee atentamente la siguiente situación:

La señora Juana vende cubos de helado que prepara en su casa.
Si al poner los cubos en el congelador su temperatura es de 24 °C y suponiendo que esta disminuye cada hora en 3 °C, completa en tu cuaderno una tabla como la siguiente:

Tiempo	Después de 1 hora	Después de 2 horas	Después de 3 horas	Después de 4 horas	Después de 5 horas	Después de 6 horas
Temperatura de los cubos	21 °C	18 °C				

PARA DISCUTIR

- ¿Qué temperatura tendrán los cubos al transcurrir 7 horas?, ¿y en 8 horas?
- ¿Qué temperatura tienen los cubos cuando están listos? ¿Cómo representas esta temperatura?, ¿por qué?
- Si la temperatura de los cubos disminuye en 33 °C para que estén listos, ¿qué sustracción plantearías para calcular la temperatura que tienen los cubos cuando están listos?, ¿cómo la resolverías? Explica.

En la sustracción que resuelve la pregunta anterior se desea restar de 24 una cantidad mayor, pero esta operación no tiene solución en los **números naturales**. Como una forma de dar solución a este tipo de sustracciones es que en Occidente, a fines del siglo XV, surgen los **números negativos**.
Los números negativos se utilizan en diversos contextos, como la representación de deudas, profundidades bajo el nivel del mar y temperaturas bajo cero, entre otros. Observa algunos ejemplos:

– La cuenta de José en el banco registra un saldo de –$ 14 597.

– En Punta Choros hay un barco hundido, llamado *Lynch*, que naufragó en 1912 y está aproximadamente a –30 metros.

En las situaciones presentadas se utilizan números con un signo "–" delante, lo que significa que los valores son negativos, o sea, menores que cero.

Analiza ahora la siguiente situación:

Felipe tiene, en su cuenta, \$ 4000 pero debe pagarle \$ 5000 a María y los retira en un cajero. Al imprimir el saldo le sale –\$ 1000. ¿Qué ocurrió?

Resolvamos la sustracción:
4000 – 5000 = ... no se puede resolver en los números naturales.

Pero sabemos que 5000 se puede descomponer en 4000 + 1000. Entonces nos queda:
4000 – (4000 + 1000) = 4000 – 4000 – 1000 = 0 – 1000

Felipe al sacar del cajero el dinero que le debe a María, no solo se queda sin dinero, sino que todavía mantiene una deuda, pero ahora con el banco. Esta deuda se representó anteponiendo a la cantidad de dinero el signo "–", es decir, –\$ 1000.

EN TU CUADERNO

1. **Rodrigo va a visitar a su prima que vive en el 7º piso de un edificio. Deja su auto en un estacionamiento para visitas que está en el segundo subterráneo.**

   a) Al llegar debe anunciar su visita al conserje del edificio que está en el primer piso. ¿Cuántos pisos sube?
   b) ¿Cuántos pisos sube en total Rodrigo para llegar del estacionamiento al departamento de su prima?
   c) Cuando se va debe bajar al segundo subterráneo, ¿qué botón aprieta, el 2 o –2?

2. **Un albatros va volando a 25 m sobre el mar. Observa un pez nadando y se lanza en picada para cazarlo. Si desde que se lanza hasta que llega al pez hay una distancia de 29 m, ¿a qué profundidad estaba el pez cuando lo cazó el albatros?**

3. **Resuelve cada sustracción y explica paso a paso la estrategia utilizada.**

   a) 150 – 220 =   b) 459 – 624 =   c) 1343 – 3218 =

NO OLVIDES QUE...

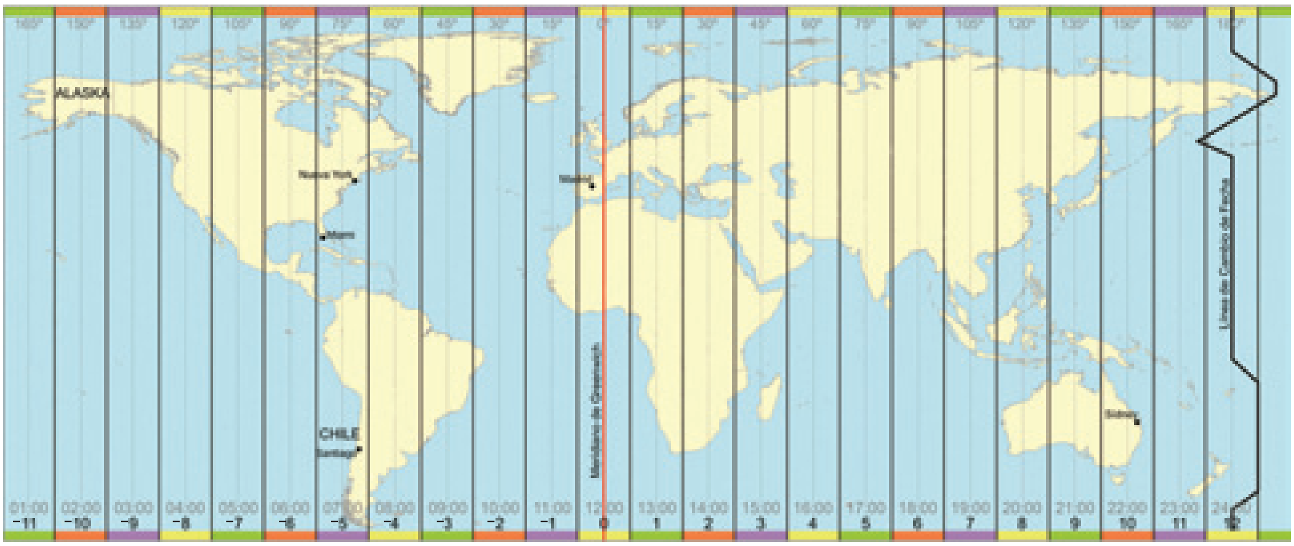
Una sustracción donde el minuendo es menor que el sustraendo no tiene solución en los números naturales, porque su resultado es un número negativo, que es siempre menor que cero. Para resolverla puedes restar al sustraendo el minuendo y anteponer a la diferencia el signo "–".

Números enteros en nuestra vida

¿Sabías que todos los lugares de la Tierra que están en el mismo meridiano tienen igual hora solar? Esto se debe a que todos los puntos que atraviesa tienen al Sol en la vertical a mediodía.

Como la circunferencia que representa el diámetro de la Tierra mide 360° y el día solar se divide en veinticuatro horas, la Tierra se puede dividir en veinticuatro franjas imaginarias de una hora, llamadas **husos horarios**. Esto significa que cada 15° de longitud hay una hora de diferencia. Observa el mapa:

Diferencias horarias en nuestro planeta



Sin embargo, cada país tiene su propia hora oficial, que en muchas ocasiones no coincide con la hora solar.

PARA DISCUTIR

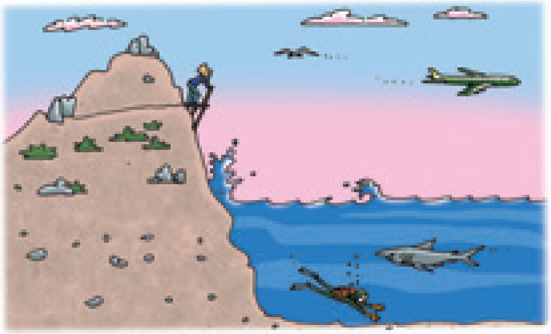
- Cecilia vive en Madrid y llama a su primo Miguel, que vive en Chile, a las ocho de la noche (de Madrid). ¿A qué hora de Chile recibe la llamada Miguel?, ¿cómo lo supiste?
- ¿Cuántas horas de diferencia hay entre Santiago y Sídney?
- A las 12:00 p.m. de Alaska, ¿qué hora es en Nueva York?
- Manuel viaja de Santiago a Miami y el avión en que sale parte a las 9:00 a.m. Si se estima que el viaje demora 10 horas, ¿a qué hora (de Miami) llega?

En la imagen anterior puedes observar que se utilizan números con signo "+" (números positivos), otros con signo "–" (números negativos) y el cero. Estos números forman el conjunto de los **números enteros**.

Los **números enteros** se utilizan también en situaciones en las que tenemos que distinguir entre una deuda y una ganancia, entre temperaturas bajo cero y sobre cero; entre estar bajo o sobre el nivel del mar.

EN TU CUADERNO

1. Observa la ilustración. ¿Qué elementos se encuentran sobre el nivel del mar y cuáles por debajo?



a) Si el buzo está a 110 m de profundidad, ¿es correcto decir que está a 110 m?, ¿por qué?
b) Si la gaviota vuela a una altura aproximada de 200 m, ¿es correcto decir que está a +200 m?, ¿por qué?

2. Expresa usando números positivos o negativos las siguientes situaciones:

a) Un termómetro marca 7 °C bajo cero.
b) El mar Mediterráneo tiene una profundidad máxima de 5000 m.
c) En 1864 se creó la Cruz Roja.
d) Roberto tiene una deuda de $ 300 000.
e) El pozo tiene 14 m de profundidad.
f) El monte Aconcagua tiene 6959 m de altura sobre el nivel del mar.

3. Lee y resuelve los siguientes problemas:

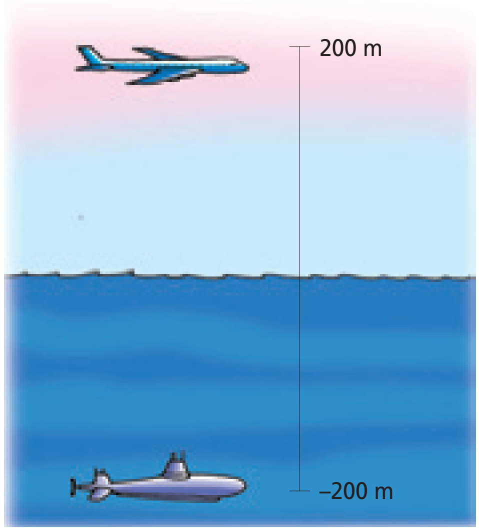
a) Inicialmente un termómetro marca 10 °C, en dos horas aumenta 20 grados y luego disminuye en 35 grados. ¿Cuál es la temperatura final que marca el termómetro?
b) En un edificio de 20 pisos y tres subterráneos, el ascensor realiza el siguiente recorrido: del piso 15 baja al 2, luego va al primer subterráneo, subiendo nuevamente al tercer piso. Si el piso cero corresponde a la entrada principal del edificio donde está la recepción, ¿cuántos pisos recorrió el ascensor en el trayecto descrito?

NO OLVIDES QUE...

El signo "–" delante de un número indica que es un **número negativo**, es decir, menor que cero. El signo "+" delante de un número o la ausencia de este indica que es un **número positivo**, es decir, mayor que cero. El cero no es un número negativo ni positivo. El conjunto de los números enteros se simboliza por $\mathbb{Z}$ y responde a la necesidad de dar solución a la sustracción que no tiene solución en el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), es decir, cuando el sustraendo es mayor o igual que el minuendo.

Valor absoluto y recta numérica

Observa la posición del avión y del submarino que aparecen en el dibujo.



Ayuda

Debes tener presente que para hablar de distancias no importa el signo del número.

PARA DISCUTIR

- ¿Cuál es la distancia entre el avión y el nivel del mar?
- ¿Cuál es la distancia entre el submarino y el nivel del mar?
- ¿Cómo son las distancias que hay entre cada objeto y el nivel del mar?

NO OLVIDES QUE...

- La distancia que hay entre un número y el cero la representaremos a través del **valor absoluto**. El valor absoluto de un número **a** lo escribiremos **|a|**. Por ejemplo:
  La distancia entre –200 y cero en la recta numérica es 200, entonces |–200| = 200.
  La distancia entre 200 y cero en la recta numérica es 200, entonces |200| = 200.
- Dos números son opuestos si tienen el mismo valor absoluto y distinto signo.
  Por ejemplo, –2 y 2 son **opuestos**.

EN TU CUADERNO

1. Un hombre nació el año 8 a. C. y una mujer el año 17 a. C.

a) ¿Cuál de los dos nació más próximo al nacimiento de Cristo?
b) ¿Qué edad tiene cada uno a la fecha en que nace Cristo?

2. Determina los siguientes valores absolutos:

a) $\lvert -10\rvert =$	c) $\lvert 23\rvert =$	e) $\lvert -23\rvert =$	g) $\lvert -53\rvert =$
b) $\lvert 8\rvert =$	d) $\lvert -2\rvert =$	f) $\lvert 0\rvert =$	h) $\lvert -35\rvert =$

Para representar los números enteros en una recta numérica, trazamos una recta, ubicamos en ella los números naturales, agregamos el cero y, a su izquierda, los números negativos.

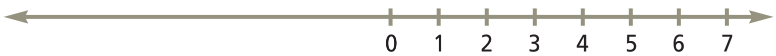
Es decir, se continúa la recta hacia la izquierda del cero y, respetando la medida que tiene la unidad, ubicamos primero el –1 (a la izquierda del 0), luego el –2 (a la izquierda del –1), el –3 (a la izquierda del –2), y así sucesivamente.

Ayuda

Un número y su opuesto se encuentran a la misma distancia del cero.

EN TU CUADERNO

1. **Si tienes la siguiente recta y un compás, ¿cómo ubicarías los números negativos –2, –4 y –5? Explica.**



2. **Dibuja una recta numérica, gradúala en forma conveniente para cada caso y ubica en ella los siguientes números enteros:**

   a) 3; –8; –1; 7; –12 b) 42; –32; 28; 20; –48 c) 12; –35; –24; –25; 6

NO OLVIDES QUE...

- En la recta numérica, un número, positivo o negativo, es mayor que todos los números que están a la izquierda de él y es menor que cualquier numero que esté a la derecha de él.

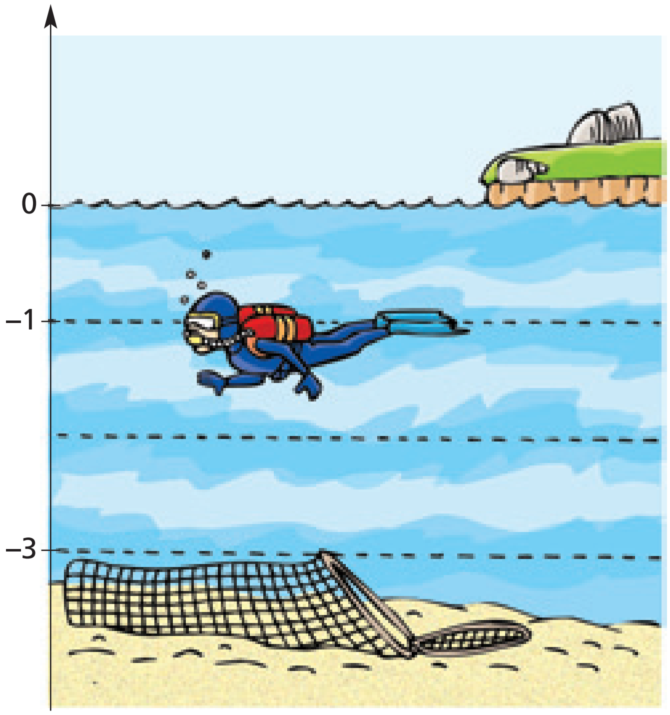
EN EQUIPO

Materiales:
- 1 hoja de papel milimetrado
- Regla
- Compás

En esta actividad deberán construir una recta numérica para representar números enteros, y establecer relaciones de orden entre ellos.

Instrucciones:
1. Dibujen, usando la regla, una recta a lo largo de la hoja de papel milimetrado.
2. Usen 1 cm como una unidad y dividan la recta numérica en unidades.
3. Elijan la marca que haya quedado cercana al centro de la hoja para ubicar el cero.
4. Anoten los números positivos a la derecha del cero. Recuerden que cada marca que hicieron corresponde a una unidad.
5. Cada uno elige 3 números negativos y los ubica en la recta numérica a la izquierda del cero. Pueden utilizar el compás, si es necesario.
6. Comparen los procedimientos que utilizó cada uno. ¿Cuál es más simple?, ¿por qué?
7. Si deseo ubicar el número –1000 en la recta numérica, ¿qué debo hacer? Expliquen paso a paso cómo lo harían.

Orden y comparación en números enteros



Observa la posición del buzo y de la red que aparece en el dibujo. Ambos se encuentran bajo el nivel del mar. Pero ¿cuál de ellos está más cerca de la superficie?

En el dibujo, podemos representar gráficamente las distancias entre el buzo, la red y la superficie del mar con una recta numérica, donde el cero corresponde al nivel del mar.

PARA DISCUTIR

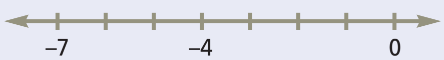
- ¿Cuál es la distancia entre el buzo y el nivel del mar?
- ¿Cuál es la distancia entre la red y el nivel del mar?
- ¿El buzo está a menor o mayor distancia que la red del nivel del mar?
- ¿Qué número es mayor: –1 o –3? Justifica.

NO OLVIDES QUE…

- En los números negativos, para determinar cuándo un número es mayor que otro hay que considerar sus valores absolutos. El de menor valor absoluto corresponde al número que está más cerca del cero, por lo tanto, al número mayor.
  Por ejemplo, para comparar –4 y –7 se consideran los valores absolutos de cada número:

  $|-4| = 4$
  $|-7| = 7$ Como $4 < 7$, entonces $-4 > -7$.

  Gráficamente tenemos:



EN TU CUADERNO

1. Completa con los signos <, > o =, según corresponda:

a) –25 ______ –27	c) –45 ______ –45	e) –33 ______ –32	g) –5 ______ –15
b) –42 ______ –39	d) –10 ______ –24	f) –89 ______ –98	h) –12 ______ –21

2. Ordena los siguientes números de menor a mayor:

a) 56; 28; –98; –14; 37

b) –64; 93; –20; 5; –67

c) 35; –48; –19; –18; 27

d) –13; –17; 11; –19; –12

3. Remplaza el valor de a y completa la tabla con los resultados que se obtienen en cada caso.

a – 1	a	a + 1
	7	
	–5	
	–1	
	–100	
	–19	

4. Completa escribiendo mayor o menor, según corresponda:

a) Cualquier número negativo es ____________ que un número positivo.

b) El cero es ____________ que cualquier número negativo.

c) El valor absoluto de un número es siempre ____________ o igual que el mismo número.

NO OLVIDES QUE...

- Tal como hablamos del conjunto de los números naturales (ℕ), podemos hablar ahora de un nuevo conjunto numérico: el conjunto de los números enteros (ℤ), que está compuesto por los números naturales, el cero y los números negativos.
- Los números enteros, excepto el cero, son números con signo, ya sea positivo o negativo. Usualmente cuando el número es positivo, no se escribe el signo +.

MI PROGRESO

Jorge y María están analizando el dinero que van a recibir y lo que deben pagar este mes:

- **Dividendo: $ 90 000**
- **Alimentación: $ 80 000**
- **Sueldo Jorge: $ 120 000**
- **Cuentas de la casa: $ 65 000**
- **Sueldo María: $ 160 000**
- **Locomoción: $ 32 000**
- **Medicamentos y doctor: $ 25 000**
- **Otros gastos: $ 5 000**

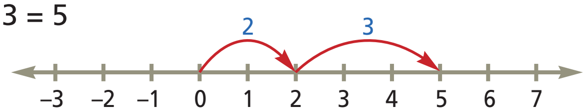
1. Representa las entradas y gastos de Jorge y María utilizando números enteros.
2. Ordena todos sus gastos de menor a mayor.
3. Compara el total de entradas y el total de gastos. ¿Pueden pagar sus gastos o les falta dinero este mes?
4. Si no hubiesen tenido que ir al doctor ni comprar los medicamentos y no hicieran ningún gasto extra, ¿podrían ahorrar?, ¿cuánto?

Adición de números enteros

En un campeonato de fútbol, el 7° A ganó el primer partido con un marcador de 2 goles a favor.

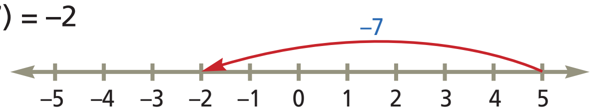
El partido siguiente lo ganó también, esta vez con 3 goles a favor. ¿Cuántos goles a favor lleva en total?

Esto lo escribimos así: $2 + 3 = 5$



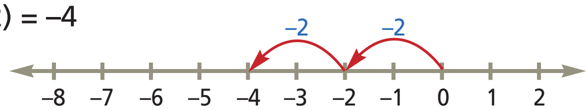
En el siguiente partido, el equipo tuvo peor suerte y perdió por 7 goles en contra. ¿Cuál es la diferencia de goles para este equipo, hasta el momento?

Lo expresamos así: $5 + (-7) = -2$



En el último partido, aún afectados por la derrota anterior, volvieron a perder, esta vez por 2 goles en contra. ¿Cuál es, finalmente, la diferencia de goles para este equipo?

Lo indicamos así $(-2) + (-2) = -4$



PARA DISCUTIR

- ¿Qué significa el resultado –4 en el contexto del problema?

EN TU CUADERNO

1. Responde, ayudándote con el termómetro.

a) Si había 8 °C bajo cero y la temperatura subió 14 grados, ¿cuál es la temperatura?
b) Si había 2 °C bajo cero y la temperatura subió 5 grados, ¿cuál es la temperatura?
c) Si había 10 °C bajo cero y la temperatura subió 8 grados, ¿cuál es la temperatura?

2. Calcula usando la recta numérica.

a) $20 + 20 =$
b) $20 + 10 =$
c) $20 + 0 =$
d) $20 + (-10) =$
e) $20 + (-20) =$

f) $(-3) + 7 =$
g) $(-3) + 4 =$
h) $(-3) + 0 =$
i) $(-3) + (-4) =$
j) $(-3) + (-7) =$

k) $(-18) + 25 =$
l) $(-18) + 7 =$
m) $(-18) + 0 =$
n) $(-18) + (-7) =$
ñ) $(-18) + (-25) =$

3. **Completa los cuadrados mágicos de modo que la suma de cada fila, columna y diagonal sea la misma.**

a)

9		5
	3	
1		–3

b)

–9		–5
	–3	
–1		3

c)

–6		–2
4	0	
		6

d)

6		2
–4	0	
		–6

4. **Completa cada pirámide respetando la regla dada en la pirámide de color.**

a + b	
a	b

a)

0			
–10		0	
–7			–8

b)

–2			
	–5		
–2	–3		15

5. **Remplaza cada letra por los valores dados y completa la tabla con el resultado en cada caso.**

a	b	c	a + b	a + c	c + b
2	–3	–4			
–1	4	2			
1	2	3			
–2	–2	–3			

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

Con las siguientes secuencias de teclas, se obtienen números negativos. Observa y luego practica formando otras secuencias que te den como resultados los números propuestos.

2 – 5 + 2 = ▶ –1

9 – 3 – 6 – 3 = ▶ –3

2 + 7 – 1 5 + 2 = ▶ –4

a) ▶ –3

b) ▶ –7

c) ▶ –4

d) ▶ –12

Sustracción de números enteros

Observa la siguiente conversación:

¿En cuántos grados varió la temperatura cada día? Para responder esta pregunta podemos plantear las siguientes sustracciones:

Variación del día lunes: 13 – (–4) = ¿?
Variación del día martes: 10 – (–2) = ¿?

Antes de resolverlas recordemos que para calcular el resultado de: 15 – 6, tienes que buscar el número que sumado con 6 es igual a 15.
Y ese número es 9, porque 9 + 6 = 15.

Aplicando la misma estrategia, para calcular la sustracción 13 – (–4), buscamos un número que sumado con –4 dé como resultado 13.

–4 + ¿? = 13 Y la respuesta es 17, porque –4 + 17 = 13.

Observa ahora cómo obtener el resultado de las sustracciones planteadas.

Variación del día lunes:
13 – (–4) = 13 + 4 = 17

Variación del día martes:
10 – (–2) = 10 + 2 = 12

Ahora respondemos la pregunta:
El lunes la temperatura varió 17 °C y el martes, 12 °C.

Dato interesante

Nosotros utilizamos los grados Celsius (°C) para medir temperaturas. Sin embargo, en otros lugares como Norteamérica utilizan los grados Fahrenheit (°F).
Los científicos, en cambio, miden las temperaturas en Kelvin (K).

0 °C equivale a 32 °F.
0 K equivale a –273 °C.

PARA DISCUTIR

- ¿Cuál es la variación entre las temperaturas mínimas de los días lunes y martes?, ¿y entre las temperaturas máximas?
- ¿Qué indican los signos en cada caso?

NO OLVIDES QUE...

- Para restar dos números enteros, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo.
Ejemplos:

  –4 – (–1) = –4 + (+1) = –3   –3 – 7 = –3 + (–7) = –10

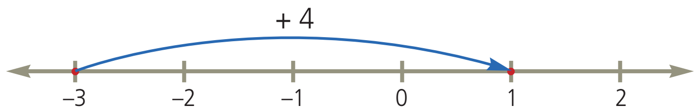
  En general, si **a** y **b** son números enteros, se cumple que:

  a – b = a + (–b)

EN TU CUADERNO

1. **Resuelve las siguientes sustracciones utilizando la recta numérica. Observa el ejemplo.**

–3 – (–4) = –3 + 4 ▶



▶ –3 – (– 4) = 1

a) –5 – (–3) =
b) –7 – 5 =
c) –5 – (–1) =
d) –5 – 8 =
e) –9 – 2 =
f) –4 – (–8) =

2. **Resuelve las siguientes sustracciones sumando al minuendo el opuesto del sustraendo.**

a) –6 – 16 =
b) –7 – (–7) =
c) 3 – (–4) =
d) –12 – (–6) =
e) 4 – (–7) =
f) –9 – (–2) =

3. **Completa la tabla con la variación de temperaturas en cada día.**

	Máxima	Mínima	Variación de temperaturas
Lunes	22 °C	12 °C	
Martes	17 °C	–2 °C	
Miércoles	16 °C	–4 °C	
Jueves	19 °C	12 °C	
Viernes	20 °C	–3 °C	

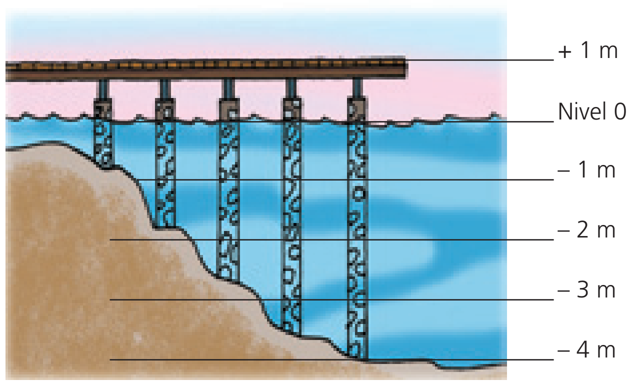
4. **Remplaza cada letra por los valores dados en cada caso y completa la tabla.**

a	b	c	a – b	b – a	b – c	c – b	a – c
–3	–8	5					
10	–9	–4					
6	–15	3					
0	–1	1					

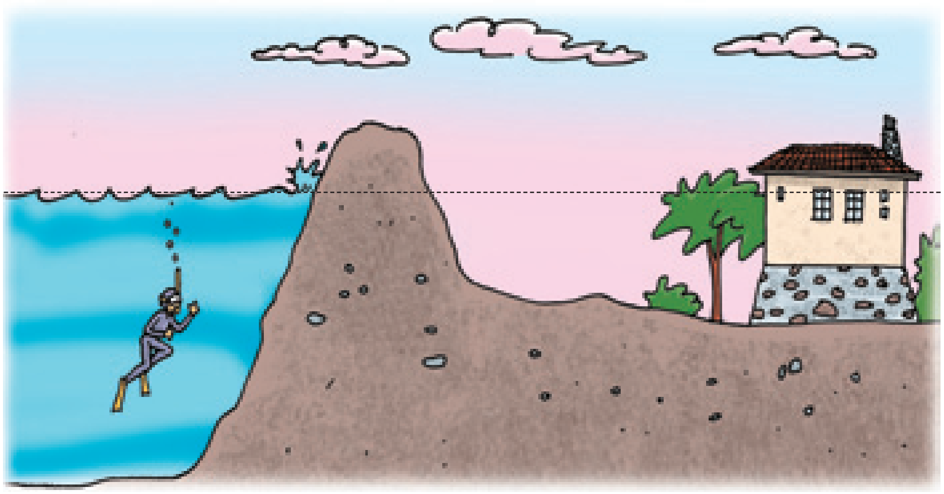
5. **El esquema muestra los pilares de un puerto.**

a) Considerando el muelle del puerto, ¿cuál es la longitud aproximada de cada pilar?

b) ¿Cuánto más largo es el pilar de mayor longitud que el de menor longitud?



Adiciones y sustracciones combinadas



Algunos países de Europa, como Holanda, son llamados Países Bajos, debido a que gran parte de sus territorios se encuentran bajo el nivel del mar, y no porque la gente que ahí habita sea pequeña.

En la ilustración aparece un esquema de niveles muy frecuentes en estos países y un buzo recorriendo sus costas.

PARA DISCUTIR

- Si un buzo se sumerge 4 metros, luego sube 2 metros y finalmente desciende 5 metros más, ¿a qué profundidad se encuentra al final de su recorrido?

Esta situación se puede expresar matemáticamente de la siguiente manera:

$$0 + (-4) + 2 + (-5)$$

Para resolver problemas como estos, te sugerimos agrupar todos los números positivos y sumarlos; luego, agrupar todos los números negativos y sumarlos. Finalmente, sumar los valores obtenidos.

$$0 + (-4) + 2 + (-5) = (0 + 2) + ((-4) + (-5)) = 2 + (-9) = -7$$

EN TU CUADERNO

1. Calcula.

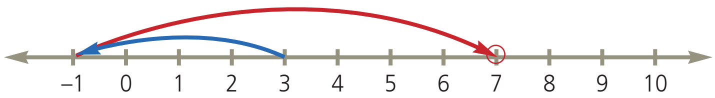
a) $7 - (-4) - (-3) =$
b) $-3 + (-8) - 4 =$
c) $10 - (-19) + (-29) =$
d) $18 - 6 - 8 + 5 - 3 + 7 =$
e) $-6 - 3 - (-8) + (-5) - 17 =$
f) $7 - (-9) - (-11) - 13 - 1 =$
g) $-15 - 10 - 25 - 50 + 100 =$
h) $-100 - 500 - (-400) + 600 =$

2. Resuelve calculando primero lo que está dentro de los paréntesis.

a) $-(-2 + 6) + (9 - 4) =$
b) $-2 - (-6 - 4 + 3 - 2) =$
c) $-4 - 9 + (-6 - 2) -1 =$
d) $-10 - (7 - 9) =$
e) $(-24) + 43 =$
f) $8 - (-4 - 6) =$
g) $-(-2 + 8) - (9 - 5) =$
h) $(4 - 17) - (17 - 4) =$
i) $-(-1 + 4) - (-7 + 1) =$
j) $-3 - (-5 + 7 - 2) =$
k) $-3 - (4 - 7 - 2) =$
l) $[-4 - (-2 - 3) + 5] -1 =$

3. Resuelve las siguientes operaciones con una recta numérica. Guíate por el ejemplo.

$3 + (-4) - (-8) = 3 + (-4) + 8 = 7$ ▶



a) $(-4) + 5 - (-4) =$

b) $(-6) - (-8) - (-1) =$

c) $20 + (-3 - 5) + (-3) - (-2) =$

d) $10 - (-3) - 4 - (3 - 4) =$

e) $2 + (-2) - (13 - 4) + 9 =$

f) $(-3) - 3 + (-2 + 5) - (2 + 1) =$

4. Resuelve los siguientes problemas y explica qué estrategia utilizaste en cada caso.

a) Claudio tiene \$ 5000 y su mamá le regala \$ 10 000. Si con ese dinero paga \$ 3000 por fotocopias y su amigo le devuelve \$ 6000 que le había prestado. ¿Cuánto dinero tiene ahora?

b) Patricia prefiere bajar por las escaleras en lugar de usar ascensor. Si bajó desde el piso 12 al tercer subterráneo, ¿cuántos pisos bajó?

ESTRATEGIA MENTAL

Para resolver sustracciones de números enteros puedes:

1° Resolver los paréntesis, expresando los números como adiciones.

2° Sumar todos los números positivos.

3° Sumar todos los números negativos.

4° Calcular el número resultante.

Por ejemplo: $(-2) + 3 - (-4) + (-5) - 2 = (-2) + 3 + 4 + (-5) + (-2) = 3 + 4 + (-2) + (-5) + (-2) = 7 + (-9) = -2$

Calcula mentalmente utilizando la estrategia anterior y escribe, en tu cuaderno, los pares de operaciones con resultados iguales.

$3 + (4 - 3)$	$-2 - (-4 + 5)$	$(3 - 5) - (-7 + 6)$	$3 - (4 - 3)$	$-2 + (-4 + 5)$
$-2 - 4 + 5$	$3 - 5 + 7 - 6$	$3 + 4 - 3$	$3 - 4 + 3$	$-2 + -4 + 5$

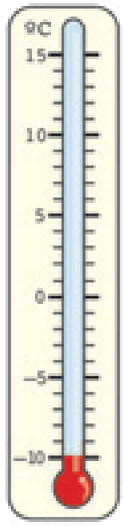
MI PROGRESO

Andrés, Camilo, Felipe, Ignacio y Nicolás están postulando a la selección de básquetbol de su colegio. El entrenador y su técnico decidieron asignar puntajes a cada uno según su desempeño para facilitar su decisión final. Para quedar seleccionados, la suma de los puntajes debe ser positiva.

	Andrés	Camilo	Felipe	Ignacio	Nicolás
Entrenador	5	–5	–10	6	–7
Técnico	–4	–1	–3	–2	4

1. ¿Qué jugadores son seleccionados?
2. ¿Cuál es el puntaje total que recibió cada jugador?
3. ¿Cuál es el menor puntaje que otorgó el entrenador?, ¿y el técnico?
4. Calcula las discrepancias de puntajes entre lo asignado por el entrenador y lo asignado por el técnico. ¿Qué jugador tiene la mayor diferencia de puntajes?

Un termómetro marca –10 °C a las 8:00 horas. Si la temperatura aumenta 2 °C cada 20 minutos, ¿qué temperatura marcará a las 11:00 horas?



Comprender

- ¿Qué sabes del problema?
  La temperatura a las 8:00 h: –10 °C.
  Los grados que aumenta cada 20 minutos: 2 °C.
- ¿Qué debes encontrar?
  La temperatura que marcará a las 11:00 h.

Planificar

- ¿Cómo resolver el problema?
  Una posible solución es ir paso a paso marcando la temperatura cada 20 minutos, es decir, –10 °C a las 8, –8 °C a las 8:20, –6 °C a las 8:40, etc., hasta llegar a las 11:00 horas. ¿Habrá otra manera más fácil? Por lo general, un problema se puede resolver de distintas maneras, por ejemplo, en este caso, calcular cuántas veces hay 20 minutos entre las 8:00 y las 11:00 y multiplicar este valor por el aumento de temperatura; una vez obtenido este valor, sumarle la temperatura inicial de –10 °C.

Resolver

- Entre las 8 y las 11 hay 3 horas de diferencia.
  Hay: 60 • 3 = 180 minutos entre las 8 y 11 horas.
  Hay: 180 : 20 = 9. Entre las 8 y las 11 horas, hay 9 veces 20 minutos.
  Luego, –10 + 18

  La temperatura que marcará a las 11 horas es 8 °C.

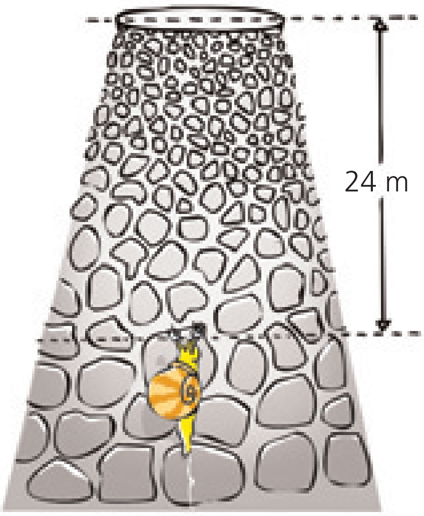
Revisar

- Para comprobar el resultado puedes desarrollar el problema de otra manera.

$$-10 + \underbrace{\overset{20\text{ min}}{2} + \overset{20\text{ min}}{2} + \overset{20\text{ min}}{2}}_{1\text{ hora}} + \underbrace{\overset{20\text{ min}}{2} + \overset{20\text{ min}}{2} + \overset{20\text{ min}}{2}}_{1\text{ hora}} + \underbrace{\overset{20\text{ min}}{2} + \overset{20\text{ min}}{2} + \overset{20\text{ min}}{2}}_{1\text{ hora}}$$

$$\boxed{-10 + 18 = 8}$$

1. Resuelve los siguientes problemas, aplicando la estrategia de la página anterior.



a) Ángela decidió ordenar sus deudas en un solo crédito que comenzó a pagar en marzo. Si la deuda es de $ 2 000 000, y cada cuota a pagar es de $ 180 000, ¿cuánto estará debiendo aún en diciembre?

b) Un caracol está en un pozo a 24 m de profundidad. Si cada día avanza 2 m hacia la superficie, ¿a qué profundidad se encuentra luego de una semana?

c) Un submarino que se encuentra a 200 m de profundidad sube hacia la superficie del mar a una velocidad de 15 m cada 8 minutos. Si comenzó a subir a las 12:00, ¿a qué profundidad se encuentra a las 13:20 horas?

d) El administrador de un antiguo edificio contrató a una empresa de aseo para que puliera todos los escalones de las escaleras. Cada escalera tiene 15 escalones. Si comienzan a las 9:00 en el segundo subterráneo y demoran 6 minutos en pulir cada escalón, ¿entre qué pisos estarán trabajando a las 14:00 horas?

2. Ahora resuelve el problema de la página anterior utilizando otra estrategia de resolución. Explica paso a paso cómo lo resolviste y compara tu estrategia con las usadas por tus compañeros y compañeras.

3. Resuelve los siguientes problemas utilizando la estrategia que tú quieras. Compara el procedimiento que utilizaste con el de algún compañero o compañera. ¿Cuál es más simple?, ¿por qué?

a) Al enchufar un congelador por primera vez, baja la temperatura al interior del congelador 3 °C cada 20 minutos. Si a las 10:00 horas la temperatura ambiente es de 20 °C, ¿qué temperatura tiene el congelador a las 14:00 horas?

b) Un edificio tiene diez pisos y cinco subterráneos. Uno de sus habitantes decide entrenarse subiendo y bajando las escaleras de todo el edificio. Se da cuenta de que en subir un piso demora 24 segundos y 16 en bajarlo. Él comienza desde su departamento, ubicado en el 5° piso, a las 6:30 horas, subiendo primero. Sube hasta el décimo piso, baja al quinto subterráneo y así, continúa subiendo y bajando todos los pisos. A las 7:25 horas, ¿va subiendo o bajando? ¿En qué piso está?

NACIONAL

¡El año 2007 fue el más frío en 4 décadas!

Las temperaturas bajo cero entre mayo y agosto del 2007 batieron los récords. Los consultorios de urgencias están llenos de pacientes por enfermedades respiratorias y 15 personas murieron por hipotermia en el país.

Las heladas arrasaron con las cosechas de al menos siete regiones, dejando en situación de riesgo a miles de personas y animales.
Las pérdidas superaron los 200 millones de dólares. Son los efectos de la peor ola de frío que hubo en 40 años.

Temperaturas
En regiones, el frío superó los –5 ºC. Las bajas temperaturas se mantuvieron hasta septiembre.

8 ºC Es el promedio aproximado de temperaturas en 2007, el más bajo de los últimos 40 años.

–3 ºC Es la temperatura más baja aproximada en la Región Metropolitana en 2007.

–19 ºC La temperatura mínima aproximada más baja del año, se registró en Balmaceda.

Fuente: diario El Mercurio, Santiago, 12 de agosto de 2007, pág. D 17

1. **Durante la próxima semana, cada uno debe registrar las temperaturas máximas y mínimas de 3 ciudades de Chile, de distintas regiones. Para esto pueden visitar el sitio: www.meteochile.cl**
2. **Observando todos los datos, determinen:**
   a) ¿En qué ciudad se produjo la mayor variación de temperaturas a lo largo de la semana?
   b) ¿En qué ciudad se produjo la mayor variación de temperaturas dentro de un mismo día?
3. **Decidan un criterio que les permita ordenar las ciudades según sus datos respecto de la temperatura, aplíquenlo a los datos que tienen y justifiquen el criterio utilizado.**
4. **¿Creen que los datos obtenidos corresponden a valores normales para esa época del año? Justifiquen.**

EVALUAMOS NUESTRO TRABAJO

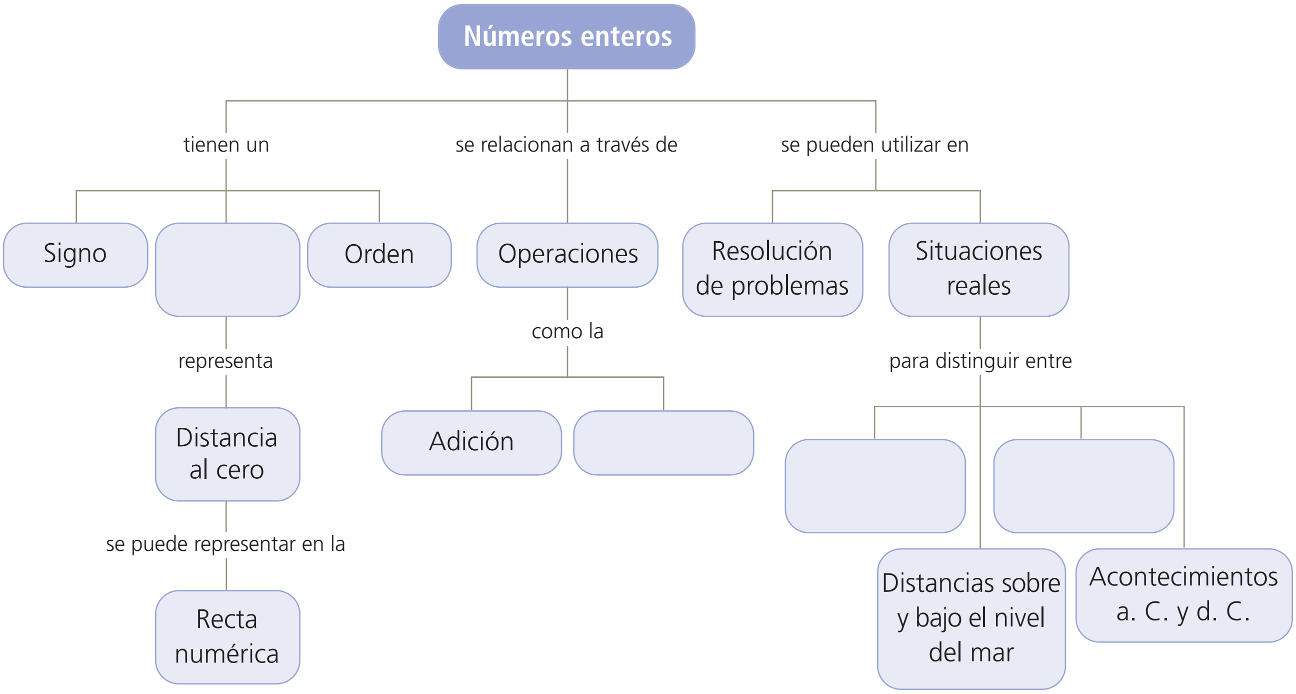
1. **Cada uno complete en su cuaderno la siguiente tabla escribiendo Sí, A veces y No, según corresponda. Luego, comparen y comenten sus respuestas.**

	Integrante 1	Integrante 2	Integrante 3
Respeté las opiniones de los demás integrantes.			
Cumplí con las tareas que me comprometí.			
Hice aportes interesantes para desarrollar el trabajo.			

2. **Comenten y respondan: ¿en qué podrían mejorar para el próximo trabajo en equipo?**

A continuación, se presenta un esquema, llamado mapa conceptual, que relaciona los principales conceptos trabajados en la unidad. Cópialo en tu cuaderno y complétalo con los siguientes términos:

- Valor absoluto
- Temperaturas sobre y bajo cero
- Sustracción
- Deudas y ganancias



Utilizando los contenidos aprendidos en la unidad y apoyándote en el esquema anterior, responde en tu cuaderno.

1. ¿Para qué nos sirve utilizar números positivos y negativos?
2. ¿Cuál es la utilidad de representar números en una recta numérica?
3. ¿En qué se diferencian y en qué se parecen los procedimientos para la adición y sustracción de números enteros?
4. Comenta tus respuestas con tus compañeros y compañeras.

¿QUÉ APRENDÍ?

Ahora trabajo en tu hipertexto

Marca, en tu cuaderno, la alternativa correcta en las preguntas 1 a la 8.

1. ¿Cuál de las siguientes frases no se relaciona con el número –37?

A. Él nació en el año 37 a. C.
B. La temperatura es 37 °C bajo cero.
C. Un termómetro varió 37 °C.
D. Un buzo está a 37 m bajo el nivel del mar.

2. ¿Cuál de las siguientes frases es incorrecta?

A. –2 y 2 son números opuestos.
B. Al sumar un número positivo y uno negativo el resultado es siempre negativo.
C. La distancia de –5 al 0 es mayor que del 2 a 0.
D. Si se suman dos números negativos el resultado es negativo.

3. Aristófanes, autor de comedias, nació en el año 386 a. C. ¿Cuántos años han pasado desde su nacimiento hasta el año 2009? (Recuerda que el año cero no existe en la línea de tiempo).

A. 1622 años.
B. 1623 años.
C. 2394 años.
D. 2395 años.

4. Al calcular (–4) – (12) + (–6) – (–2), se obtiene:

A. 4
B. –24
C. –20
D. –8

5. Los números que están ordenados de mayor a menor son:

A. –754; –762; –775; –789
B. –304; –290; –189; –205
C. –175; –157; –152; –125
D. –69; –67; –72; –77

6. La temperatura mínima en una ciudad el día lunes fue de –2 °C y la máxima fue de 7 °C. ¿Cuál fue la variación de temperatura en el día?

A. 9 °C
B. 5 °C
C. –5 °C
D. –14 °C

7. Si a un número positivo le restas un número negativo, el resultado es:

A. positivo.
B. cero.
C. negativo.
D. No se puede determinar.

8. Chile continental está en el huso horario –4 y Suecia en el huso horario +1. Si en Chile son las 22:00 h, ¿qué hora es en Suecia?

A. 19:00 h.
B. 1:00 h del día siguiente.
C. 3:00 h del día siguiente.
D. 17:00 h.

9. Arquímedes, famoso matemático griego, nació en el año 287 a. C. y murió en el año 212 a. C.

a) ¿Cuántos años vivió?
b) ¿Cuántos años separan su muerte del nacimiento de Cristo?

10. Marcela debe $ 500, $ 800 y $ 650 a tres compañeras, y para pagar rompió sus cuatro alcancías en donde encontró $ 200, $ 350, $ 150 y $ 700. ¿Tiene suficiente dinero para pagar? Explica.

11. Esteban parte de su ciudad y hace el siguiente recorrido:

– El lunes recorre 30 km hacia el norte.
– El martes recorre 55 km hacia el norte.
– El miércoles recorre 35 km hacia el sur.
– El jueves recorre 40 km hacia el norte.
– El viernes recorre 25 km hacia el sur.

a) Representa los recorridos diarios usando números positivos y negativos.
b) ¿Dónde está al término del quinto día?
c) ¿Cuántos kilómetros recorrió en total en los cinco días?

Compara tus respuestas en tu curso. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.

¿QUÉ LOGRÉ?

1. Marca según tu apreciación.	**No lo entendí**	**Lo entendí**	**Puedo explicarlo**
Números enteros en la vida diaria.			
Valor absoluto y recta numérica.			
Orden y comparación en números enteros.			
Adición y sustracción de números enteros.			
Resolución de problemas.			

2. Reflexiona y responde.

a) ¿Qué dificultades tuviste en la unidad?, ¿cómo las superaste?
b) ¿Qué te gustó de lo que aprendiste en la unidad?, ¿por qué?
c) Vuelve a la página 10 y revisa el recuadro “En esta unidad podrás…”, ¿crees que lograste aprender todo lo que se esperaba? Explica.

UNIDAD

2

Potencias

Latinstock

EN ESTA UNIDAD PODRÁS...

- Interpretar potencias de exponente natural y cuya base es un número natural, una fracción positiva o un número decimal positivo como multiplicación de factores iguales.
- Interpretar potencias de base 10 con exponente entero, como una generalización de las potencias de 10 con exponente natural, y aplicarlas en la representación de números decimales.
- Calcular multiplicaciones de potencias que tienen igual base o igual exponente.
- Establecer y aplicar, en situaciones diversas, procedimientos de cálculo de multiplicación de potencias de igual base o de igual exponente.

CONVERSEMOS DE...

Las bacterias son microorganismos de tamaño muy pequeño, invisibles al ojo humano. Cuando las bacterias se encuentran en un medio favorable, son capaces de reproducirse rápidamente, de manera que, a partir de una bacteria progenitora, se generan dos bacterias hijas, y así sucesivamente.

Una alimentación sana y libre de bacterias es muy importante para la salud de un ser humano. ¿Sabías que la *Escherichia coli* de la imagen es una bacteria que habita comúnmente en el intestino humano y puede producir desde infecciones intestinales y urinarias hasta meningitis en el recién nacido o neumonías en pacientes con baja inmunidad?

Piensa y responde:

1. La colonia de bacterias *Escherichia coli* se duplica cada 20 minutos. Si en un comienzo la vejiga y el tracto urinario de una persona contienen 10 bacterias de este tipo, ¿cuántas habrá al cabo de una hora?, ¿y al cabo de dos?, ¿y al cabo de un día? Explica cómo lo calculaste.
2. Si en un comienzo hubiese contenido 108 bacterias *Escherichia coli*, ¿cuántas bacterias tendría al cabo de un día?

Ahora trabaja en tu hipertexto

Recuerda lo que aprendiste en años anteriores y resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno.

1. Escribe como multiplicación y resuelve.

a) $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 =$
b) $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 =$
c) $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 =$
d) $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} =$
e) $(0,2) + (0,2) + (0,2) + (0,2) =$
f) $(0,1) + (0,1) + (0,1) + (0,1) + (0,1) =$

2. Determina la factorización prima de los siguientes números:

a) 144
b) 216
c) 735
d) 1025
e) 1680
f) 2000
g) 2100
h) 3780
i) 4096

3. Resuelve las siguientes multiplicaciones:

a) $27 \cdot 81 =$
b) $125 \cdot 25 =$
c) $12 \cdot 144 =$
d) $49 \cdot 343 =$
e) $13 \cdot 169 =$
f) $100 \cdot 10\,000 =$
g) $100\,000 \cdot 1000 =$
h) $\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{7} =$
i) $\frac{5}{6} \cdot \frac{20}{21} =$
j) $\frac{2}{9} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{21}{10} =$
k) $\frac{15}{27} \cdot \frac{125}{4} =$
l) $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{100} =$
m) $\frac{27}{1000} \cdot \frac{9}{10} =$
n) $\frac{100}{125} \cdot \frac{25}{10\,000} =$
ñ) $\frac{8}{39} \cdot \frac{13}{24} =$
o) $\frac{36}{41} \cdot \frac{41}{48} =$
p) $0,42 \cdot 0,183 =$
q) $1,25 \cdot 0,457 =$
r) $0,4 \cdot 0,123 =$
s) $0,009 \cdot 0,3 =$
t) $1000 \cdot 0,001 =$
u) $0,01 \cdot 0,001 =$
v) $1,27 \cdot 2,439 =$
w) $3,98 \cdot 12,8 =$

4. **Antes de calcular, estima si cada producto es menor o mayor que 1. Luego, resuelve y compara el resultado con tu estimación.**

a) $\left(\frac{2}{7}\right) \cdot \left(\frac{8}{7}\right) =$

b) $\left(\frac{5}{8}\right) \cdot \left(\frac{10}{9}\right) =$

c) $\left(\frac{9}{11}\right) \cdot \left(\frac{12}{7}\right) =$

d) $\left(\frac{12}{17}\right) \cdot \left(\frac{25}{21}\right) =$

e) $\left(\frac{15}{13}\right) \cdot \left(\frac{26}{27}\right) =$

f) $\left(\frac{32}{31}\right) \cdot \left(\frac{62}{64}\right) =$

g) $\left(\frac{81}{100}\right) \cdot \left(\frac{100}{121}\right) =$

h) $\left(\frac{7}{10}\right) \cdot \left(\frac{1225}{1000}\right) =$

i) $\left(\frac{63}{100}\right) \cdot \left(\frac{1000}{630}\right) =$

j) $1{,}021 \cdot 0{,}92 =$

k) $1{,}12 \cdot 0{,}75 =$

l) $1{,}08 \cdot 0{,}99 =$

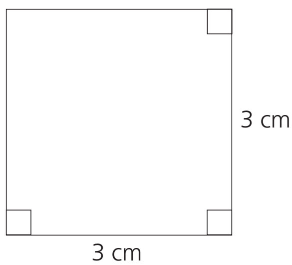
m) $1{,}797 \cdot 0{,}89 =$

n) $1{,}32 \cdot 0{,}68 =$

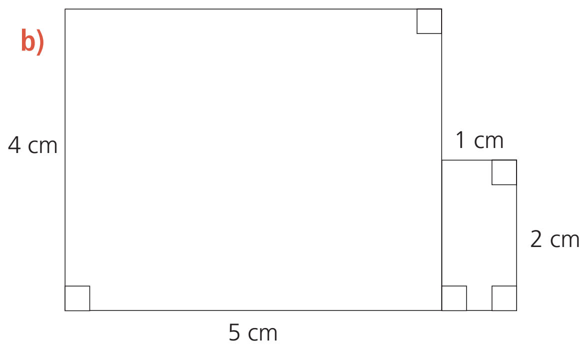
ñ) $2{,}25 \cdot 0{,}32 =$

5. **Calcula el área de las siguientes figuras:**

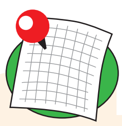
a)



b)



Compara tus respuestas en tu curso. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.



¿QUÉ DEBES RECORDAR?

- En la multiplicación de números naturales, se cumple:
  – Clausura: si **a** y **b** son números naturales, entonces **a · b** es un número natural.
  – Conmutativa: si **a** y **b** son números naturales, entonces:
  $$\mathbf{a \cdot b = b \cdot a}$$
  – Asociativa: si **a**, **b** y **c** son números naturales, entonces:
  $$\mathbf{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$$
  – Distributiva respecto a la adición: si **a**, **b** y **c** son números naturales, entonces:
  $$\mathbf{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$$
- Para multiplicar fracciones, se deben multiplicar los numeradores entre sí y luego los denominadores entre sí.
- Para multiplicar números decimales, se deben multiplicar como si fueran números enteros y luego separar el producto tantas cifras decimales como cifras decimales tengan en total los factores que fueron multiplicados.

Potencias como interpretación de factores iguales

Una empresa constructora edificó un condominio de 6 edificios con 6 pisos cada uno y 6 departamentos por piso. Si cada departamento fue pensado para ser habitado cómodamente por 6 personas, ¿cuántas personas podrían vivir en esa condición si se ocuparan todos los departamentos?

PARA DISCUTIR

- ¿Cuántos departamentos hay en cada edificio?
- ¿Cuántos departamentos hay en el condominio?, ¿cómo lo calculaste?
- ¿Cuántas personas podrían vivir en el condominio?, ¿cómo lo calculaste?
- La situación anterior la podríamos resolver rápidamente calculando el producto de $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6$, ¿por qué?, ¿qué significa cada 6 en el contexto del problema?

Observa que la multiplicación anterior tiene el mismo factor (6) cuatro veces, luego se puede escribir en forma abreviada como 6^4.

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$$

Esta forma de escribir abreviadamente una multiplicación de factores iguales se denomina **potencia**.

NO OLVIDES QUE…

- Una **potencia** es una forma abreviada de escribir una multiplicación de factores iguales. En ella se reconocen la **base** y el **exponente**.

  Ejemplo:

  exponente

  base — a^n Se lee: "**a** elevado a **n**".

- La **base** corresponde al factor que se repite; el **exponente** indica cuántas veces debe repetirse dicho factor.
- El **valor de la potencia** es el producto total que se obtiene al multiplicar la base por sí misma tantas veces como lo indica el exponente, es decir:

  exponente

  base — $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ veces}} = \underbrace{b}_{\text{valor de la potencia}}$

EN TU CUADERNO

1. Escribe como potencia los siguientes enunciados:

a) Dos elevado a cuatro.
b) Cinco elevado a dos.
c) Un medio elevado a cinco.
d) Siete al cuadrado.
e) Dos tercios al cuadrado.
f) Tres décimos al cubo.
g) Veintisiete centésimos elevado a ocho.
h) Sesenta y cuatro milésimos elevado a seis.

2. Escribe con palabras las siguientes potencias:

a) 3^5
b) 8^3
c) 16^2
d) $\left(\frac{1}{2}\right)^7$
e) $\left(\frac{3}{4}\right)^8$
f) $0{,}7^4$

3. Desarrolla y calcula el valor de cada potencia.

a) $6^4 =$
b) $3^5 =$
c) $5^3 =$
d) $\left(\frac{7}{10}\right)^4 =$
e) $0{,}3^5 =$
f) $0{,}8^3 =$

4. Reduce las siguientes expresiones utilizando potencias.

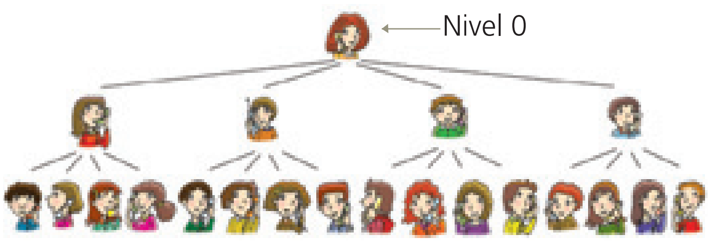
a) $18 \cdot 18 \cdot 18 + 9 \cdot 9 \cdot 9 =$
b) $4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 4 =$
c) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 =$
d) $\left(\frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right) =$
e) $(1{,}25) \cdot (1{,}25) \cdot (1{,}25) \cdot (1{,}25) =$
f) $(6{,}65) \cdot (6{,}65) \cdot (6{,}65) \cdot (6{,}65) =$
g) $(6{,}3) \cdot (6{,}3) + (6{,}3) \cdot (6{,}3) + (6{,}3) \cdot (6{,}3) =$
h) $\left(\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{4}{9}\right) =$

5. Completa el exponente de cada potencia para que la igualdad sea verdadera.

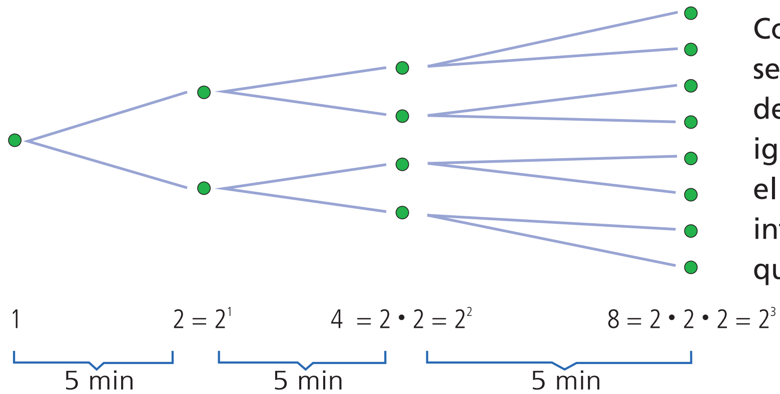
a) $2^{\square} = 8$
b) $2^{\square} = 32$
c) $3^{\square} = 81$
d) $5^{\square} = 125$
e) $0{,}1^{\square} = 0{,}001$
f) $0{,}2^{\square} = 0{,}008$
g) $0{,}5^{\square} = 0{,}125$
h) $10^{\square} = 1\,000\,000$
i) $0{,}5^{\square} = 0{,}0625$

6. Luisa llama a cuatro personas y les informa de una campaña de recolección de alimentos. Cada una de estas cuatro personas, llama a otras cuatro personas distintas para contarles sobre la campaña y así, una a una, le van contando a cuatro nuevas personas.

a) ¿Cuántas personas son informadas en el nivel 4?, ¿y en el nivel 6? Explica cómo lo calculaste.
b) Si cada una de las personas informadas en el nivel 7 aportan un alimento no perecible, ¿cuántos alimentos no perecibles se reunirán en este nivel?



Potencias con base natural y exponente natural



Como se mencionó antes, las bacterias se reproducen por bipartición, esto quiere decir que una bacteria se divide en dos iguales en un tiempo determinado. Observa el diagrama que muestra lo que ocurre si se introduce en un tubo de ensayo una bacteria que se divide en dos cada 5 minutos.

PARA DISCUTIR

- ¿Cuántas bacterias hay a los 20 minutos?, ¿y a los 25 minutos?
- ¿Cuántas veces debe dividirse una bacteria para que el tubo tenga 128 organismos? ¿A qué potencia de 2 corresponde ese número?
- ¿Cuánto tiempo pasa desde que se introduce una bacteria en el tubo hasta que tenga 128 organismos?

EN TU CUADERNO

1. Calcula el valor de cada potencia y luego responde:

a) $2^4 =$ b) $2^6 =$ c) $4^2 =$ d) $4^4 =$ e) $10^2 =$ f) $10^4 =$

- ¿En qué se parecen las bases, los exponentes y el valor de la potencia?, ¿qué puedes concluir?

2. Mario está embaldosando una terraza y necesita saber cuánto mide el lado de cada baldosa, pero no tiene ningún instrumento para medir. Solo sabe que las baldosas son todas iguales, cuadradas y cada una cubre un área de 100 cm². Observa el procedimiento que utiliza.

El área de un cuadrado es igual a la medida de un lado al cuadrado, entonces busco un número que multiplicado por sí mismo sea igual a 100.

a) ¿Es correcto el procedimiento de Mario?, ¿por qué?

b) ¿Cuánto mide el lado de cada baldosa?

c) Digita en una calculadora el número 100 y luego calcula la raíz cuadrada de este número, digitando $\boxed{\sqrt{\ }}$. ¿Qué obtienes? Compara el valor obtenido con la medida del lado de cada baldosa.

d) Calcula cuánto mediría el lado de una baldosa, si su área fuera:

225 cm² 289 cm² 441 cm² 625 cm² 1296 cm²

e) Verifica tus resultados con la calculadora repitiendo lo que hiciste en la letra c). ¿Obtuviste los mismos resultados?

f) Mario dice que para un número a positivo se cumple que si $x^2 = a$, entonces $x = \sqrt{a}$. ¿Qué opinas?, ¿por qué?

Ayuda

El símbolo $\sqrt{\ }$ representa la raíz cuadrada de un número.

3. Compara los resultados en cada caso y completa con < o >, según corresponda.

a) $(3 + 2)^2$ ___ $3^2 + 2^2$
b) $(3 - 2)^2$ ___ $3^2 - 2^2$
c) $(4 + 1)^2$ ___ $4^2 + 1^2$
d) $(2 - 1)^2$ ___ $2^2 - (1)^2$
e) $(5 + 2)^2$ ___ $5^2 + 2^2$
f) $(6 - 4)^2$ ___ $6^2 - 4^2$

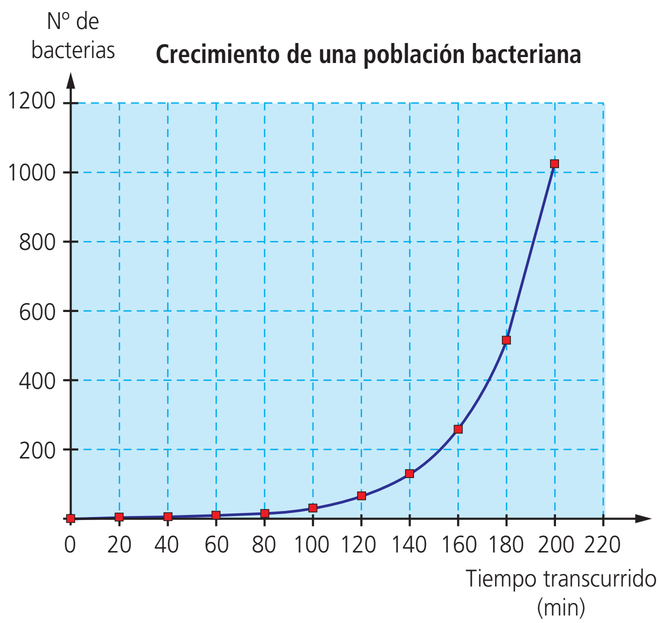
4. Si a y b son dos números positivos, con a > b, completa con el signo < o >, según corresponda.

a) $(a + b)^2$ ____ $a^2 + b^2$
b) $(a - b)^2$ ____ $a^2 - b^2$

- ¿Crees que siempre ocurre lo mismo? Explica.

5. Macarena está analizando el grado de descomposición de un alimento. Ella considera que el alimento está contaminado si la cantidad de bacterias por milímetro cuadrado es 512 o más. Si en un comienzo hay una bacteria por milímetro cuadrado y se sabe que esta bacteria tarda cerca de 20 minutos en reproducirse, ¿cuánto tiempo tardará el alimento en estar descompuesto?

Tiempo transcurrido	Período de 20 min	Número de bacterias	Número de bacterias como potencias
0	0	1	2^0
20 min	1	2	2^1
40 m	2	4	2^2
1 h	3	8	2^3
1 h, 20 min	4	16	2^4
1 h, 40 min	5	32	2^5
2 h	6	64	2^6
2 h, 20 min	7	128	2^7
2 h, 40 min	8	256	2^8
3 h	9	512	2^9
3 h, 20 min	10	1024	2^{10}



a) Si se continúa observando el comportamiento de las bacterias, ¿cuántas habrá por mm^2 en 240 minutos?, ¿en 6 horas?, ¿y en 4 horas, 40 minutos?
b) ¿En cuánto tiempo es posible esperar 65 536 bacterias por mm^2?
c) Si el experimento comenzó a las 12:20 horas, ¿a qué hora hay 128 bacterias por mm^2?, ¿a qué hora el alimento se considera contaminado?, ¿cuántas bacterias por mm^2 hay a las 18:40?

NO OLVIDES QUE...

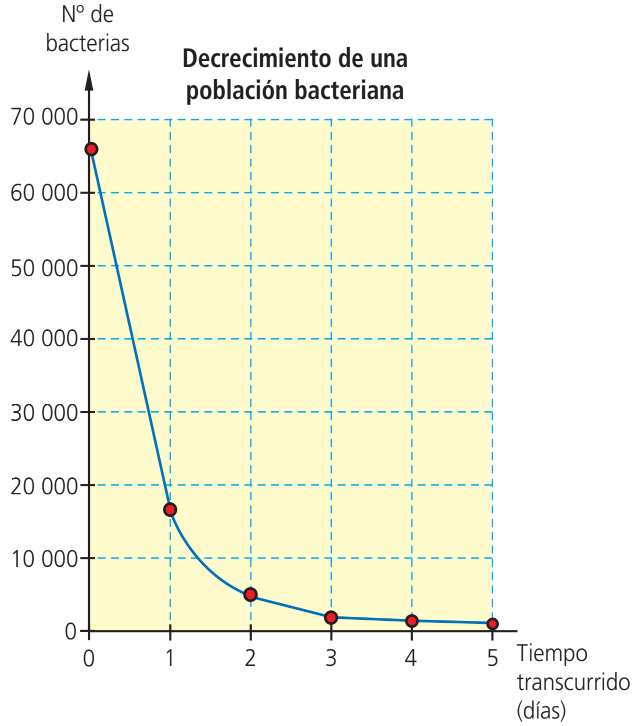
- Si la base de una potencia es 1, el valor de la potencia para cualquier exponente es 1.
- Si el exponente de una potencia es 1, el valor de la potencia es igual a la base.
- Si el exponente de una potencia es 0 y la base es distinta de cero, el valor de la potencia es 1. Si es cero este valor no existe. En general: $1^n = 1$; $\mathbf{a}^1 = \mathbf{a}$; $\mathbf{a}^0 = 1$ con $\mathbf{a} \neq 0$
- Para calcular la raíz cuadrada de un número positivo a ($\sqrt{a}$), puedo buscar un número (**x**) cuyo cuadrado sea **a**. Es decir, $\mathbf{x}^2 = a$, entonces $\mathbf{x} = \sqrt{a}$.

Potencias con base fraccionaria y exponente natural

Como ya vimos, las bacterias crecen exponencialmente, lo que les permite colonizar rápidamente un cierto medio, normalmente vacío. Luego de alcanzar grandes densidades poblacionales, experimentan reducciones en su número e incluso la extinción total debido, por ejemplo, a la falta de alimento o a la acumulación de residuos tóxicos. La disminución del número de bacterias producto de la sobrepoblación también puede ser exponencial, pero como una potencia de base fraccionaria menor que 1.

Considera un grupo de 65 536 bacterias que decrecen exponencialmente a un cuarto de su población cada día.

Completa en tu cuaderno una tabla como la siguiente, que relaciona los días transcurridos y la cantidad de bacterias.



Días transcurridos	Factor de crecimiento	Cantidad de bacterias
0	$\left(\frac{1}{4}\right)^0$	$\left(\frac{1}{4}\right)^0 \cdot 65\,536 = 65\,536$
1	$\left(\frac{1}{4}\right)^1$	$\left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot 65\,536 = 16\,384$
2	$\left(\frac{1}{4}\right)^2$	$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot 65\,536 =$ ______
3	$\left(\frac{1}{4}\right)^3$	$\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 65\,536 =$ ______
4	$\left(\frac{1}{4}\right)^4$	$\left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot 65\,536 =$ ______
5	$\left(\frac{1}{4}\right)^5$	$\left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot 65\,536 =$ ______

PARA DISCUTIR

- ¿Cuántas bacterias han muerto al primer día?, ¿y al tercer día?
- ¿Qué día mueren 3072 bacterias?
- ¿Qué día quedan 16 bacterias?
- ¿En qué momento la población se puede considerar extinta?
- Divide el número de bacterias de un día por el número de bacterias del día anterior, ¿qué sucede?

EN TU CUADERNO

1. Una población de 250 000 insectos decrece por acción de un depredador natural cada año. Completa la tabla y luego responde.

Años transcurridos	Factor de crecimiento	Tamaño de la población
0	$\left(\frac{2}{3}\right)^0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot 250\,000 = 250\,000$
1	$\left(\frac{2}{3}\right)^1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot 250\,000 = 166\,666,\overline{6}$
2		
3		
4		

a) ¿En qué año la población es de 74 074 insectos?

b) ¿Cuántos insectos hay al 5º y 6º año, respectivamente?

c) ¿Después de cuántos años se extinguiría este tipo de insecto?

2. Desarrolla y calcula el valor de cada potencia.

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^3$

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^7$

e) $\left(\frac{21}{25}\right)^2$

b) $\left(\frac{4}{7}\right)^4$

d) $\left(\frac{3}{10}\right)^5$

f) $\left(\frac{16}{20}\right)^3$

3. Compara los resultados en cada caso y completa con <, > o =, según corresponda.

a) $\frac{2^4}{3^4}$ ____ $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

c) $\frac{2^8}{3^8}$ ____ $\left(\frac{2}{3}\right)^8$

b) $\frac{5^3}{7^3}$ ____ $\left(\frac{5}{7}\right)^3$

d) $\frac{6^4}{5^4}$ ____ $\left(\frac{6}{5}\right)^4$

4. Si a, b y c son números positivos, completa con el signo <, > o =, según corresponda.

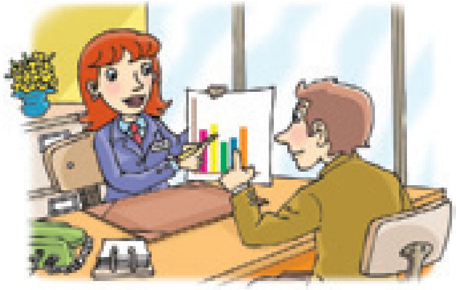
$$\frac{a^c}{b^c} \;\square\; \left(\frac{a}{b}\right)^c$$

NO OLVIDES QUE...

- Para calcular el valor de una potencia cuya base es una fracción, se puede calcular el valor de la potencia del numerador y del denominador.

  En general: $\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{a^n}}{\mathbf{b^n}}$

Potencias con base decimal y exponente natural



Don Sergio va a pedir un préstamo al banco de $ 1 000 000. Recibirá el pago de un negocio, así que podrá pagarlo en una sola cuota, pero dentro de tres meses. Las tasas de interés del banco se ven en la siguiente tabla, donde **C** es el monto del préstamo.

Plazo	Total a pagar
30 días	$C \cdot (1{,}012)$
60 días	$C \cdot (1{,}010)^2$
90 días	$C \cdot (1{,}008)^3$
120 días	$C \cdot (1{,}006)^4$

PARA DISCUTIR

- ¿Cuánto deberá pagar don Sergio luego de los tres meses?
- ¿Le conviene pedir un préstamo a menor plazo? Calcula los valores a pagar en cada caso y justifica tu respuesta.
- ¿Cuánto aumentaría lo que debe pagar si lo cancela al cuarto mes?

EN TU CUADERNO

1. **Alicia pide un préstamo de $ 2 000 000 en el mismo banco, pero lo va a pagar al cabo de 4 meses. ¿Cuánto deberá pagar Alicia por su préstamo? Explica paso a paso cómo lo calculaste.**

2. **Desarrolla y calcula el valor de cada potencia.**

a) $(1{,}2)^3 =$
b) $(0{,}5)^4 =$
c) $(0{,}1)^8 =$
d) $(0{,}01)^4 =$
e) $(10{,}001)^2 =$
f) $(0{,}9)^4 =$
g) $(1{,}35)^2 =$
h) $(2{,}5)^3 =$
i) $(0{,}7)^2 =$
j) $(0{,}99)^3 =$

3. **Observa tus resultados y completa:**

a) Si un número decimal positivo es menor que 1, el valor de sus potencias (de exponente natural) es siempre ____________ que 1.

b) Si un número decimal positivo es mayor que 1, el valor de sus potencias (de exponente natural) es siempre ____________ que 1.

EN EQUIPO

Materiales:
- Cartulina
- Tijeras

En esta actividad, deberán reconocer la relación entre las potencias de 3 y el volumen de un cubo. Formen grupos de 3 integrantes y sigan las instrucciones:

1. Armen entre todos, como mínimo, 64 cubitos de lados de igual medida. Esta medida corresponderá a 1 unidad. Luego, comenzando por un cubito y agregando los cubitos que sean necesarios, formen cubos de mayor tamaño.
2. Completen una tabla como la siguiente:

Cantidad de cubitos por largo	Cantidad de cubitos por ancho	Cantidad de cubitos por alto	Total de cubitos que lo forman
1			
2			

3. Según lo obtenido, comenten y respondan:

   a) ¿Cuántos cubitos de aristas 1 unidad son necesarios para formar cubos de aristas 2, 3 y 4?
   b) ¿Cuántos cubitos son necesarios para formar cubos de aristas 5, 6, 7, 8, 9 y 10, respectivamente?
   c) ¿Podrías escribir el total de cubitos con que se forma cada cubo grande con potencias?, ¿a qué corresponde la base de cada potencia?, ¿y a qué se puede asociar el exponente?
   d) ¿Cuál es el volumen de un cubo de arista 2,5 cm?, ¿cómo lo calculaste?
   e) Si la arista de un cubo mide 9,75 cm y este cubo se forma con 27 cubitos iguales, ¿cuánto mide el volumen de cada cubito?

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

En las calculadoras científicas la tecla $\boxed{x^y}$ se usa para elevar un número a cualquier exponente.

Ejemplo: 3^7 ▶ $\boxed{3}$ $\boxed{x^y}$ $\boxed{7}$ ▶ $\boxed{2187}$

Utiliza la calculadora para verificar tus respuestas d) y e) del trabajo en equipo.

MI PROGRESO

Un conjunto habitacional ocupa ocho cuadras. En cada cuadra se construyeron ocho edificios. Cada edificio tiene ocho pisos. En cada piso hay ocho departamentos. En cada departamento viven ocho personas.

1. Representa la operación que te permite calcular el total de habitantes del conjunto habitacional.
2. Expresa el total de habitantes utilizando potencias.
3. Si cada departamento debe pagar $ 10 000 por gastos comunes al mes, ¿cuánto se recauda mensualmente por este concepto en cada edificio?
4. Sabiendo que $8 = 2^3$, ¿cómo se puede representar el número de habitantes de todo el conjunto habitacional utilizando una potencia de base 2?

Según la teoría del *big bang*,el universo se originó a partir de una gran explosión.

Notación científica

La notación científica se estableció como un acuerdo entre los científicos, para estandarizar, en forma práctica, la escritura de números muy grandes o muy pequeños con los que trabajan a diario. Es una forma de representación que se basa en escribir números usando potencias de base 10. Por ejemplo, según la teoría del *big bang*, sobre el origen del universo, el instante que demoró la explosión que le dio origen fue de 0,00...01 segundos (43 cifras decimales), que en notación científica se expresa: $1 \cdot 10^{-43}$ segundos.

Un número está expresado en **notación científica** cuando está escrito como el producto de una potencia de 10 y un número mayor o igual que 1 y menor que 10.

PARA DISCUTIR

- El siguiente número está expresado de diferentes maneras, pero solo una de ellas corresponde a notación científica. ¿Cuál es?

  $2\ 358\ 000 = 235{,}8 \cdot 10^4$ $\quad$ $2\ 358\ 000 = 23{,}58 \cdot 10^6$

  $2\ 358\ 000 = 2{,}358 \cdot 10^5$ $\quad$ $2\ 358\ 000 = 0{,}2358 \cdot 10^7$

- La masa de la Tierra es aproximadamente 5 983 000 000 000 000 000 000 000 kg, ¿cómo escribirías este número en notación científica?

NO OLVIDES QUE...

- En una potencia, el exponente indica la cantidad de veces que la base se multiplica por sí misma. Si la base de la potencia es 10 y el exponente es positivo, el valor de la potencia queda expresado con la cantidad de ceros que indica el exponente. Si la base es 10 y el exponente es negativo, el valor de la potencia queda expresado con tantas cifras decimales como indica el valor absoluto del exponente. Por ejemplo:

  $10^3 = 1000$ $\quad$ $10^8 = 100\ 000\ 000$ $\quad$ $10^{-3} = 0{,}001$ $\quad$ $10^{-8} = 0{,}00000001$

- Todo número decimal se puede descomponer como suma de productos entre cifras y potencias de 10. Por ejemplo:

$$0{,}0023 = 2 \cdot 0{,}001 + 3 \cdot 0{,}0001 = 2 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4}$$
$$1{,}305 = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}001 = 1 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-3}$$

EN TU CUADERNO

1. **Escribe los siguientes números utilizando notación científica.**

   a) 2 400 000 000 000 =

   b) 420 000 000 000 000 000 =

   c) 0,00000000000000757 =

   d) 0,0000000000000000000033 =

2. Escribe el producto de las siguientes expresiones.

a) $3{,}87 \cdot 10^{9} =$ c) $4 \cdot 10^{20} =$ e) $3{,}677 \cdot 10^{-5} =$ g) $9{,}8 \cdot 10^{-19} =$
b) $1{,}204 \cdot 10^{14} =$ d) $7{,}589 \cdot 10^{8} =$ f) $2{,}54 \cdot 10^{-12} =$ h) $1{,}42 \cdot 10^{-8} =$

3. Determina cuáles de los siguientes números están expresados en notación científica. Explica tu decisión.

a) $6{,}7 \cdot 10$ c) $7 \cdot 10^{8}$ e) $5{,}6 \cdot 10^{-15}$
b) $52{,}8 \cdot 10^{15}$ d) $0{,}22 \cdot 10^{29}$ f) $8{,}4 \cdot 10^{-7}$

4. Compara los resultados en cada caso y completa con <, > o =, según corresponda.

a) $4{,}67 \cdot 10^{-21}$ ______ $4{,}67 \cdot 10^{-23}$ c) 300 000 000 ______ $3 \cdot 10^{8}$
b) $3{,}8 \cdot 10^{14}$ ______ $3{,}8 \cdot 10^{10}$ d) 597 000 000 ______ $5{,}97 \cdot 10^{9}$

5. Escribe en notación usual y notación científica.

a) De acuerdo a investigaciones paleontológicas, los primeros seres humanos llegaron a Europa hace $170 \cdot 10^{4}$ años.
b) La estrella más cercana a nuestro planeta es Épsilon Eradami, ubicada a una distancia, astronómicamente hablando, bastante pequeña: unos $100\,000 \cdot 10^{9}$ km.
c) Júpiter se encuentra a una distancia media al Sol de $778{,}33 \cdot 10^{6}$ km y su diámetro es de $0{,}0142984 \cdot 10^{7}$ km.
d) El pez de agua dulce más pequeño que existe es un diminuto gobio de las islas Filipinas; los especímenes adultos alcanzan una masa de $0{,}0032 \cdot 10^{-3}$ kg.
e) Los zancudos miden entre $50 \cdot 10^{-4}$ y $900 \cdot 10^{-5}$ metros.
f) El pez luna puede alcanzar hasta los 3 metros de longitud y pesar hasta una tonelada. La hembra desova hasta $90 \cdot 10^{4}$ huevecillos para preservar la especie. Cuando la cría nace es 60 millones de veces más pequeña que sus padres.

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

Al realizar cálculos con algunas calculadoras científicas, aparecen a veces resultados como el siguiente:

$1{,}5^{-04}$

Este valor no corresponde a la potencia de 1,5 sino que a la expresión matemática $1{,}5 \cdot 10^{-4}$ y que numéricamente es 0,00015.
Para introducir números en notación científica se usa la tecla EXP.

Si quieres ingresar $3{,}52 \cdot 10^{-3}$ debes pulsar: 3 . 5 2 EXP (–) 3

Obteniendo en la pantalla: $3{,}52^{-03}$

1. Escribe las teclas que permiten introducir los siguientes valores como notación científica.

a) 0,00025 b) 0,00235 c) 3 000 000 d) 0,0000000091

2. Calcula ingresando a tu calculadora los valores como notación científica.

a) 30 000 000 · 2 500 000 000 = b) 0,0005 · 0,0000017 =

Multiplicación de potencias de igual base

Rocío tiene 8 poleras, 4 pantalones y 2 pares de zapatos. Ella desea saber de cuántas formas diferentes se puede vestir combinando su vestuario.

PARA DISCUTIR

- ¿Cómo puede contar Rocío todas las formas distintas de vestirse?
- Rocío lo calcula de la siguiente manera: $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^1 = 2^6$. ¿Es correcto el cálculo que hizo Rocío? Explica.
- Existe una relación entre los exponentes de los factores y el exponente del resultado. ¿Cuál es esta relación?
- ¿De cuántas formas distintas se puede vestir Rocío combinando su ropa?

NO OLVIDES QUE...

- Para multiplicar potencias de igual base, puedes conservar la base y sumar los exponentes.

  Ejemplo: $2^3 \cdot 2^2 = \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2)}_{\text{3 veces}} \cdot \underbrace{(2 \cdot 2)}_{\text{2 veces}} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{5 veces}} = 2^5 = 32$

  En general: $\mathbf{a^n \cdot a^m} = \underbrace{\mathbf{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}}_{\mathbf{n}\text{ veces}} \cdot \underbrace{\mathbf{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}}_{\mathbf{m}\text{ veces}} = \underbrace{\mathbf{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}_{\mathbf{n + m}\text{ veces}} = \mathbf{a^{n+m}}$

EN TU CUADERNO

1. Escribe las siguientes expresiones como una sola potencia y luego calcula su valor.

a) $2^3 \cdot 2^5 =$

b) $3^2 \cdot 3^4 =$

c) $5^1 \cdot 5^3 =$

d) $10^4 \cdot 10^2 =$

e) $3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^3 =$

f) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^4 =$

g) $10^5 \cdot 10^3 \cdot 10^1 =$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$

i) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$

j) $\left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 =$

k) $(0,3)^3 \cdot (0,3)^2 =$

l) $(0,2) \cdot (0,2) \cdot (0,2)^3 =$

2. **Completa de tal forma que se cumplan las igualdades.**

a) $7^{\square} \cdot 7^2 = 7^5$ b) $2^6 \cdot 2^{\square} = 2^9$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\square} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$ d) $(0{,}25)^{\square} \cdot (0{,}25)^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$

3. **Lee y resuelve.**

a) El equipo de fútbol de un colegio debe elegir su tenida deportiva para el próximo año. Como propuesta llegaron 3 marcas distintas de zapatos de fútbol, 9 poleras y 27 pantalones. ¿Cuántas combinaciones de ropa pueden formar? Usa las potencias para resolver.

b) El casino de un colegio ofrece para la hora de colación 2 platos distintos, con 4 opciones de postre y 4 tipos distintos de jugos. ¿De cuántas maneras puedes pedir tu colación en este casino? Usa las potencias para resolver.

c) Andrea puede escoger entre dos caminos distintos para llegar caminando al colegio. Después de su jornada escolar tiene cuatro rutas distintas para llegar al departamento de su tía Francisca. En la noche, puede tomar ocho caminos distintos para volver a su casa. ¿De cuántas maneras distintas puede realizar el recorrido completo del día? Usa potencias para resolver.

4. **A Lucas le gusta pensar en otras maneras para resolver las cosas. Tenía que multiplicar $6 \cdot 4 \cdot 24$, y pensó en descomponerlo en factores primos. Ahora tiene $(3 \cdot 2) \cdot (2^2) \cdot (2^3 \cdot 3)$ y, utilizando las propiedades que conocía, obtuvo $2^6 \cdot 3^2 = 64 \cdot 9 = 576$. Usando este procedimiento, calcula:**

a) $15 \cdot 75 \cdot 27 =$ b) $100 \cdot 25 \cdot 16 =$ c) $21 \cdot 49 \cdot 28 \cdot 9 =$ d) $18 \cdot 72 \cdot 6 =$

ESTRATEGIA MENTAL

Memorizar los valores numéricos de las potencias que son utilizadas frecuentemente agilizará tus cálculos.

1. **Calcula mentalmente los valores de cada potencia que se presenta a continuación y escríbelos en tu cuaderno.**

2^2	2^3	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$(0{,}2)^2$
3^2	3^3	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$(0{,}3)^2$
4^2	4^3	$\left(\frac{1}{4}\right)^2$	$(0{,}4)^2$
5^2	5^3	$\left(\frac{1}{5}\right)^2$	$(0{,}5)^2$

2. **¿En qué se parecen las potencias que están en cada recuadro?, ¿y en qué se diferencian?**

3. **¿Qué regularidades puedes observar en estos ejercicios?**

Multiplicación de potencias de igual exponente

Una empresa productora de lácteos ha sacado al mercado un nuevo envase de su producto. Sus medidas son las siguientes: ancho de 9 cm, largo de 16 cm y alto de 25 cm.

PARA DISCUTIR

- ¿Cuál es el volumen de la caja?, ¿cómo lo calculaste?
- Descompón cada una de las medidas en sus factores. ¿Se pueden escribir como potencias?
- Felipe calcula el volumen de la caja de la siguiente manera: $(3 \cdot 4 \cdot 5)^2 = 60^2$. ¿Cuál es el valor de esta potencia?, ¿es igual al que calculaste al principio?

EN TU CUADERNO

1. Resuelve las siguientes multiplicaciones de potencias de igual exponente, calculando primero el valor de cada potencia y, luego, multiplícalas.

a) $5^2 \cdot 4^2 =$

b) $3^3 \cdot 2^3 =$

c) $5^4 \cdot 3^4 =$

d) $2^5 \cdot 5^5 =$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 =$

f) $0{,}1^6 \cdot 0{,}2^6 =$

2. Escribe como una potencia los resultados que obtuviste en el ejercicio anterior y compáralos con tus compañeros y compañeras. Luego responde:

a) ¿Cómo se relacionan, en cada caso, los exponentes que obtuviste con los de las potencias que se están multiplicando en el ejercicio anterior?

b) ¿Y cómo se relacionan las bases correspondientes?

c) En el ejercicio anterior, si multiplicas las bases y conservas el exponente, ¿obtienes los mismos resultados? ¿Ocurrirá siempre lo mismo?

NO OLVIDES QUE...

- Para multiplicar potencias con igual exponente, se multiplican las bases y se conserva el exponente.

En general: $\mathbf{a^n \cdot b^n} = \underbrace{(\mathbf{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a})}_{\mathbf{n}\text{ veces}} \cdot \underbrace{(\mathbf{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b})}_{\mathbf{n}\text{ veces}} = \underbrace{(\mathbf{a \cdot b}) \cdot (\mathbf{a \cdot b}) \cdot \ldots \cdot (\mathbf{a \cdot b})}_{\mathbf{n}\text{ veces}} = (\mathbf{a \cdot b})^{\mathbf{n}}$

3. Escribe cada expresión como una sola potencia. Guíate por el ejemplo.

$2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$

a) $9^2 \cdot 5^2 =$
c) $2^3 \cdot 3^3 =$
e) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 =$
g) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 2^3 =$

b) $9^2 \cdot 3^2 =$
d) $7^2 \cdot 10^2 =$
f) $\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$
h) $\left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot 10^3 =$

4. Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a) $(100 \cdot 10)^3 =$
c) $(5 \cdot 25)^2 =$
e) $(2 \cdot 0{,}5)^2 =$

b) $(3 \cdot 2)^3 =$
d) $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}\right)^3 =$
f) $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10}\right)^2 =$

5. El largo de un rectángulo mide 6^3 cm y su ancho, 2^3 cm. ¿Cuál es su área?

6. Lucas, como siempre, prefiere factorizar primero para resolver algunas multiplicaciones. Observa: $16 \cdot 25 \cdot 9 = 4^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 = (4 \cdot 5 \cdot 3)^2 = 60^2 = 3600$. Usando esta misma estrategia, calcula:

a) $49 \cdot 25 \cdot 4 =$
b) $27 \cdot 8 \cdot 64 =$
c) $216 \cdot 125 =$
d) $32 \cdot 243 =$

7. Escribe el resultado de las siguientes multiplicaciones como una potencia.

a) $(6^2 \cdot 2^2) \cdot 3^2 =$
c) $3^5 \cdot (2^5 \cdot 5^5) =$
e) $3^4 \cdot \left((0{,}5)^4 \cdot (0{,}2)^4\right) =$

b) $(8^2 \cdot 2^2) \cdot 3^2 =$
d) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 =$
f) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 =$

8. Los siguientes ejercicios están mal resueltos. Explica el porqué y luego corrígelos.

a) $2^2 \cdot 4^2 = 8^4$
b) $5^4 \cdot 7^4 = 12^4$
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{1}{10}\right)^9$

9. Matilde dice que si multiplicas una potencia por sí misma, puedes utilizar la regla para multiplicar potencias de igual base o de igual exponente. ¿Estás de acuerdo con Matilde? Da 3 ejemplos.

10. Patricio dice que multiplicar una potencia por sí misma es equivalente a elevar a 2 el valor de la potencia. ¿Estás de acuerdo? Justifica.

MI PROGRESO

Se considera a Sedna un planeta menor, el más lejano del Sistema Solar, y se estima que la distancia entre Sedna y el Sol es de aproximadamente 13 500 millones de kilómetros.

1. Expresa esta cantidad utilizando notación científica.
2. Representa esta cantidad utilizando solo potencias de 2, 3 y 5.
3. Calcula a cuántos centímetros corresponde esta distancia.
4. Los astrónomos no usan kilómetros para referirse a distancias en el espacio, sino que UA (unidad astronómica) que corresponde a 150 millones de kilómetros. ¿Cuál es la distancia entre Sedna y el Sol, medida en UA?

Hay algunos problemas que los puedes solucionar resolviendo otros más sencillos y así obtener conclusiones acerca del problema original. Por ejemplo, ¿cuál es la última cifra de 2^{27}?

Comprender

- ¿Qué sabes del problema?
  2^{27} es $2 \cdot 2 \cdot 2$ ... 27 veces
- ¿Qué debes encontrar?
  El valor de la cifra de la unidad.

Planificar

- ¿Cómo resolver el problema?
  Calcula 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5 ... y observa la cifra de las unidades en cada caso para observar alguna regularidad.

Resolver

• $2^1 = 2$	$2^5 = 32$	$2^9 = 512$	$2^{25} =$ ________ 2
$2^2 = 4$	$2^6 = 64$	$2^{10} = 1024$	$2^{26} =$ ________ 4
$2^3 = 8$	$2^7 = 128$	$2^{11} = 2048$	$2^{27} =$ ________ 8
$2^4 = 16$	$2^8 = 256$	$2^{12} =$ ________ 6	

La cifra de la unidad del número equivalente a la potencia 2^{27} es 8.

Revisar

- Compara la respuesta con el valor real de 2^{27}.

1. **Calcula la cifra de las unidades de los números equivalentes a cada una de las siguientes potencias, aplicando la estrategia de la página anterior:**

   a) 2^{35} b) 3^{27} c) 3^{57} d) 4^{18}

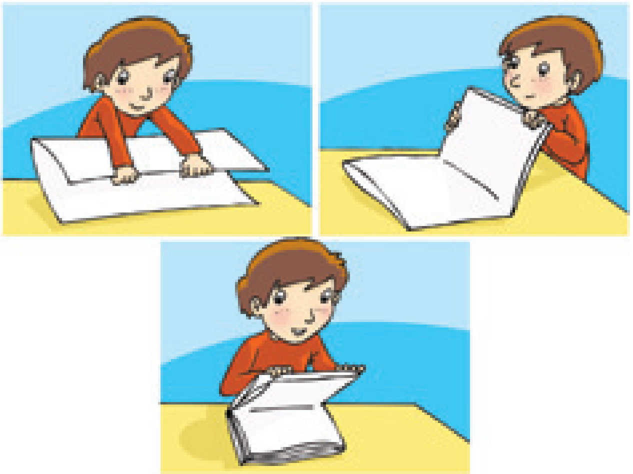
2. **Ahora resuelve el problema de la página anterior utilizando otra estrategia de resolución. Explica paso a paso cómo lo resolviste y compara tu estrategia con las usadas por tus compañeros y compañeras.**

3. **Calcula la cifra de las unidades de los números equivalentes a cada una de las siguientes potencias, utilizando la estrategia que tú quieras. Compara el procedimiento que utilizaste con el de algún compañero o compañera. ¿Cuál es más simple?, ¿por qué?**

   a) 7^{12} b) 8^{24} c) 9^{30}

4. **Imagina que tienes una hoja de papel muy, pero muy grande, y que comienzas a doblarla por la mitad una y otra vez. A medida que el tamaño de la hoja se va achicando (a la mitad, a la cuarta parte, a la octava parte...), el grosor de las hojas dobladas juntas se va agrandando (al doble, al cuádruple, al óctuple...).**

   a) Ahora, si el grosor de una hoja de papel es aproximadamente 0,01 centímetros, ¿cuál sería el grosor de la hoja luego de doblarla 10 veces?
   b) ¿Después de cuántos dobleces el espesor de papel sobrepasará los 300 metros?
   c) ¿Cuál sería el grosor de la hoja (si es que existiera una hoja tan grande) luego de doblarla 50 veces?
   d) ¿Cómo es esta medida en comparación con la distancia aproximada del Sol a Venus, que es de 108 450 000 km?



5. **Una de las leyendas sobre el origen del ajedrez nos sitúa su nacimiento en la India, cerca del siglo VI d. C. Nos cuenta que el inventor del ajedrez fue un brahmán llamado Sissa Ben Dari, que lo creó para distracción y ocio de un rey, y fue tal el éxito que alcanzó en el palacio, que el rey le concedió al inventor la posibilidad de elegir la recompensa que quisiera. El brahmán solicitó entonces que le fuera concedido un grano de trigo por la primera casilla del tablero, dos por la segunda, cuatro por la tercera y seguir así doblando la cantidad hasta completar las 64 casillas del tablero. En un principio, el rey se rió de él por lo poco que pedía y por lo mucho que podría haberle dado. Pero esa sonrisa burlona no le duró mucho tiempo...**

   a) ¿Cuántos granos de trigo corresponden a la décima casilla?, ¿y a la casilla número veinte?
   b) Si hay 6000 granos de trigo en un kilogramo, y una tonelada equivale a 1000 kilogramos, ¿en qué casilla, por sí sola, hay más de una tonelada de trigo?

TECNOLOGÍA

Nuevos DVD podrían guardar hasta 5 terabytes de datos

Una nueva tecnología de la empresa israelita Mempile aseguró que puede guardar un terabyte (TB) de datos, es decir, mil gigabytes (GB) en un disco óptico que en apariencia es igual a los DVD que hoy conocemos.
La compañía pretende mejorar su capacidad con una versión reproducida por un láser azul que la aumentará a 5 TB. El nuevo disco está dividido en 200 capas, cada una capaz de almacenar 5 GB, las que, a diferencia del sistema actual, no se apilan y no se distribuyen físicamente juntas.
Actualmente, Mempile dice que ha desarrollado prototipos que han alcanzado de 600 a 800 GB de capacidad y que pronto logrará la de 1 TB.
Según un portavoz, la vida útil de estos discos es de 50 años y se cree que podrán estar a la venta en dos o tres años más.

Fuente: El Mercurio online, 29 de agosto de 2007

1. Averigüen:

a) la capacidad de almacenamiento de información de un CD, un DVD normal y un pendrive;
b) el nombre que recibe 1024 terabytes y cómo le llaman a 1024 de esas unidades.

2. Comenten y respondan:

a) Para guardar la cantidad total de información que se puede guardar en un DVD de un terabyte, ¿cuántos CD se necesitarían?, ¿y cuántos DVD normales?
b) Un documento estándar usa 2^7 kilobytes. ¿Cuántos de estos documentos se pueden guardar en un CD?, ¿y cuántos en un DVD?, ¿y en este nuevo DVD?
c) ¿Cuándo creen que lanzarán un dispositivo capaz de almacenar 1024 terabytes?

EVALUAMOS NUESTRO TRABAJO

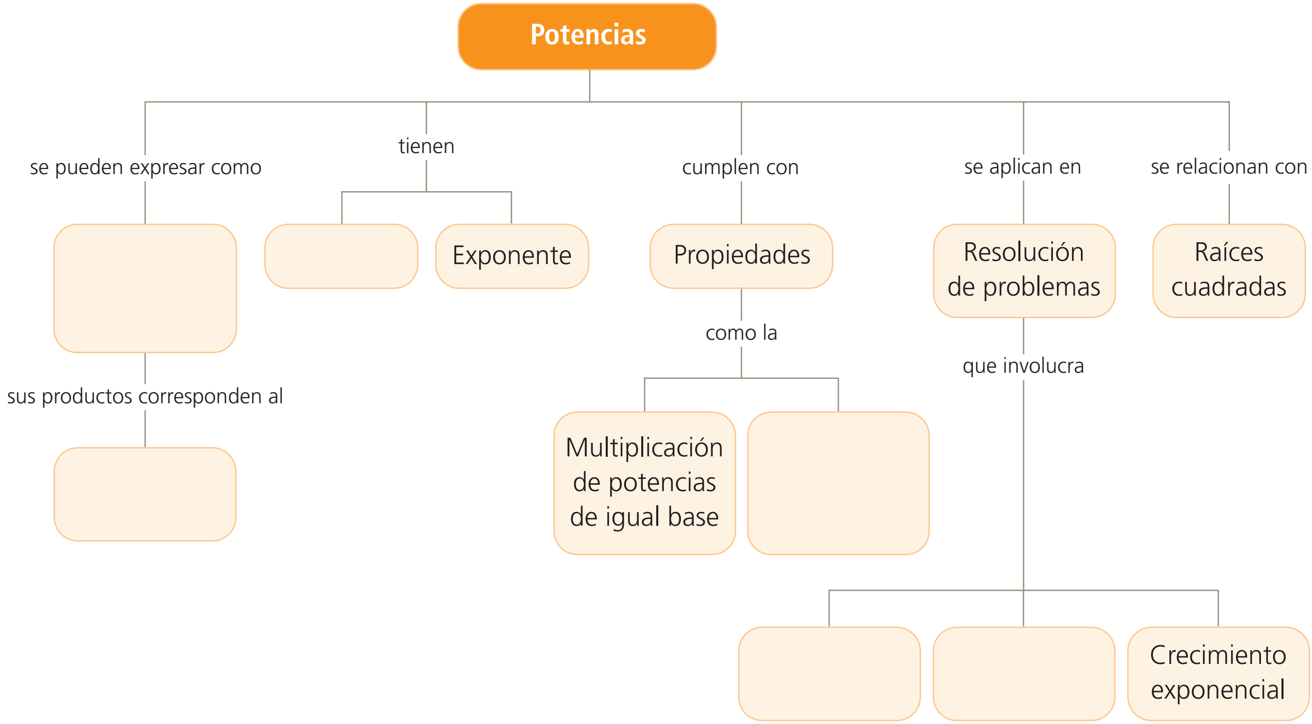
1. Cada uno complete en su cuaderno la siguiente tabla escribiendo Sí, A veces y No, según corresponda. Luego, comparen y comenten sus respuestas.

	Integrante 1	Integrante 2	Integrante 3
Respeté las opiniones de los demás integrantes.			
Cumplí con las tareas que me comprometí.			
Hice aportes interesantes para desarrollar el trabajo.			

Comenten y respondan: ¿en qué podrían mejorar para el próximo trabajo colaborativo?

A continuación, se presenta un mapa conceptual que relaciona los principales conceptos trabajados en la Unidad. Cópialo en tu cuaderno y complétalo con los términos que correspondan.

- Multiplicaciones de factores iguales
- Base
- Valor de la potencia
- Decrecimiento exponencial
- Multiplicación de potencias de igual exponente
- Notación científica



Utilizando los contenidos aprendidos en la unidad y, apoyándote en el esquema anterior, responde:

1. ¿Qué ventajas tiene el uso de potencias?
2. ¿Qué es el valor de la potencia?
3. ¿Qué utilidad tiene la notación científica para representar grandes números?
4. ¿A qué se le llama crecimiento exponencial?, ¿y decrecimiento exponencial?
5. Comenta tus respuestas con tus compañeros y compañeras, y aclara tus dudas.

¿QUÉ APRENDÍ?

Marca, en tu cuaderno, la alternativa correcta en las preguntas 1 a la 8.

Ahora trabaja en tu hipertexto

1. El valor de la potencia $(1,2)^3$ es:

A. 1,728
B. 1728
C. 1,44
D. 1,8

2. ¿Cuál de las siguientes expresiones no es equivalente a $\left(\frac{3}{10}\right)^4$?

A. 0,0081

B. $\frac{81}{10\,000}$

C. $\frac{81}{1000}$

D. $\left(\frac{9}{100}\right)^2$

3. La afirmación falsa es:

A. $3^2 \cdot 3^3 = 3^5$

B. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

C. $2^3 \cdot 2^5 = 2^5 + 2^3$

D. $(0,4)^4 = 0,0256$

4. El producto de 0,0003 · 0,003 · 0,03 en notación científica es:

A. $2,7 \cdot 10^{-10}$
B. $0,27 \cdot 10^{-7}$
C. $27 \cdot 10^{-9}$
D. $2,7 \cdot 10^{-8}$

5. El número 10 000 000 escrito usando una potencia de 10 es:

A. 10^5
B. 10^6
C. 10^7
D. 10^8

6. El producto 3 · 2 · 81 · 4 es equivalente a:

A. $2^3 \cdot 3^5$
B. $2^4 \cdot 3^5$
C. $2^3 \cdot 3^4$
D. $2 \cdot 3^5$

7. ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a 200?

A. $2 \cdot 10^3$
B. $2^5 \cdot 5^2$
C. $2^3 \cdot 2^5$
D. $2^3 \cdot 5^2$

8. La relación incorrecta es:

A. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a^n}{b^n}\right)$

B. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

C. $a^n + b^n = (a + b)^n$

D. $a^n \cdot a^m = a^{(n + m)}$

9. Encuentra los errores y corrígelos:

a) $2^5 + 3^5 + 5^2 + 2^2 = 5^5 + 7^2 = 3125 + 49 = 3174$

b) $2 \cdot 3^4 + 3 \cdot 4^2 + 4 \cdot 2^3 = 6^4 + 12^2 + 8^3$

c) $2^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 + \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{125}{8} + \frac{100}{9}$

10. Completa de tal forma que se cumplan las igualdades.

a) $5^{\square} \cdot 5^3 = 5^7$

b) $2^3 \cdot 2^{\square} = 2^8$

c) $2^7 \cdot 3^7 = \square^7$

d) $(3 \cdot 4)^{\square} = 144$

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\square} = \frac{1}{32}$

f) $(0{,}5)^{\square} \cdot (0{,}5)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^6$

11. Se coloca en un recipiente una bacteria a las 12:00 horas. A las 12:20 el recipiente está lleno de bacterias. Si se sabe que la bacteria se divide en dos cada 2 minutos, ¿a qué hora el recipiente está a la mitad de su capacidad?

Compara tus respuestas en tu curso. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.

¿QUÉ LOGRÉ?

1. Marca según tu apreciación.	**No lo entendí**	**Lo entendí**	**Puedo explicarlo**
Potencias como interpretación de factores iguales.			
Potencias de base natural y exponente natural.			
Potencias de base una fracción positiva y exponente natural.			
Potencias de base un decimal positivo y exponente natural.			
Potencias de 10 y notación científica.			
Multiplicación de potencias de igual base.			
Multiplicación de potencias de igual exponente.			
Resolución de problemas.			

2. Reflexiona y responde.

a) ¿Qué dificultades tuviste en la unidad?, ¿cómo las superaste?

b) ¿Qué te gustó de lo que aprendiste en la unidad?, ¿por qué?

c) Vuelve a la página 34 y revisa el recuadro “En esta unidad podrás…”, ¿crees que lograste aprender todo lo que se esperaba? Explica.

UNIDAD

3

Geometría

Latinstock

EN ESTA UNIDAD PODRÁS...

- Realizar diversas construcciones geométricas.
- Analizar las condiciones necesarias para construir un triángulo a partir de las medidas de sus lados y de sus ángulos.
- Determinar el punto de intersección de las alturas, transversales de gravedad, bisectrices y simetrales en un triángulo, mediante construcciones geométricas.
- Verificar, en casos particulares, el teorema de Pitágoras, su recíproco y su aplicación en contextos diversos.

CONVERSEMOS DE...

Muchos de los objetos que nos rodean, tanto los presentes en la naturaleza como los creados por el ser humano, tienen formas parecidas a las de algunos polígonos o cuerpos geométricos.
Desde las culturas antiguas se han desarrollado muchas construcciones basándose en estas figuras. Hoy en día, estos conocimientos se siguen aplicando tanto en la construcción como en el diseño y el arte.
En la imagen puedes observar una Pirámide de vidrio y aluminio, diseñada por el arquitecto Ieoh Ming Pei, que está ubicada en el patio del Museo de Louvre, en París y da acceso al edificio. Tiene una altura de 21,6 m y un total de 673 paneles de vidrio laminado transparente. El peso total de la estructura es de 180 toneladas. La inclinación de sus paredes, al igual que ocurre con las pirámides egipcias, es de 51°.
Esta Pirámide cumplió 20 años en marzo del 2009 y se celebró con diversos actos culturales y artísticos.

Observando la imagen, responde:

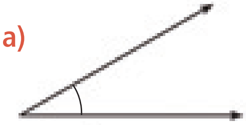
1. Los polígonos en los que se dividen sus caras ¿son rombos o cuadrados? Averígualo.
2. ¿En cuántos de estos cuadriláteros estimas que están divididas las caras que forman esta Pirámide?
3. ¿Qué otro polígono podrías distinguir?, ¿cuántos estimas que hay?

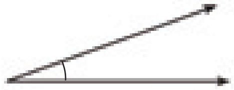
Ahora trabaja en tu hipertexto

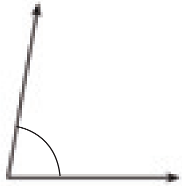
¿CUÁNTO SABES?

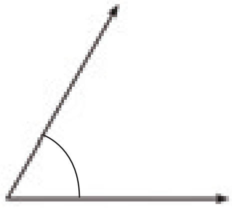
Recuerda lo que aprendiste en años anteriores y resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno.

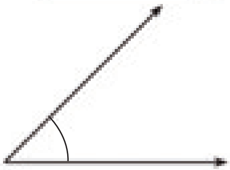
1. Mide con tu transportador los siguientes ángulos:

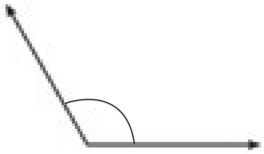
a) 

d) 

b) 

e) 

c) 

f) 

2. Dibuja, en tu cuaderno, una línea recta, y luego, usando regla y escuadra traza:

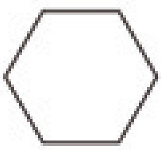
a) una línea roja paralela a ella.
b) una línea verde perpendicular a ella.

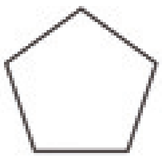
3. Piensa y responde:

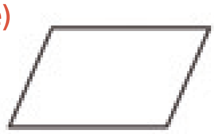
a) ¿Cuándo se dice que dos líneas rectas son paralelas?
b) ¿Cuándo se dice que dos líneas rectas son perpendiculares?

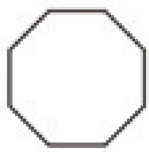
4. En tu cuaderno dibuja una recta y un punto fuera de ella. Mide la distancia entre la recta y el punto que dibujaste, y explica paso a paso cómo lo hiciste.

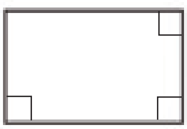
5. Describe las siguientes figuras:

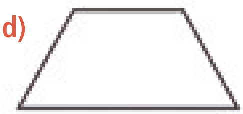
a) 

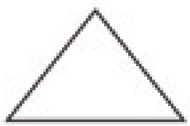
c) 

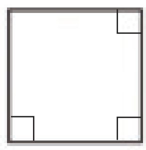
e) 

g) 

b) 

d) 

f) 

h) 

6. Calcula la medida del ángulo suplementario de un ángulo que mide:

a) 30°	d) 90°	g) 10°
b) 120°	e) 45°	h) 72°
c) 70°	f) 60°	i) 135°

7. Responde y explica, paso a paso, cómo obtuviste la respuesta.

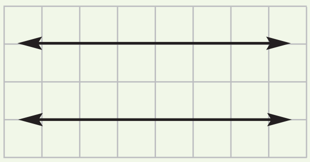
a) ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo?
b) ¿Cuántos grados tiene un ángulo completo?
c) ¿Cuáles son los divisores de 360?

Compara tus respuestas en tu curso. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.

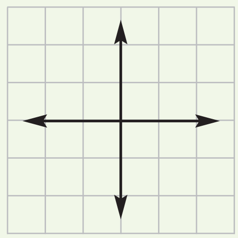
Ahora trabaja en tu hipertexto

¿QUÉ DEBES RECORDAR?

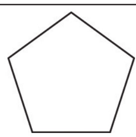
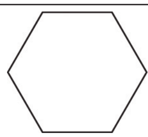
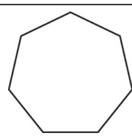
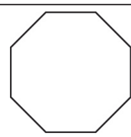
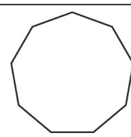
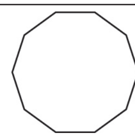
- Se dice que dos rectas son **paralelas** cuando no tienen ningún punto en común, o cuando son coincidentes.



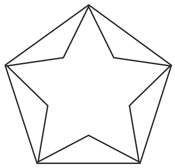
- Se dice que dos rectas son **perpendiculares** cuando al intersecarse forman cuatro ángulos iguales.



- Dos **ángulos** son **contiguos** cuando tienen un lado en común y ningún otro punto en común.
- Dos **ángulos adyacentes** son ángulos contiguos porque tienen un lado común y los otros dos lados son semirectas opuestas. Estos ángulos suman 180° y se llaman suplementarios.
- Para medir la distancia entre un punto y una recta se dibuja una recta perpendicular a ella que pase por el punto y se mide la distancia entre el punto dado y el punto de intersección entre las rectas.
- Se llama **diagonal** de un polígono a todo segmento que une dos vértices no consecutivos.
- Los polígonos se nombran usando los prefijos griegos según el número de lados que tengan, por ejemplo:

Nº de lados	5 lados	6 lados	7 lados	8 lados	9 lados	10 lados
Nombre del polígono	Pentágono	Hexágono	Heptágono	Octágono	Eneágono	Decágono
Figura						

Los polígonos y sus elementos



El símbolo propio de esta escuela era un pentágono estrellado o pentalfa.

Pitágoras, matemático y filósofo griego, alrededor del año 530 a. C. fundó la Escuela Pitagórica en el sur de Italia. En esta escuela se estudiaba filosofía, matemática y ciencias naturales. Los miembros de esta sociedad se caracterizaban por su gran dedicación al estudio de los números, transmitiendo los conocimientos verbalmente y manteniendo en secreto todo lo que allí se contaba. Se considera que en esa escuela se establecieron las bases de la Matemática.

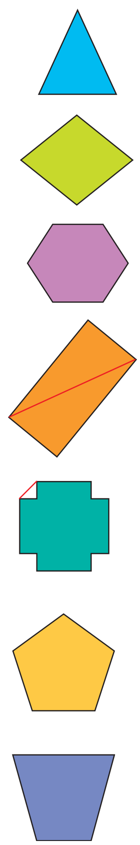
PARA DISCUTIR

- ¿Qué trazos harías para formar 10 triángulos al interior de la estrella?
- ¿Qué tipo de triángulos son?, ¿cómo se clasifican?
- Compara tus resultados con un compañero o compañera: ¿fue el mismo?, ¿hay más de una forma de trazar triángulos en la estrella?
- ¿Qué entiendes por **polígono**? Explica.
- Compara el perímetro de la estrella con el del polígono que la encierra. ¿Cómo son?, ¿por qué crees que ocurre esto?

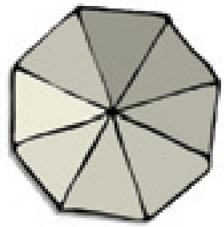
EN TU CUADERNO

1. Completa el siguiente esquema.

- Clasificación de polígonos
  - Número de lados
    - – ______ (3 lados)
    - – ______ (4 lados)
    - – ______ (5 lados)
    - – ______ (6 lados)
    - – etc.
  - Convexo o cóncavo
    - Convexo: todas las ______ del polígono, pertenecen a la región interior de este.
    - ______: de todas las diagonales, al menos una de ellas o parte de ella no pertenece al interior del polígono.
  - Medida de lados y ángulos
    - ______: todos sus lados y ángulos tienen igual medida.
    - Irregulares: al menos uno de sus ______ tiene distinta medida o uno de sus ______ tiene distinta medida.

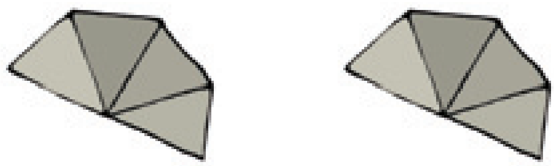


2. **Un escenario octogonal está dividido en 8 triángulos isósceles de base 3 m, como muestra la figura. Los organizadores de un evento musical necesitan rodearlo para que el público no pase.**



a) Sin medir, ¿se puede saber cuánto material se necesita para rodear una vez el escenario?, ¿cómo?

b) Ahora, si se dividiera este escenario en dos partes iguales como se muestra en la figura, ¿les alcanzaría con la misma cantidad de material para rodear ambos escenarios?, ¿por qué?



c) El perímetro del escenario original y la suma de los perímetros de los otros dos escenarios, ¿son iguales? Explica.

3. **Si se amplía en 2 cm cada lado de un cuadrado, ¿en cuánto aumenta su perímetro?, ¿y si se amplía en 3 cm?**

4. **Si se amplía en 1 cm cada lado de un triángulo, ¿en cuánto aumenta su perímetro?, ¿y si se amplía en 5 cm?**

5. **Dibuja cuatro polígonos diferentes y anota su perímetro. Luego, amplía sus lados en 1, 2, 3 y 4 cm. ¿Cómo varían sus perímetros? Compara tu respuestas con las de tus compañeros y compañeras.**

NO OLVIDES QUE...

- Entre los polígonos más utilizados y conocidos se encuentra el triángulo, el cual se caracteriza, entre otros, por ser el polígono con menor número de lados y siempre convexo.
- El perímetro de un polígono es la medida de su contorno, expresada en una unidad de longitud determinada.

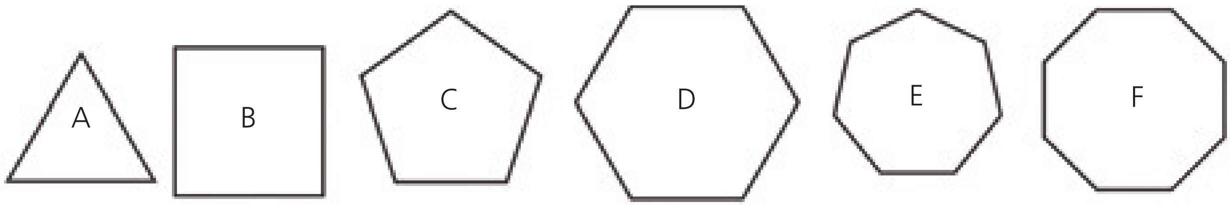
Figuras planas

EN EQUIPO

Materiales:
- Regla
- Transportador
- 3 hojas blancas

En esta actividad, deberán medir los lados y ángulos de diferentes polígonos regulares y dibujar todas las diagonales que se pueden trazar desde un vértice para descubrir regularidades.
Formen grupos de 3 integrantes y sigan las instrucciones.

1. Cada uno mida todos los lados y los ángulos de cada polígono. Luego comparen sus mediciones.



2. Cada uno elija 2 de los polígonos presentados (sin repetirlos) y cópielos en una hoja.
3. Dibujen, para cada polígono elegido, todas las diagonales distintas que se puedan trazar desde cada uno de sus vértices y cuéntenlas. Luego, dibujen todas las diagonales de cada polígono y cuéntenlas.
4. Con los datos obtenidos completen una tabla como la siguiente:

Polígono regular	Número de lados	Número de diagonales desde un vértice	Número total de diagonales
Triángulo			
Cuadrado			
…			

PARA DISCUTIR

- En cada polígono, ¿cómo son sus lados?, ¿y sus ángulos?
- ¿Cuántas diagonales se pueden trazar desde un vértice en un polígono regular de 5 lados, de 8 lados y de **n** lados?, ¿ocurrirá esto para cualquier polígono convexo?
- ¿Cuántas diagonales se pueden trazar en total en un polígono regular de 4 lados y de **n** lados?, ¿ocurrirá esto para cualquier polígono convexo?

Ayuda

Un polígono es **convexo** si todos sus ángulos interiores son menores que 180º.

NO OLVIDES QUE...

- Si un polígono tiene todos sus lados de igual medida y todos sus ángulos son congruentes, se llama **polígono regular**. En un polígono regular, todos sus vértices están a igual distancia del centro del polígono.

EN TU CUADERNO

1. Calcula, sin dibujar los polígonos, el número de diagonales que se pueden trazar desde un vértice y el número total de diagonales de:

a) un dodecágono (12 lados).

b) un pentadecágono (15 lados).

2. Recorta un triángulo cualquiera de papel, dóblalo de manera de que sus vértices coincidan en un punto. ¿Cuánto mide la suma de los ángulos interiores de un triángulo?, ¿ocurrirá esto para cualquier triángulo?, ¿por qué? Comenta y compara tus respuestas con las de tus compañeros y compañeras.

3. Copia en una hoja los polígonos de la página anterior. Divídelos en triángulos trazando las diagonales desde un vértice, completa la tabla y responde.

Nombre del polígono	Cuadrado	Pentágono	Hexágono	Heptágono	Octágono
Nº de lados					
Nº de triángulos que se forman					
Suma de los ángulos interiores					
Medida de cada ángulo interior					

a) ¿Cómo podrías expresar la relación entre el número de lados de un polígono y la suma de todos sus ángulos interiores?

b) ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos interiores de un polígono de 10 lados?, ¿y de uno de 36 lados?

c) ¿Cómo podrías calcular la medida de cada ángulo interior de un polígono regular de **n** lados?

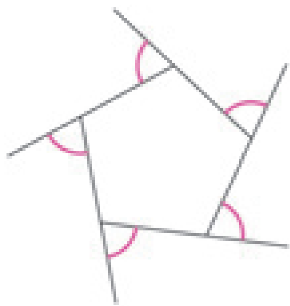
d) ¿Cuánto mide cada ángulo interior de un polígono regular de 10 lados?, ¿y de uno de 36 lados?

4. Copia en una hoja la siguiente figura.

a) Recorta los ángulos exteriores.

b) Pégalos en tu cuaderno, como si fuesen ángulos adyacentes.

c) ¿Qué puedes concluir respecto de la suma de los ángulos interiores de este polígono?, ¿ocurrirá siempre lo mismo? Verifícalo para tres polígonos diferentes.



NO OLVIDES QUE...

- La suma de todos los ángulos interiores de un polígono de **n** lados se puede calcular con la siguiente fórmula: $(n - 2) \cdot 180°$.
- La suma de todos los ángulos exteriores de un polígono convexo es **360°**.
- El número de diagonales de un polígono convexo de **n** lados se puede calcular con la siguiente fórmula: $\dfrac{n \cdot (n - 3)}{2}$.

Construcciones geométricas

La forma del triángulo tiene propiedades que son muy útiles a la hora de hacer construcciones, por ejemplo, en los techos de las casas, edificios, galpones, etc.

Obrero trabajando en la construcción del techo de una casa.

PARA DISCUTIR

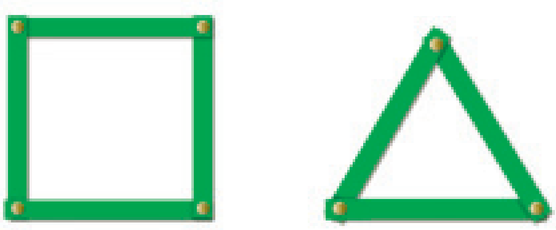
- ¿Por qué crees que utilizan formas triangulares y no cuadradas?
- ¿Cuáles son las propiedades de los triángulos que los hacen útiles para las construcciones mencionadas?

EN EQUIPO

Materiales:
- Cartón
- Tijeras
- 21 Ganchos
- Regla
- Lápiz

En esta actividad podrás descubrir porqué se utilizan la forma de los triángulos para las construcciones.
Forma un grupo con dos compañeros o compañeras y sigan las instrucciones.

1. Un integrante corta siete tiras de cartón de 5 cm, el otro de 7 cm y el tercero de 10 cm.
2. Cada uno forma un cuadrado uniendo cuatro de ellas en sus extremos con los ganchos. Con las tres tiras que les sobra a cada integrante forman triángulos, uniendo sus extremos con los ganchos.



3. Muevan alguno de los vértices de los cuadrados. Luego, respondan y fundamenten:
   a) La figura ¿sigue siendo un cuadrado?, ¿todos obtienen lo mismo?
   b) ¿Qué ocurre con las medidas de los lados y ángulos de la figura?
4. Ahora muevan los vértices de los triángulos y respondan.
   a) En este caso, ¿qué ocurre con las medidas de los lados y ángulos interiores de cada triángulo?, ¿por qué creen que ocurre esto?
   b) ¿Existirán otras figuras poligonales que tengan esta propiedad?
5. Comenten y respondan.
   a) ¿Cuál es la propiedad de los triángulos que los hace tan importantes para la construcción?
   b) ¿Cuántos triángulos diferentes puedes construir con tres lados dados?, ¿y con tres ángulos?

NO OLVIDES QUE...

En general, para construir cualquier polígono no es necesario conocer las medidas de todos sus elementos. Basta con algunas medidas de lados y/o ángulos.

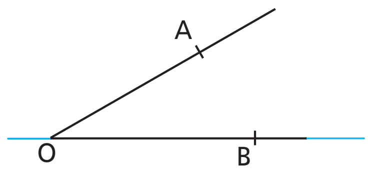
EN TU CUADERNO

1. **Copia en una hoja el segmento AB, utilizando regla y compás. Sigue las instrucciones.**

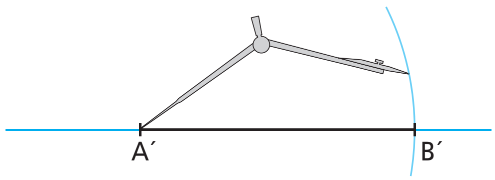
1° Dibuja una recta L y elige un punto A’ en ella.
2° Mide el segmento AB ubicando la punta del compás en A y abriéndolo hasta B.
3° Con esta abertura del compás, dibuja un arco de circunferencia con centro en A’ que corte a la recta L. El punto de intersección entre el arco que dibujaste y L corresponde a B’. Luego, el segmento A’B’ es una copia exacta del segmento AB.

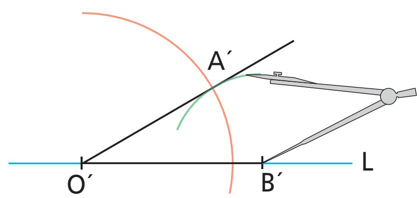
2. **Dibuja con una regla dos segmentos distintos, intercámbialos con los de un compañero o compañera y pídele que los copie, aplicando el procedimiento anterior.**

3. **Copia en una hoja el ángulo AOB, utilizando regla y compás. Sigue las instrucciones.**



1° Dibuja una recta L y copia el segmento OB en ella. Llámalo O’B’.
2° Con el compás, dibuja un arco de circunferencia con centro O’ y abertura igual a la longitud de OA, como se muestra en la figura.
3° Con centro en B’, dibuja un arco de circunferencia cuyo radio tenga igual medida que AB.
4° El punto de intersección de las circunferencias es A’.
5° Traza un rayo desde O’ hacia A’ y obtendrás el ángulo A’O’B’.





4. **Dibuja con una regla dos ángulos distintos, intercámbialos con los de un compañero o compañera y pídele que los copie, aplicando el procedimiento anterior.**

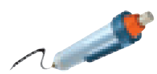
Construcción de triángulos

Javiera y Mario tienen que construir un triángulo y conocen las medidas de los tres lados, dadas por los segmentos que se muestran a continuación.

PARA DISCUTIR

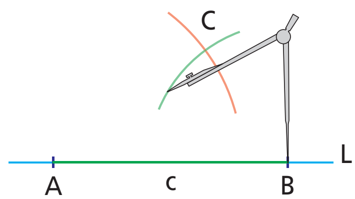
- ¿Pueden obtener triángulos diferentes?, ¿por qué?
- Aplicando lo que aprendiste sobre el copiado de segmentos, ¿cómo describirías la construcción que debieran hacer Javiera y Mario?
- Si conocieran solo la medida de sus tres ángulos, ¿podrían construir un único triángulo?, ¿por qué?

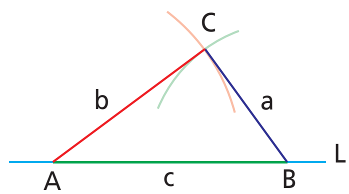
EN TU CUADERNO



1. Construye un triángulo, cuyos lados están dados por los segmentos que se muestran a continuación. Utiliza regla y compás y sigue las instrucciones.

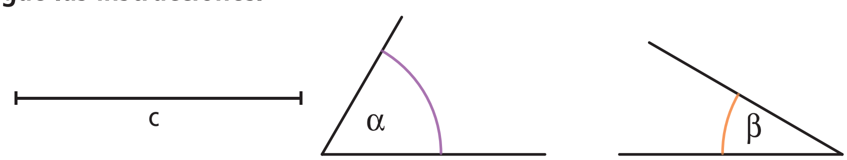
1° Dibuja una recta y sobre ella copia el segmento c, que será el lado c del triángulo. Los extremos de este serán los vértices A y B del triángulo.
2° Mide con el compás el segmento b. Con esta abertura, traza un arco de circunferencia con centro en A.
3° Mide con el compás el segmento a. Con esta abertura, traza un arco de circunferencia con centro en B.
4° El punto de intersección de ambos arcos es el tercer vértice del triángulo: C.
5° Une los vértices A y B con C, respectivamente, formando el triángulo ABC.



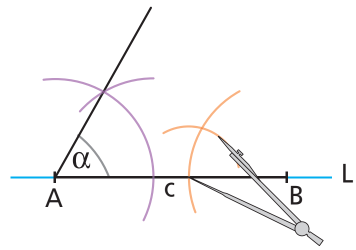


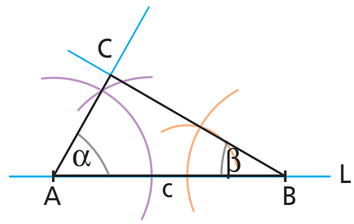
2. Aplicando el procedimiento anterior, construye en una hoja un triángulo cuyos lados midan 3 cm, 4 cm y 5 cm, respectivamente. Explica, paso a paso, cómo lo hiciste.

3. Construye un triángulo, conociendo un lado (c) y los dos ángulos contiguos a él (α y β). Utiliza regla y compás y sigue las instrucciones.



1° Dibuja una recta y sobre ella copia el segmento c, que será el lado c del triángulo. Los extremos de este serán los vértices A y B del triángulo.
2° Copia el ángulo α con vértice en A y el ángulo β, con vértice en B.
3° La intersección de los lados no comunes de los ángulos es el tercer vértice del triángulo: C.
4° Une los vértices y obtendrás el triángulo pedido.

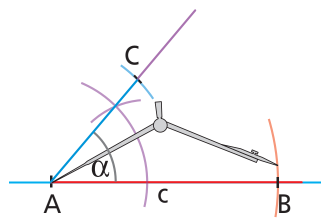




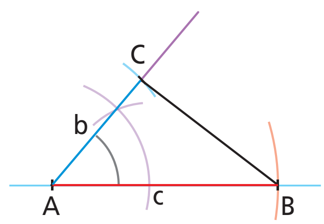
4. Aplicando el procedimiento anterior, construye en una hoja un triángulo con un lado que mida 3,5 cm y que los ángulos contiguos a este lado miden 40º y 90º, respectivamente. Explica, paso a paso, cómo lo hiciste.

5. Construye un triángulo, conociendo dos lados (b y c) y el ángulo comprendido entre ellos (α). Utiliza regla y compás y sigue las instrucciones.

1° Copia el ángulo α sobre una recta L, determinando el vértice A.
2° Sobre cada uno de los rayos del ángulo copia los lados b y c dados, determinando los vértices B y C.
3° Une los vértices determinando el triángulo ABC.



6. Aplicando el procedimiento anterior, construye en una hoja un triángulo con dos lados que midan 5 cm y el ángulo comprendido entre ellos que mida 60º. Explica, paso a paso, cómo lo hiciste.



NO OLVIDES QUE...

- Al conocer las medidas de los tres ángulos de un triángulo no se obtiene un único triángulo.
- Para garantizar que el triángulo construido sea único siempre se debe considerar, por lo menos, la medida de uno de sus lados. Es decir, se puede construir un único triángulo si de conocen las medidas de:
  - los tres lados (LLL)
  - un lado y los ángulos contiguos a él (ALA)
  - dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (LAL)

Medidas de los lados de un triángulo

Marcelo quiere construir triángulos con las medidas que se muestran a continuación:

Lado a	Lado b	Lado c
5 cm	4 cm	6 cm
3 cm	5 cm	8 cm
2 cm	4 cm	8 cm
5 cm	4 cm	3 cm
2 cm	1 cm	7 cm
3 cm	4 cm	3 cm
3 cm	6 cm	9 cm

PARA DISCUTIR

- ¿Puede construir todos los triángulos?
- Aplicando los procedimientos aprendidos, construye los triángulos a partir de las medidas dadas para sus lados, ¿qué ocurre?, ¿por qué crees que pasa esto?
- En cada uno de los casos anteriores suma las medidas de dos de sus lados, ¿cómo es este resultado en comparación a la medida del tercer lado?, ¿ocurrirá siempre lo mismo? Explica.
- ¿Qué cambio podrías hacer para poder construir todos los triángulos?

Como puedes ver, no siempre es posible construir un triángulo dado la medida de tres segmentos. En otras palabras, para que un triángulo exista debe cumplir ciertas condiciones.

NO OLVIDES QUE...

- En todo triángulo, la suma de las longitudes de dos lados es siempre mayor que la longitud del tercer lado. Es decir, si **a, b** y **c** son tres segmentos podremos construir un triángulo con ellos solo si se cumple que:
  $a + b > c$, $a + c > b$ y $b + c > a$.

Esta propiedad anterior se conoce como **desigualdad triangular.**

- Además, recuerda que un triángulo se puede clasificar según la medida de sus lados en:
  – **Equilátero:** tiene sus tres lados de igual medida.
  – **Isósceles:** tiene dos lados de igual medida.
  – **Escaleno:** tiene todos sus lados de diferentes medidas.

EN TU CUADERNO

1. Construye dos triángulos equiláteros, uno cuyo lado mida 3 cm y otro cuyo lado mida 5 cm. Utiliza regla y compás.

a) Aumenta en 1 cm uno de los lados de los triángulos anteriores. ¿Siguen siendo equiláteros?

b) Repite la actividad anterior aumentando en 2 y 3 cm uno de los lados de los triángulos equiláteros. ¿Siguen siendo triángulos equiláteros? Justifica.

c) Aumenta en 1 cm solo un lado de los triángulos equiláteros. ¿Qué tipos de triángulos son los resultantes? Explica.

2. Construye un triángulo isósceles cuyos lados midan 4 cm, 4 cm y 6 cm, respectivamente. Aumenta en 1 cm cada lado de los triángulos. ¿Qué tipo de triángulo es el resultante? ¿Ocurrirá siempre lo mismo? Explica.

3. Marcela dice que construyó un triángulo cuyos lados miden 8, 12 y 18 cm. Felipe dice que él construyó un triángulo isósceles cuyos lados miden 8, 10 y 8 cm. Paula dice que los lados del triángulo que ella construyó miden 10, 14 y 3 cm. ¿Es verdad lo que dicen Marcela, Felipe y Paula?, ¿por qué?

4. Unos astutos corredores de propiedades publicaron el siguiente aviso para vender un terreno situado en la parte más cara del área comercial:

- ¿Por qué no se presentó ningún comprador?

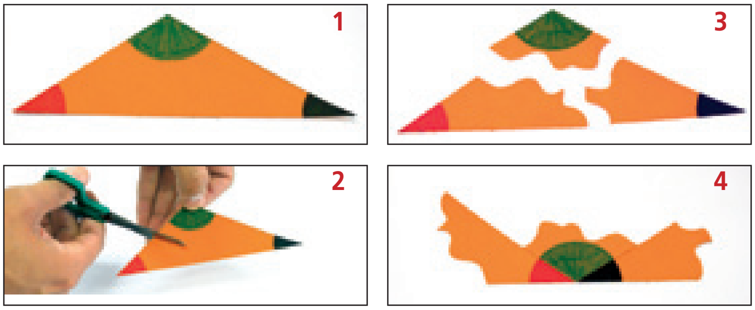
Medidas de los ángulos de un triángulo

EN EQUIPO

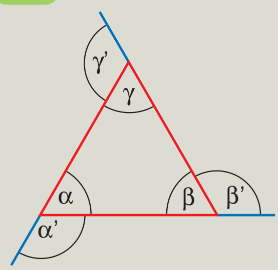
Materiales:
- Tijeras
- Regla
- Cartulina
- Lápices de colores

En esta actividad descubrirán una propiedad relativa a los ángulos interiores de un triángulo. Sigan las instrucciones.

1. En una cartulina cada uno dibuja un triángulo acutángulo, uno rectángulo y uno obtusángulo.
2. Pinten sus ángulos interiores de distinto color.
3. Recorten cada uno de los triángulos dibujados.
4. Luego, realicen con cada uno de ellos lo que se observa en la siguiente secuencia:



Ayuda



- α, β, γ: ángulos interiores.
- α', β', γ': ángulos exteriores.

PARA DISCUTIR

- ¿Qué pueden concluir acerca de las medidas de los ángulos interiores de cada triángulo?
- ¿Se cumplirá esta propiedad en todo tipo de triángulos?
- ¿Cuánto crees que suman los ángulos exteriores de un triángulo?, ¿por qué?

NO OLVIDES QUE...

- En todo triángulo, la suma de las medidas de los ángulos interiores es 180° y la de los ángulos exteriores es 360°.
- Además, según la medida de sus ángulos interiores, un triángulo se puede clasificar en:
  – **Acutángulo:** sus tres ángulos son agudos.
  – **Obtusángulo:** uno de sus ángulos es obtuso.
  – **Rectángulo:** uno de sus ángulos es recto.

EN TU CUADERNO

1. **Utilizando un procedimiento similar al anterior verifica si la suma de los ángulos exteriores de un triángulo es 360º. Compara tu procedimiento con el de un compañero o compañera, ¿obtuvieron lo mismo?**

2. **Completa la siguiente tabla.**

Medida de los ángulos interiores			¿Es posible construir un triángulo?
45º	90º	90º	
76º	24º	80º	
120º	23º	100º	

3. **Completa cada recuadro con la medida que debe tener el tercer ángulo que falta en cada trío de datos.**

Ángulos interiores de un △		
20º	60º	
55º		25º
	67º	12º

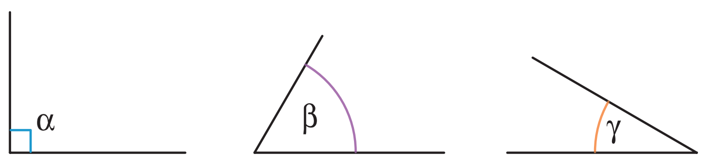
Ángulos exteriores de un △		
	90º	150º
	170º	150º
61º		209º

4. **Piensa, comenta y responde.**
   a) ¿Se puede construir un triángulo ubicando adecuadamente dos ángulos rectos?
   b) ¿Se puede construir un triángulo con dos ángulos obtusos?
   c) ¿Se puede construir un triángulo con dos ángulos agudos?

MI PROGRESO

Observa la imagen y responde:

1. Para que un triángulo se pueda construir, ¿qué condición deben cumplir las medidas de sus lados?
2. Construye un triángulo dados sus tres ángulos α, β y γ. Explica, paso a paso, cómo lo construiste y, luego, responde.

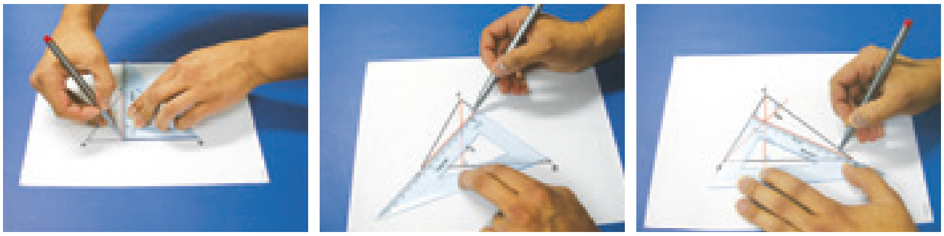


- Con los ángulos dados ¿se puede construir un único triángulo?, ¿por qué?

3. Piensa y responde:
   a) ¿Un triángulo isósceles puede ser obtusángulo?
   b) ¿Un triángulo equilátero puede ser rectángulo? Justifica.
   c) ¿Un triángulo equilátero puede ser obtusángulo? Justifica.

Alturas de un triángulo

Hasta aquí has trabajado con los elementos primarios de los triángulos: lados, ángulos y vértices. Ahora aprenderás qué son y cómo construir los elementos secundarios de los triángulos: alturas, bisectrices, simetrales y transversales de gravedad.
Observa cómo puedes trazar las alturas de un triángulo utilizando una escuadra:



Ayuda

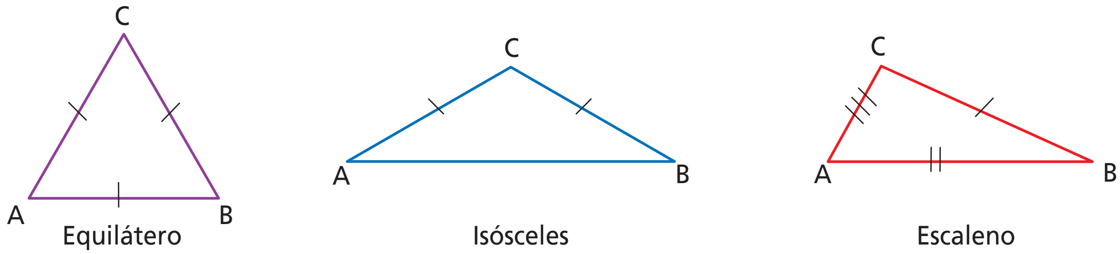
Las alturas se designan por la letra **h** (minúscula), ya que proviene del inglés height, que significa altura. A la derecha de la letra **h** se anota el vértice desde el cual se traza la altura, por ejemplo: **hc.**

PARA DISCUTIR

- ¿Todas las alturas de un triángulo tienen la misma medida?, ¿cómo lo sabes?
- La medida de cada altura, ¿es la mayor o la menor distancia entre el vértice y el lado opuesto correspondiente? Explica.

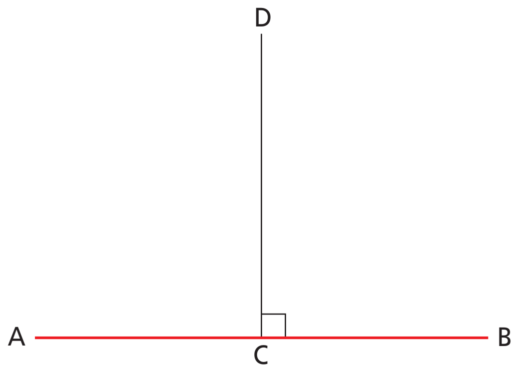
EN TU CUADERNO

1. Copia en tu cuaderno los siguientes triángulos.



a) Construye las tres alturas en el triángulo equilátero.
b) Construye la altura **hc** en los triángulos isósceles y escaleno.
c) ¿En cuántos triángulos dividen al triángulo equilátero las alturas?
d) ¿Cómo son los triángulos que se forman al trazar **hc** en el triángulo isósceles?
e) Compara la altura que dibujaste en el triángulo escaleno con la del triángulo isósceles. ¿Qué observas? Explica.

2. **Sobre el punto medio de un segmento de línea recta de 6 cm se traza una perpendicular CD de 4 cm de longitud como se muestra en la figura. Sin construir el triángulo predice qué tipo de triángulo se formará al unir los puntos A y B con el punto D. Fundamenta tu respuesta.**



3. **Dibuja 2 triángulos acutángulos, 2 rectángulos y 2 obtusángulos, distintos entre sí.**

a) Traza las tres alturas en cada triángulo y marca su punto de intersección, llamado ortocentro.
b) Compara la ubicación de las alturas en cada triángulo (al interior o exterior de este).
c) A partir de lo anterior, completa la siguiente tabla:

	Tipo de triángulo		
	Acutángulo	**Rectángulo**	**Obstusángulo**
Lugar donde se ubican las alturas			
Lugar donde se encuentra el ortocentro			
Comentarios y conclusiones			

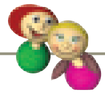
Copia en tu cuaderno

NO OLVIDES QUE...

Las alturas de un triángulo son segmentos perpendiculares a los lados del triángulo y que unen estos con su vértice opuesto (representan la distancia más corta entre el vértice y el lado opuesto). Las tres alturas o sus prolongaciones se cortan en un punto llamado ortocentro (H).

Bisectrices de un triángulo

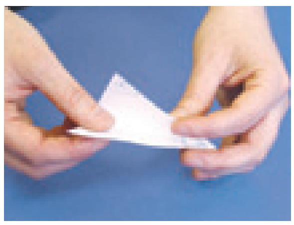
EN EQUIPO

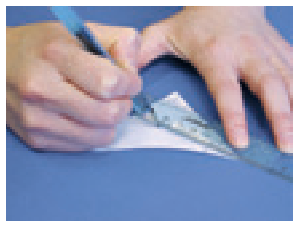


Materiales:
- Papel Lustre
- Tijeras
- Lápices
- Hoja de papel
- Regla
- Compás

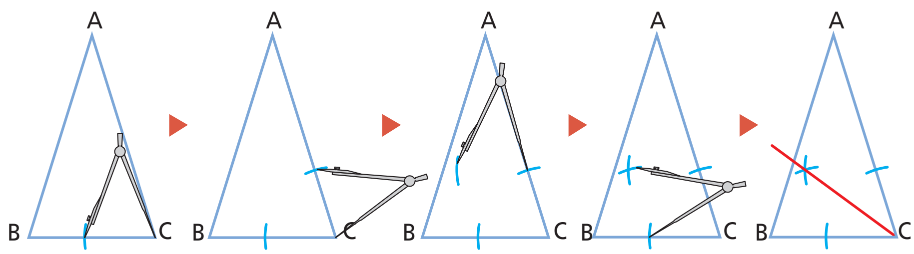
En esta actividad aprenderán a construir bisectrices a través de dobleces y, luego, con regla y compás. Formen grupos de tres integrantes y sigan las instrucciones.

1. Un integrante dibuja en papel lustre un triángulo acutángulo, otro un triángulo rectángulo y el tercer integrante, un triángulo obtusángulo.
2. Recorten los triángulos dibujados.
3. Doblen los ángulos interiores de cada triángulo exactamente por la mitad, haciendo coincidir dos de los bordes del papel en cada doblez.
4. Marquen los segmentos que quedaron determinados por cada doblez. Estos corresponden a las bisectrices de cada triángulo.
5. Marquen con un color diferente el punto donde se cortan los tres segmentos en cada uno.





6. Ahora, en una hoja, copien los triángulos que dibujaron en el papel lustre y construyan sus bisectrices con regla y compás, siguiendo los pasos que se muestran en las siguientes figuras.



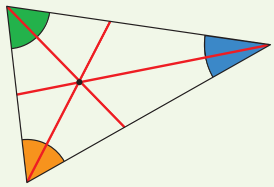
7. Comparen las bisectrices que construiste con regla y compás con las que hicieron con dobleces en papel lustre.

PARA DISCUTIR

- ¿Cómo son las medidas de las tres bisectrices que se obtienen para cada triángulo?
- Las bisectrices ¿se intersecan al interior o exterior del triángulo?, ¿ocurrirá esto siempre?
- ¿Qué figuras se forman al intersecarse?
- ¿En qué tipos de triángulos estos segmentos podrían coincidir con las alturas?

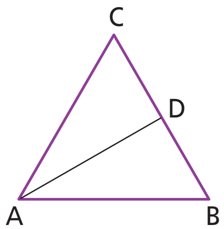
NO OLVIDES QUE...

- Las bisectrices son elementos secundarios de un triángulo. Estas dividen cada ángulo interior del triángulo en dos ángulos de igual medida.
- En un triángulo se pueden trazar tres bisectrices correspondientes a sus ángulos interiores. Estas se intersecan en un punto llamado incentro (I).

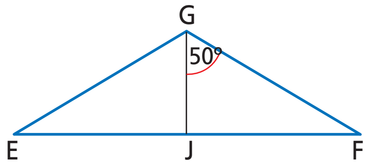


EN TU CUADERNO

1. **En la figura, ABC es un triángulo equilátero. AD es bisectriz. ¿Qué tipo de triángulos son ABD y DCA?**



2. **En la figura, EFG es un triángulo isósceles de base EF. GJ es bisectriz. ¿Cuál es la medida de cada ángulo de este triángulo?**



HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

Conéctate a Internet e ingresa a www.santillana.cl/futuro/ejerc4.html y busca el link correspondiente.
Allí aparece un triángulo **ABC,** en el cual se han trazado las tres bisectrices de un triángulo. Además, se han marcado con verde las intersecciones de la circunferencia inscrita con los lados del triángulo.
Mueve los vértices del triángulo usando el mouse y, luego, responde.

1. **¿Es posible que la circunferencia quede al exterior en algún tipo de triángulo? Justifica tu respuesta dando diferentes ejemplos.**
2. **¿Podrías construir las bisectrices de la figura anterior sin utilizar compás? ¿Cómo?**
3. **¿Cuántos triángulos se forman al interior del triángulo ABC luego de construir las bisectrices? ¿Hay alguna relación entre alguno de esos triángulos?**

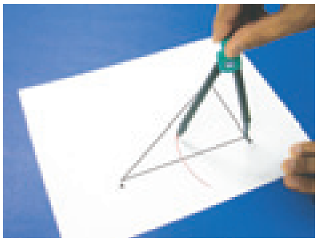
Simetrales

EN EQUIPO

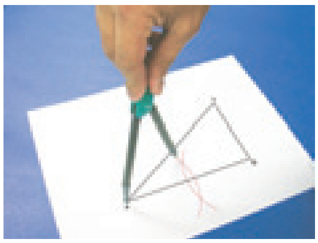
Materiales:
- 3 hojas de papel
- Regla
- Compás
- Lápiz

En esta actividad aprenderán a construir simetrales con regla y compás. Formen grupos de tres integrantes y sigan las instrucciones.

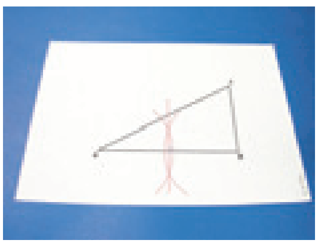
1. Cada integrante dibuja un triángulo distinto y traza un arco de circunferencia con centro en un vértice del triángulo. El radio de este arco de circunferencia debe ser mayor que la mitad del lado sobre el cual se traza.



2. Con la misma abertura del compás, cada uno traza un arco de circunferencia con centro en el vértice opuesto como se muestra en la figura.



3. Une los puntos donde se intersecan ambos arcos de circunferencia con una recta.



5. La recta que trazó cada uno es una de las simetrales del triángulo. Traza las otras simetrales repitiendo el procedimiento anterior.

PARA DISCUTIR

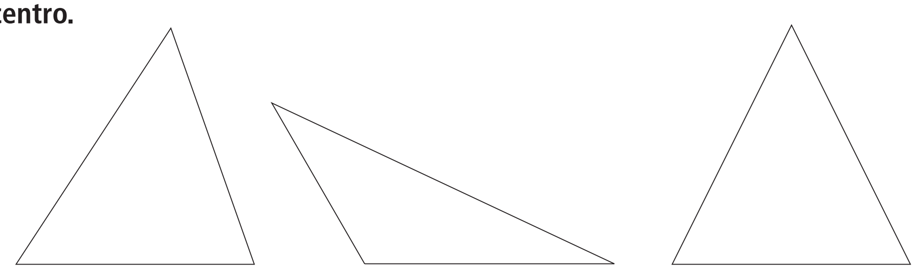
- ¿Cuántas simetrales hay en un triángulo?
- ¿Las simetrales de un triángulo pasan por el punto medio de cada lado?, ¿cómo lo sabes?
- ¿El punto en que se intersecan las simetrales está en alguno de los lados del triángulo, en su interior o en su exterior?, ¿ocurrirá siempre lo mismo?

NO OLVIDES QUE...

Las **simetrales** de un triángulo son rectas perpendiculares a los lados del triángulo las cuales pasan por el punto medio de estos. Se intersecan en un punto llamado **circuncentro** (C), centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

EN TU CUADERNO

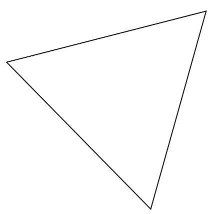
1. Dibuja las simetrales correspondientes a los siguientes triángulos. Marca con un lápiz de color el circuncentro.



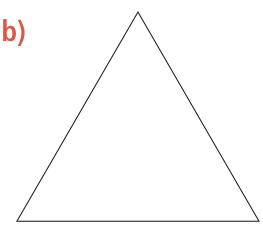
- En los triángulos anteriores, traza una circunferencia con centro en el circuncentro y radio igual a la distancia de este a alguno de los vértices. ¿Qué observas? Comenta.

2. Dibuja las simetrales y alturas de los siguientes triángulos equiláteros. Luego responde.

a)



b)



- ¿Qué sucede con las alturas y simetrales en un triángulo equilátero?

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

Conéctate a Internet e ingresa http://www.santillana.cl/puntocl/mat7ej1.htm. Realiza las actividades que se indican y, luego, responde las siguientes preguntas.

1. ¿Dónde se ubica el circuncentro en un triángulo obtusángulo?
2. ¿Dónde se ubica el circuncentro en un triángulo rectángulo?
3. ¿Es posible que el circuncentro esté sobre alguno de los lados del triángulo? ¿En qué tipo de triángulo?
4. ¿Es posible que el circuncentro esté sobre alguno de los vértices del triángulo? Explica.
5. ¿Qué sucede cuando el ángulo que está marcado aumenta? Justifica.

Transversales de gravedad

EN EQUIPO

Materiales:
- Tijeras
- Regla
- Cartón
- Lápiz

En esta actividad construirán las transversales de gravedad de un triángulo y descubrirán por qué se llaman así.
Formen parejas y sigan las instrucciones.

1. Un integrante dibuja un triángulo equilátero y el otro, un triángulo isósceles en un cartón.
2. Marquen los puntos medios de cada lado de los triángulos.
3. Unan cada vértice con el punto medio del lado opuesto y obtendrán las transversales de gravedad. ¿Dónde creen que se cortarán las transversales en este triángulo?
4. Finalmente, recorten el triángulo, ubiquen la punta de un compás o de un lápiz en el punto de intersección de las tres transversales, como se muestra en la figura.

PARA DISCUTIR

- ¿Qué ocurre al ubicar la punta del compás en el punto de intersección de las tres transversales?, ¿ocurrirá lo mismo en todos los tipos de triángulos?, ¿por qué?
- ¿Podría estar este punto de equilibrio en uno de los lados del triángulo?, ¿en qué caso?

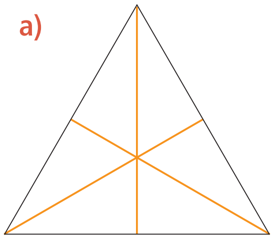
NO OLVIDES QUE...

Las **transversales de gravedad** son segmentos que unen los puntos medios de cada lado con su vértice opuesto. Se cortan en un punto llamado **centro de gravedad** o **baricentro** (G), que corresponde al punto de equilibrio del triángulo.

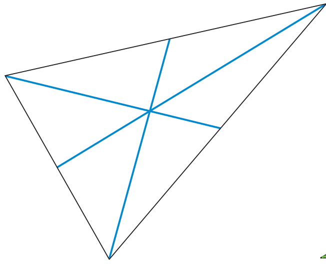
EN TU CUADERNO

1. **En uno de los siguientes triángulos no se han dibujado las transversales de gravedad, ¿en cuál? Utiliza una regla para encontrarlo.**

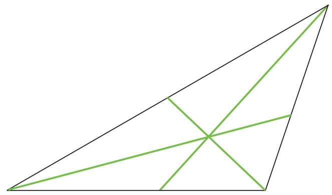
a)



b)

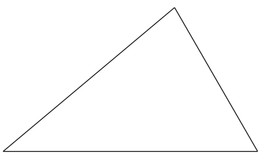


c)

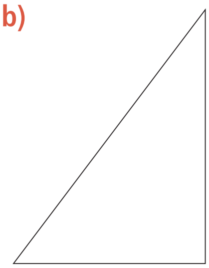


2. **Dibuja las transversales de gravedad de los siguientes triángulos. Marca con lápiz de color el baricentro.**

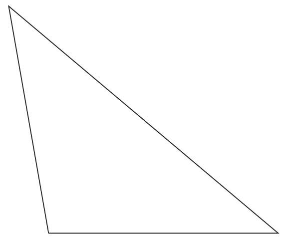
a)



b)



c)



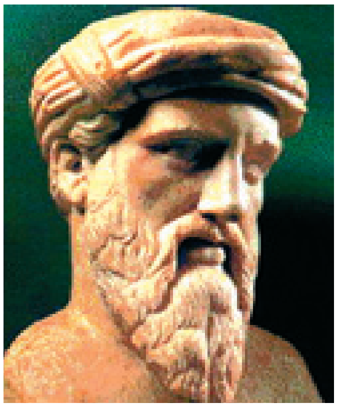
MI PROGRESO

1.
   - a) Dibuja un triángulo equilátero de lado 4 cm y otro de lado 3 cm y traza las transversales de gravedad, las alturas, las bisectrices y las simetrales de cada triángulo con un color distinto.
   - b) Dibuja un triángulo isósceles cualquiera y traza sus transversales de gravedad, las alturas, las bisectrices y las simetrales.
   - c) Dibuja un triángulo escaleno cualquiera y traza sus transversales de gravedad, las alturas, las bisectrices y las simetrales.

2. Piensa y responde:
   - a) ¿Es posible afirmar que en un triángulo equilátero las transversales de gravedad, las alturas y las bisectrices coinciden?, ¿por qué crees que ocurre esto?
   - b) En un triángulo isósceles, ¿ocurre lo mismo?, ¿por qué?
   - c) Si las alturas son perpendiculares a los lados del triángulo, ¿en qué se diferencian de las simetrales?

Teorema de Pitágoras

Como tú ya sabes, el triángulo rectángulo se caracteriza porque uno de sus ángulos mide 90º.
Además, sus lados se llaman de manera especial: los dos lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el lado mayor, opuesto al ángulo recto, hipotenusa.
Este triángulo ha sido objeto de estudio de matemáticos de todos los tiempos y en todo el mundo. Es así como se atribuye a Pitágoras una propiedad que relaciona las medidas de los lados de estos triángulos: el teorema de Pitágoras.
Este teorema establece que:
"la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual al cuadrado de la medida de la hipotenusa".



Pitágoras de Samos vivió, aproximadamente, entre los años 580 y 500 a. C. Fundó la Escuela Pitagórica, a la cual asistían matemáticos y filósofos de la época.

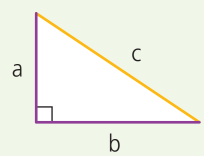
PARA DISCUTIR

- ¿Qué significa esto?
- ¿Qué utilidad práctica tiene el teorema de Pitágoras? Justifica.
- Si conoces las medidas de dos lados cualesquiera de un triángulo rectángulo, ¿podrías conocer la medida del otro lado?, ¿cómo?

NO OLVIDES QUE...

- El Teorema de Pitágoras dice: "En todo triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos es igual a la medida de la hipotenusa al cuadrado".
  $a^2 + b^2 = c^2$

  a, **b**: medidas de cada cateto, **c**: medida de la hipotenusa.



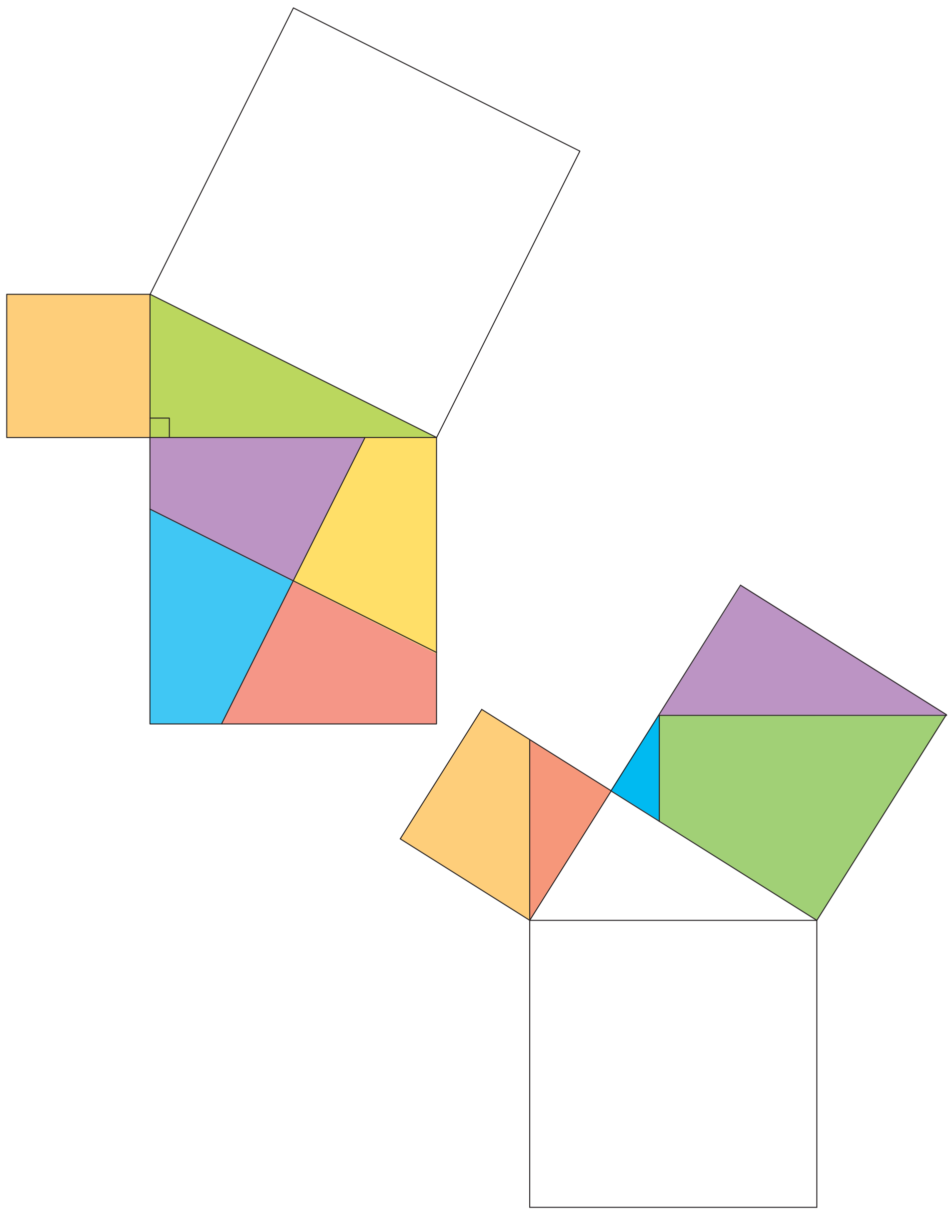
- Un trío pitagórico muy usado es 3, 4 y 5. Como 36 y 48 son múltiplos de 3 y 4, entonces el otro valor del trío pitagórico es múltiplo de 5.
  $3 \cdot 12 = 36$ $4 \cdot 12 = 48$ $5 \cdot 12 = 60$

EN EQUIPO

Materiales:
- Cartón forrado
- Lápiz, regla y tijeras
- Papel lustre

En la siguiente actividad construirás algunos rompecabezas para comprender realmente qué significa el Teorema de Pitágoras y probar intuitivamente su veracidad. Para esto reúnete con un compañero o compañera y sigan las instrucciones.

1. Copien en el cartón forrado los siguientes modelos.



2. Peguen papeles lustre de colores para diferenciar cada pieza y, luego, recórtenlas.

3. Utilizando las piezas de cada rompecabezas y el concepto de área, comprueben que este teorema se cumple, es decir que $\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 = \mathbf{c}^2$.

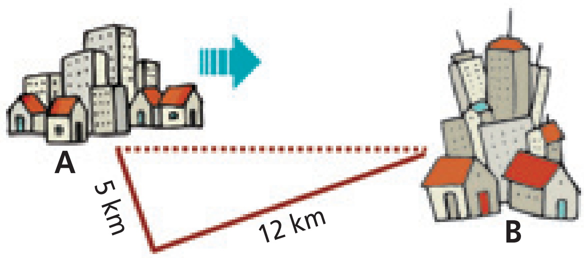
EN TU CUADERNO

1. **Verifica si se cumple el teorema de Pitágoras para los siguientes tríos de números.**
   a) 3, 4 y 5.
   b) 9, 12 y 15.
   c) 11, 12 y 13.
   d) 18, 24 y 30.
   e) 16, 17 y 18.
   f) 10, 24 y 26.

2. **En relación con los tríos de los ejercicios a), b) y d) de la actividad anterior, ¿se mantiene la relación si se multiplica cada número de un trío pitagórico por un mismo número? Prueba con otros tríos.**

3. **Respecto a los tríos de los ejercicios a), c) y e), ¿se mantiene la relación si a cada número de un trío pitagórico se le suma un mismo número? Justifica.**

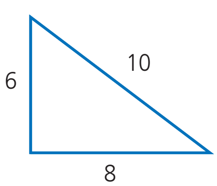
4. **Se planea construir una carretera que una las ciudades A y B, estableciendo un camino más corto entre ambas (el antiguo camino está marcado con línea continua y la posible carretera con línea punteada). ¿Cuántos kilómetros menos se recorrerían al viajar por la nueva carretera respecto del camino antiguo?**



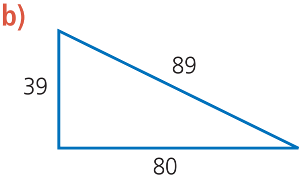
5. **Joaquín y Beatriz se encuentran en una intersección de calles. Luego de conversar, Joaquín se dirige hacia el norte y Beatriz hacia el este, caminando por senderos perpendiculares. Joaquín es de paso regular y avanza 48 metros en un minuto; mientras que Beatriz lo hace a 36 metros por minuto. ¿Cómo podemos representar gráficamente esta situación? ¿A qué distancia se encuentran Joaquín y Beatriz luego de 3 minutos? ¿Qué relación existe, entre las respectivas distancias, a los 1, 2, 3, 4, 5 minutos?, ¿cuál sería la distancia entre ellos a los 10 minutos?**

6. **Indica si los siguientes triángulos son rectángulos. Explica tu decisión.**

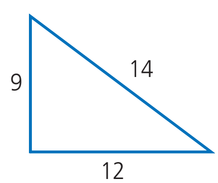
a)



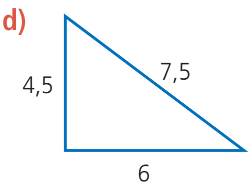
b)



c)



d)



EN EQUIPO

En la siguiente actividad trabajarán con el recíproco del Teorema de Pitágoras, que dice: "Si en un triángulo se tiene que la suma de los cuadrados de dos de los lados es igual al cuadrado del tercero, entonces el triángulo es rectángulo". Para esto, lean la siguiente situación y respondan. Luego, compartan sus opiniones con otros grupos.

Materiales:

- Cuerda o cordel de 120 centímetros

En el antiguo Egipto, el río Nilo subía su nivel, desbordándose cada año, inundando las tierras vecinas y destruyendo los límites de las propiedades. Como resultado, los egipcios debían medir sus tierras todos los años. Como la mayoría de los terrenos eran rectangulares, necesitaban una manera confiable de marcar los ángulos rectos.

Ellos desarrollaron un ingenioso método que consistía en una cuerda cerrada con 12 nudos, entre los cuales existía igual distancia.

1. ¿Cómo creen ustedes que los egipcios usaban la cuerda para marcar los ángulos rectos?
2. Construyan una cuerda similar y experimenten con ella.
3. Ahora resuelvan la siguiente situación: Un grupo de estudiantes de una escuela quieren hacer un trazado, en el suelo de un sector del patio, para construir una cancha multiuso. Para ello consiguieron lienzas largas y estacas. La cancha debe ser rectangular y medir 40 metros por 30 metros. Para confirmar que los ángulos del trazado queden rectos van a utilizar tres trozos de cordel, determinando un triángulo rectángulo.

2. Escriban un método pertinente para resolver el problema.

NO OLVIDES QUE...

- El recíproco del Teorema de Pitágoras dice: "Si en un triángulo se tiene que la suma de los cuadrados de dos de los lados es igual al cuadrado del tercero, entonces el triángulo es rectángulo".

En la ciudad donde vive Andrés, la catedral, el correo y un museo forman un triángulo equilátero donde cada uno se puede representar por un vértice. La distancia que hay entre la catedral y el correo es 2,1 km. Si Andrés va en bicicleta desde el correo al museo y sigue en línea recta 1 km más, para comprarse una bebida en el kiosco, y después vuelve al correo, pero pasando por el museo y la catedral, ¿cuántos kilómetros más recorre a la vuelta que a la ida?

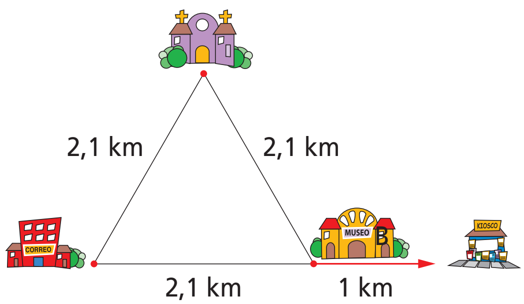
Comprender

- ¿Qué sabes del problema?
  Que si representamos por un punto la catedral, el correo y un museo de la ciudad donde vive Andrés, forman un triángulo equilátero.
  La distancia que hay entre la catedral y el correo es 2,1 km

- ¿Qué debes encontrar?
  Cuántos kilómetros más recorre Andrés a la vuelta que a la ida si va desde el correo al museo y sigue en línea recta 1 km más, luego vuelve al correo, pero pasando por el museo y la catedral.

Planificar

- ¿Cómo resolver el problema?
  Podemos hacer un esquema que represente las condiciones del enunciado.



Resolver

- Observamos el esquema y consideramos el recorrido de Andrés. Tenemos que recorre:
  En la ida 2,1 km + 1 km = 3,1 km
  En la vuelta 1 km + 2,1 km + 2,1 km = 5,2 km
  Diferencia 5,2 km – 3,1 km = 2,1 km

Responder

- Andrés recorre a la vuelta 2,1 km más que a la ida.

Revisar

- Comprueba el resultado obtenido mirando nuevamente el esquema. Luego, verifica si las adiciones y sustracciones están bien resueltas.

1. Resuelve los siguientes problemas, aplicando la estrategia de la página anterior.

a) La casa de Francisca se encuentra a 4,6 km de la de Javier y la de él se encuentra a esta misma distancia de la de Pamela, formando, estas tres casas, un triángulo. Si Francisca caminó a la casa de Javier, luego a la de Pamela y, finalmente, volvió a su casa, recorriendo en total 14,5 km, ¿cuál es la distancia entre su casa y la de Pamela?

b) Si dos de los lados de un triángulo miden 4 y 7 cm, respectivamente, ¿cuál es el mínimo valor que puede tomar la medida del otro lado?

c) Si el perímetro de un triángulo escaleno es 19 cm y dos de sus lados miden 3 y 10 cm, respectivamente, ¿cuál es la medida del otro lado?

2. Ahora resuelve el problema de la página anterior utilizando otra estrategia de resolución. Explica paso a paso cómo lo resolviste y compara tu estrategia con las usadas por tus compañeros y compañeras.

3. Resuelve los siguientes problemas utilizando la estrategia que tú quieras. Compara el procedimiento que utilizaste con el de algún compañero o compañera. ¿Cuál es más simple?, ¿por qué?

a) En la siguiente imagen, ¿cuál es el lugar más apropiado para instalar un hospital sobre la carretera, de modo que la distancia del pueblo al hospital sea la más corta posible? Márcalo e indica cómo encontraste esta distancia.

b) Una cadena de supermercados quiere construir un local que se encuentre exactamente a la misma distancia de 3 condominios. Cada condominio está a 300 metros de los otros dos. ¿Cómo ubicar el lugar pedido por los vecinos?

c) En un triángulo ABC isósceles, la base AB mide 6 cm y los lados congruentes 5 cm. ¿Cuál es la medida de la altura CD?

CULTURA

De Pitágoras a Fermat ahora en TV

Pierre de Fermat (1601-1665) dejó una nota en el margen del libro Aritmética de Diofanto, que decía:

Es imposible dividir un cubo en suma de dos cubos, o un bicuadrado en suma de dos bicuadrados, o en general, cualquier potencia superior a dos en dos potencias del mismo grado; he descubierto una demostración maravillosa de esta afirmación. Pero este margen es demasiado angosto para contenerla.

Lo que menciona Fermat se refiere a que si n es un número mayor que 2 no existen números enteros positivos **a**, **b** y **c** distintos de cero que cumplan la igualdad $\mathbf{a}^n + \mathbf{b}^n = \mathbf{c}^n$. Pero, ¿qué ocurre si $\mathbf{n} = 2$?

Esta importante conjetura se hizo famosa en un episodio de Los Simpson en que Homer se introduce en la tercera dimensión. Piensa que son personajes "planos" de dos dimensiones. Según pasea por el entramado tridimensional, aparece la siguiente igualdad: $1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}$

Esta igualdad de ser cierta contradice el célebre Teorema de Fermat, demostrado en 1994 por Andrew Wiles.

Fuente: Revista Digital de Matemáticas Sacit Ámetam. Homer Simpson y Las Matemáticas, Teorema de Fermat, (Boletín nº 12), http://revistasacitametam.blogspot.com/2008/12/homer-simpson-y-las-matemticas-teorema.html, consultado en agosto de 2009.

1. **Utilizando la calculadora, verifiquen si lo la igualdad que apareció en el episodio de los Simpson es verdadera.**
2. **Piensen, comenten y respondan:**
   a) ¿Los resultados que nos entregan las calculadoras son exactos?
   b) ¿Es posible que esta igualdad nos muestre que no se cumple el Teorema de Fermat?, ¿por qué?
3. **Utilizando la calculadora, prueben con 10 ejemplos que el Teorema de Fermat se cumple.**

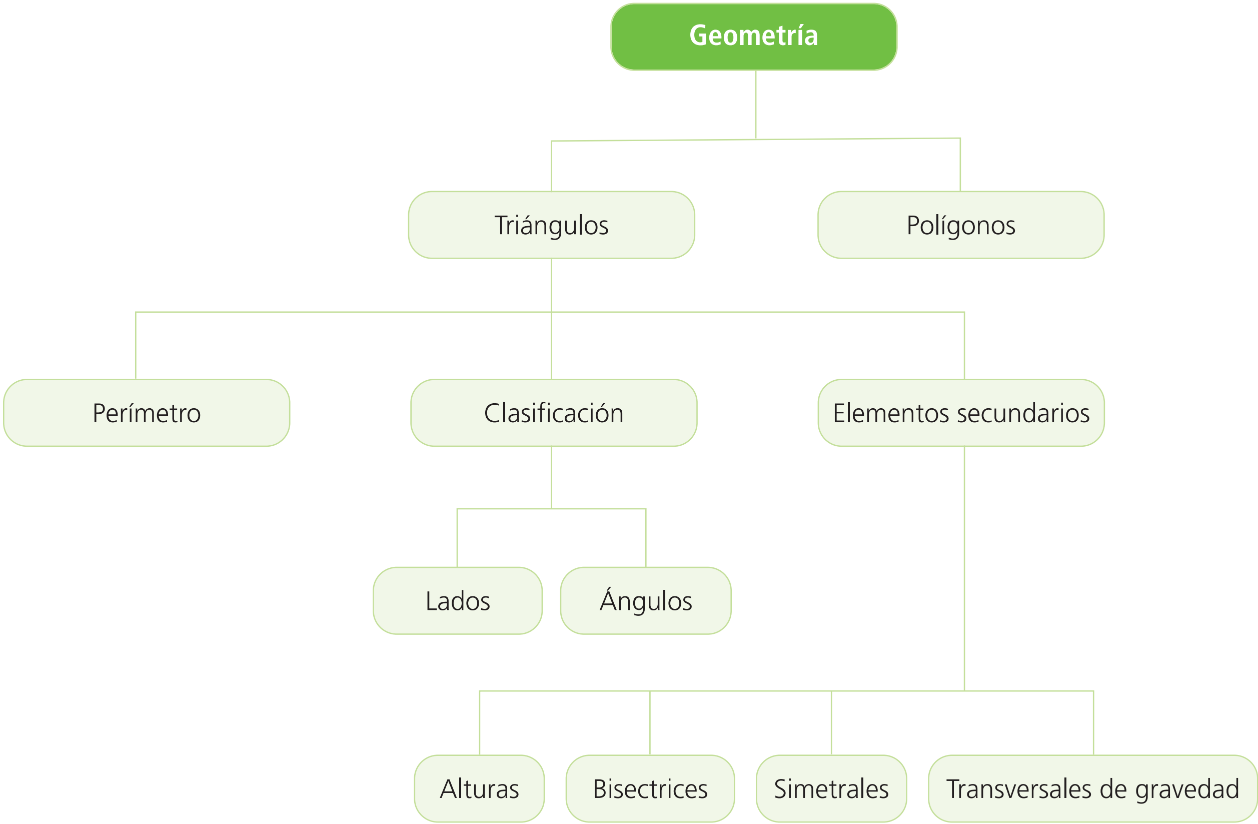
EVALUAMOS NUESTRO TRABAJO

1. **Cada uno complete en su cuaderno la siguiente tabla escribiendo Sí, A veces y No, según corresponda. Luego, comparen y comenten sus respuestas.**

	Integrante 1	Integrante 2	Integrante 3
Respeté las opiniones de mis compañeros.			
Cumplí con las tareas que me comprometí.			
Hice aportes interesantes para desarrollar el trabajo.			

2. **Comenten y respondan: ¿en qué podrían mejorar para el próximo trabajo en equipo?**

A continuación, se presenta un mapa conceptual que relaciona los principales conceptos trabajados en la unidad. Cópialo en tu cuaderno y complétalo con los conceptos que crees que faltan y con las palabras de enlace que indican las relaciones entre los conceptos.



Utilizando los contenidos aprendidos en la unidad y, apoyándote en el esquema anterior, responde:

1. ¿Cómo se clasifican los polígonos?
2. Si el lado de un cuadrado aumenta al doble, ¿qué ocurre con su perímetro?
3. Para que un triángulo se pueda construir, ¿cuál es la relación que debe existir entre sus lados?
4. En un triángulo, ¿cómo puedes trazar sus alturas con regla y compás? Explica el procedimiento.
5. En un triángulo, ¿cómo puedes trazar sus bisectrices con regla y compás? Explica el procedimiento.
6. Al trazar en un triángulo las alturas y las bisectrices, estas coinciden. ¿Qué tipo de triángulo es?

¿QUÉ APRENDÍ?

Marca la alternativa correcta en las preguntas 1 a 9.

1. ¿Con cuál de los siguientes tríos de medidas de lados no se puede construir un triángulo?

A. 2 cm, 4 cm, 5 cm
B. 3 cm, 8 cm, 11 cm
C. 5 cm, 3 cm, 6 cm
D. 10 cm,7 cm, 5 cm

2. ¿Cuál de los siguientes tríos de ángulos no pueden ser las medidas de los ángulos interiores de un triángulo?

A. 27°, 35°, 118°
B. 28°, 49°, 102°
C. 75°, 75°, 30°
D. 80°, 60°, 40°

3. ¿Cuál de los siguientes triángulos no se puede construir?

A. Equilátero acutángulo.
B. Rectángulo isósceles.
C. Obtusángulo isósceles.
D. Equilátero obtusángulo.

4. ¿En cuál de los siguientes triángulos las alturas siempre coinciden con las bisectrices?

A. Equilátero.
B. Isósceles.
C. Escaleno.
D. Rectángulo isósceles.

5. ¿En cuál de los siguientes triángulos el ortocentro se encuentra al exterior del triángulo?

A. Acutángulo.
B. Rectángulo.
C. Obtusángulo.
D. Acutángulo isósceles.

6. ¿Cómo se llama el punto donde se intersecan las transversales de gravedad de un triángulo?

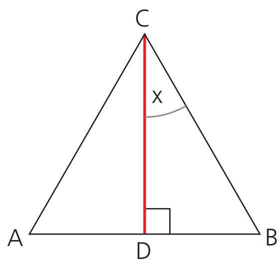
A. Incentro.
B. Baricentro.
C. Ortocentro.
D. Circuncentro.

7. Si se dibuja la altura de un triángulo ABC y esta lo divide simétricamente en dos triángulos congruentes, ¿qué tipo de triángulo no puede ser?

A. Acutángulo.
B. Rectángulo.
C. Isósceles.
D. Escaleno.

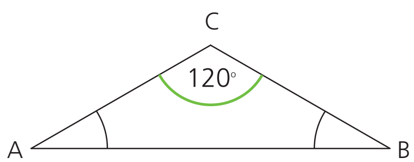
8. El triángulo ABC es equilátero. Si CD es la altura, ¿cuánto mide el ángulo x?

A. 30°
B. 45°
C. 60°
D. 90°



9. El triángulo ABC es isósceles y su ángulo no basal mide 120°. ¿Cuánto mide cada ángulo basal?

A. 20°
B. 30°
C. 50°
D. 60°



10. **Cada punto representa las ciudades A, B y C, respectivamente. Indica dónde se podría construir una estación de servicio de modo que esté a igual distancia de las tres ciudades.**

- ¿Cuántos lugares posibles puedes encontrar? Justifica.

Compara tus respuestas en tu curso. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.

¿QUÉ LOGRÉ?

1. **Marca según tu apreciación.**

	No lo entendí	Lo entendí	Puedo explicarlo
Los polígonos y sus elementos			
Figuras planas			
Construcciones geométricas			
Construcción de triángulos			
Medidas de los lados de un triángulo			
Medidas de los ángulos de un triángulo			
Alturas de un triángulo			
Bisectrices de un triángulo			
Simetrales			
Transversales de gravedad			
Teorema de Pitágoras			
Resolución de problemas			

2. **Reflexiona y responde.**

a) ¿Qué dificultades tuviste en la unidad?, ¿cómo las superaste?
b) ¿Qué te gustó de lo que aprendiste en la unidad?, ¿por qué?
c) Vuelve a la página 58 y revisa el recuadro "En esta unidad podrás…", ¿crees que lograste aprender todo lo que se esperaba? Explica.

UNIDAD 4

Relaciones proporcionales

Latinstock

EN ESTA UNIDAD PODRÁS...

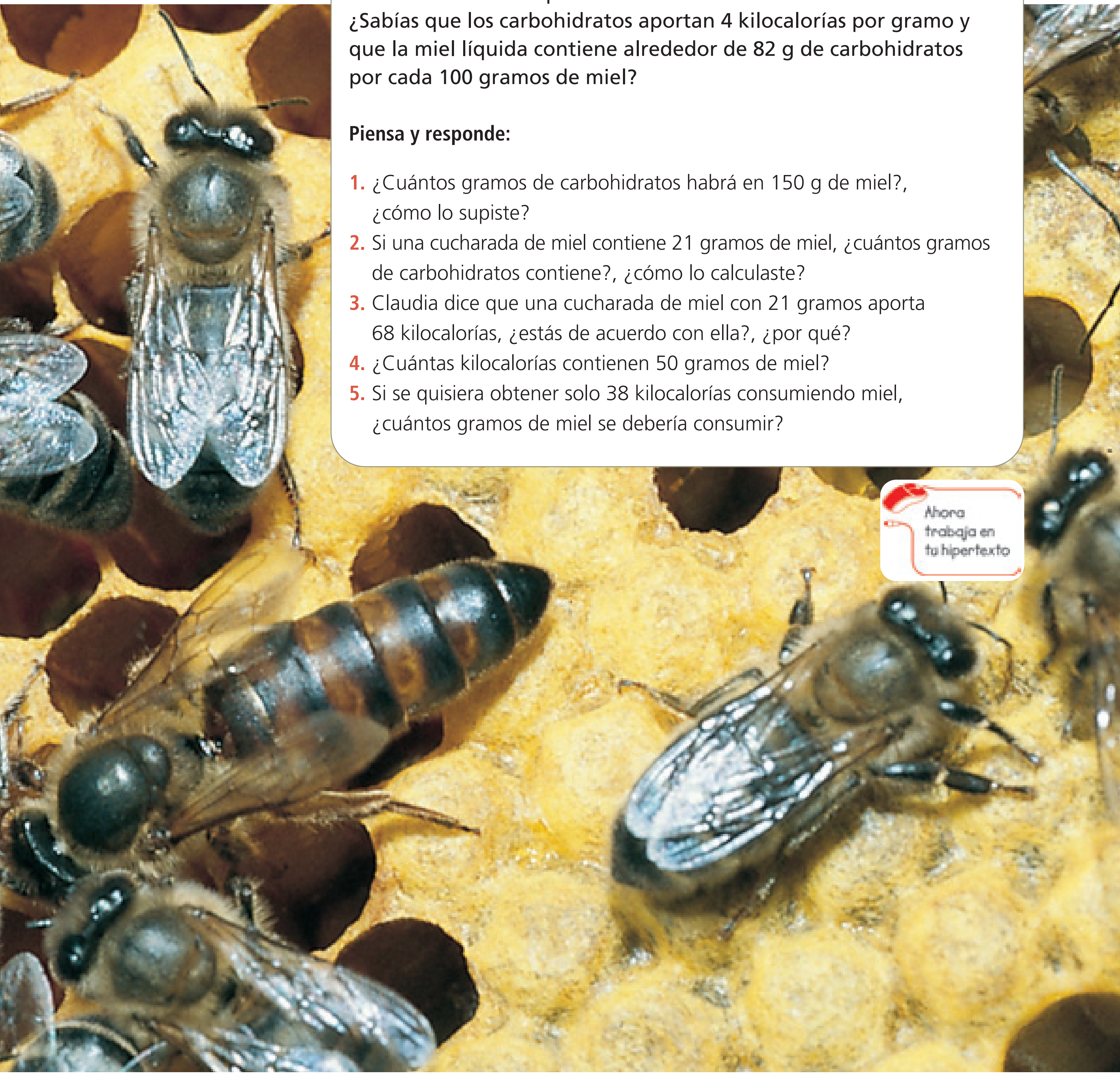
- Emplear procedimientos para identificar magnitudes que varían en forma proporcional.
- Interpretar una proporción como una igualdad entre dos razones cuando las magnitudes involucradas varían en forma proporcional.
- Utilizar proporciones para representar situaciones de variación proporcional.
- Resolver problemas en contextos variados en los que se utilizan proporciones.

CONVERSEMOS DE...

La miel que producen las abejas es una mezcla compuesta sobre todo por dos azúcares: glucosa y fructosa. En la mayoría de las mieles, la fructosa predomina sobre el resto de los azúcares por lo que la miel se siente más dulce que el azúcar común.
¿Sabías que los carbohidratos aportan 4 kilocalorías por gramo y que la miel líquida contiene alrededor de 82 g de carbohidratos por cada 100 gramos de miel?

Piensa y responde:

1. ¿Cuántos gramos de carbohidratos habrá en 150 g de miel?, ¿cómo lo supiste?
2. Si una cucharada de miel contiene 21 gramos de miel, ¿cuántos gramos de carbohidratos contiene?, ¿cómo lo calculaste?
3. Claudia dice que una cucharada de miel con 21 gramos aporta 68 kilocalorías, ¿estás de acuerdo con ella?, ¿por qué?
4. ¿Cuántas kilocalorías contienen 50 gramos de miel?
5. Si se quisiera obtener solo 38 kilocalorías consumiendo miel, ¿cuántos gramos de miel se debería consumir?



Ahora trabaja en tu hipertexto

Recuerda lo que aprendiste en años anteriores y resuelve los ejercicios en tu cuaderno.

1. Simplifica las siguientes fracciones.

a) $\frac{25}{35}$ d) $\frac{400}{500}$ g) $\frac{13}{65}$

b) $\frac{48}{32}$ e) $\frac{560}{640}$ h) $\frac{120}{45}$

c) $\frac{24}{28}$ f) $\frac{27}{81}$ i) $\frac{15}{1000}$

2. ¿Qué entiendes por fracciones equivalentes?

3. Escribe dos fracciones equivalentes en cada caso.

a) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{12}{17}$ g) $\frac{24}{64}$

b) $\frac{8}{15}$ e) $\frac{25}{33}$ h) $\frac{21}{91}$

c) $\frac{4}{9}$ f) $\frac{16}{36}$ i) $\frac{10}{100}$

4. Transforma las siguientes fracciones a número decimal y explica cómo lo hiciste.

a) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{6}$ g) $\frac{72}{90}$

b) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{65}{50}$ h) $\frac{8}{32}$

c) $\frac{1}{8}$ f) $\frac{48}{80}$ i) $\frac{25}{100}$

5. Transforma los siguientes números decimales a fracción y explica paso a paso cómo lo hiciste.

a) 0,34 d) 0,0006 g) 0,6
b) 0,72 e) 0,0045 h) 0,284
c) 0,0068 f) 0,375 i) 1,25

6. Compara las siguientes fracciones, utilizando el signo <, > o =, según corresponda.

a) $\frac{3}{7}$ ____ $\frac{4}{9}$ d) $\frac{4}{8}$ ____ $\frac{7}{14}$ g) $\frac{6}{8}$ ____ $\frac{24}{30}$

b) $\frac{6}{5}$ ____ $\frac{4}{5}$ e) $\frac{11}{15}$ ____ $\frac{10}{28}$ h) $\frac{35}{42}$ ____ $\frac{4}{12}$

c) $\frac{12}{25}$ ____ $\frac{18}{36}$ f) $\frac{9}{27}$ ____ $\frac{13}{39}$ i) $\frac{8}{27}$ ____ $\frac{7}{25}$

7. Resuelve las siguientes operaciones:

a) $\frac{42 \cdot 15}{21} =$ d) $\frac{33 \cdot 35}{77} =$ g) $\frac{50 \cdot 9}{75} =$

b) $\frac{12 \cdot 27}{36} =$ e) $\frac{16 \cdot 72}{18} =$ h) $\frac{64 \cdot 21}{32} =$

c) $\frac{25 \cdot 8}{200} =$ f) $\frac{45 \cdot 6}{54} =$ i) $\frac{12 \cdot 15}{18} =$

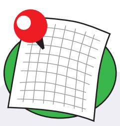
8. Expresa en kilómetros y explica cómo transformaste las unidades de medida en cada caso.

a) 2400 m c) 5835 m e) 365 000 cm
b) 70 000 cm d) 1 400 000 mm f) 72 300 mm

9. Expresa en metros y explica cómo transformaste las unidades de medida en cada caso.

a) 300 km c) 1,25 km e) 0,032 km
b) 450 cm d) 12 850 mm f) 642 500 cm

Compara tus respuestas en tu curso. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.



¿QUÉ DEBES RECORDAR?

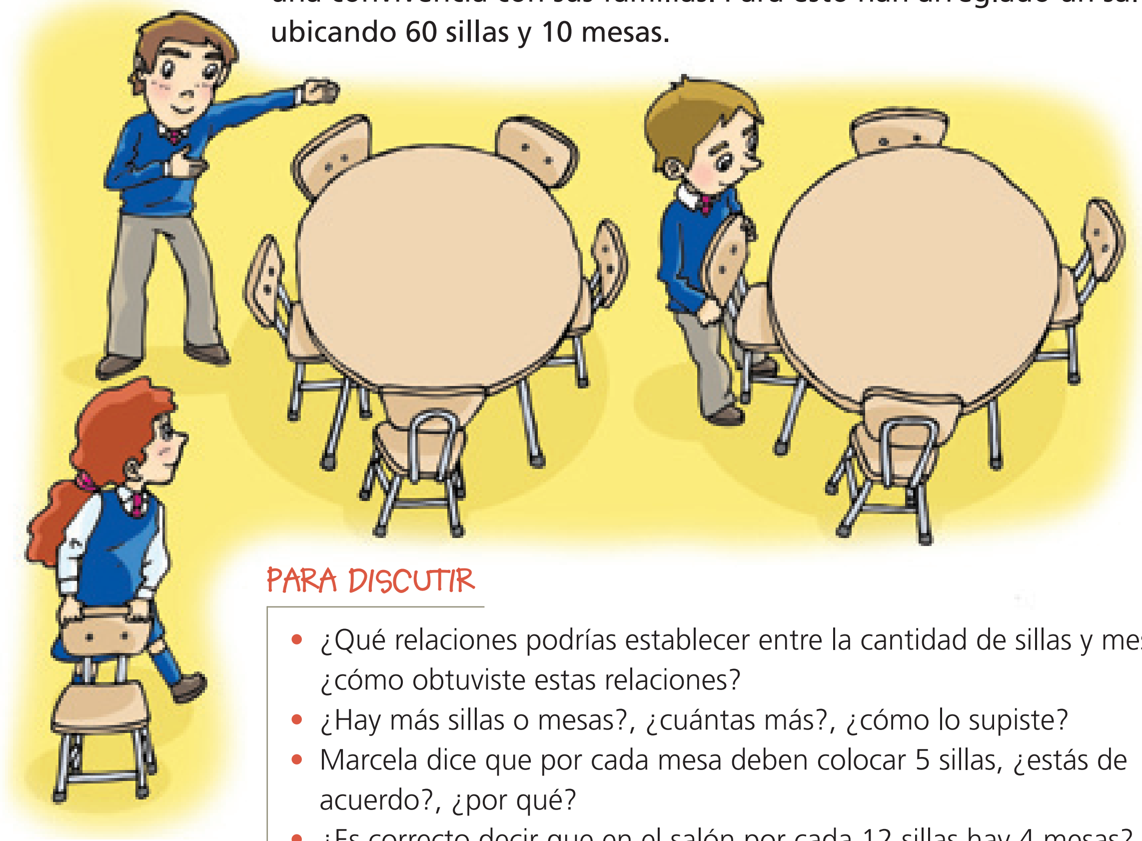
- En una fracción, el **denominador** indica en cuántas partes se dividió la unidad, y el **numerador**, cuántas de estas partes se han considerado.
- Una manera de comparar dos fracciones de distinto denominador es amplificando cada una por el denominador de la otra.

  Ejemplo: Para comparar $\frac{3}{7}$ y $\frac{5}{9}$, amplificamos: $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{27}{63}$ y $\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{35}{63}$, luego como $\frac{27}{63} < \frac{35}{63}$, se tiene que $\frac{3}{7} < \frac{5}{9}$
- Para transformar una fracción a número decimal se debe dividir el numerador de la fracción por su denominador.
- Algunas equivalencias entre unidades de medida de longitud son:

1 km = 1000 m
1 m = 100 cm
1 m = 1000 mm

Razones y proporciones

Los alumnos y alumnas de un séptimo básico están organizando una convivencia con sus familias. Para esto han arreglado un salón ubicando 60 sillas y 10 mesas.



PARA DISCUTIR

- ¿Qué relaciones podrías establecer entre la cantidad de sillas y mesas?, ¿cómo obtuviste estas relaciones?
- ¿Hay más sillas o mesas?, ¿cuántas más?, ¿cómo lo supiste?
- Marcela dice que por cada mesa deben colocar 5 sillas, ¿estás de acuerdo?, ¿por qué?
- ¿Es correcto decir que en el salón por cada 12 sillas hay 4 mesas?, ¿por qué?
- Si a la convivencia asistieran 84 personas y se dispusieran 6 sillas por cada mesa, ¿cuántas mesas se necesitarían?, ¿cómo lo supiste?

En muchas situaciones cotidianas es necesario comparar cantidades. Por ejemplo, si queremos comprar un producto, cotizamos en varios lugares y comparamos dónde está a menor precio y cuánto menor es, para que nuestra compra sea conveniente.

En la situación inicial, al ordenar el salón era importante saber cuántas sillas había que ubicar en cada mesa. Este dato se puede obtener dividiendo la cantidad de sillas por la de mesas que hay. Este cálculo corresponde a una comparación por cuociente entre dos cantidades, que se denomina **razón**.
Así, la razón entre la cantidad de sillas y mesas es:

$$60 : 10 = \frac{60}{10} = \frac{6}{1} = 6$$

Se lee "60 es a 10", o bien, "6 es a 1", y se puede interpretar como "hay 6 sillas por cada mesa".

NO OLVIDES QUE...

- Se llama **razón** a la comparación por cuociente entre dos cantidades **a** y **b** cualesquiera. La razón entre **a** y **b** se puede expresar como **a** : **b** o bien $\frac{a}{b}$ y se lee "**a** es a **b**", donde **a** es el **antecedente** y **b**, el **consecuente**.
- El **valor de la razón** es el cuociente entre las cantidades. Si los valores de dos razones son iguales, estas son **razones equivalentes**. Por ejemplo, la razón $\frac{5}{10}$ es equivalente a la razón $\frac{4}{8}$, porque $\frac{5}{10} = 0{,}5$ y $\frac{4}{8} = 0{,}5$.
- Una **proporción** es una igualdad entre dos o más razones. La proporción entre cantidades **a**, **b**, **c** y **d** se puede expresar **a : b = c : d** o bien $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ y se lee "**a** es a **b** como **c** es a **d**".
- En toda proporción se cumple que: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y solo si $a \cdot d = b \cdot c$.

  Ejemplo: $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ forma una proporción, porque $6 \cdot 2 = 4 \cdot 3$.

EN TU CUADERNO

1. Escribe la razón entre los siguientes pares de números y simplifícala si es posible.

a) 20 y 60 b) 35 y 25 c) 16 y 64 d) 18 y 81

2. Determina si las razones dadas son equivalentes.

a) $\frac{4}{5}$ y $\frac{12}{15}$ b) $\frac{6}{16}$ y $\frac{26}{36}$ c) $\frac{8}{12}$ y $\frac{12}{18}$ d) $\frac{14}{8}$ y $\frac{35}{20}$

3. Determina en cada caso si las dos razones forman una proporción. Explica cómo lo supiste.

a) $\frac{7}{9}$ y $\frac{8}{11}$ b) $\frac{32}{17}$ y $\frac{8}{15}$ c) $\frac{17}{34}$ y $\frac{23}{46}$ d) $\frac{51}{36}$ y $\frac{17}{12}$

4. Encuentra el valor de x, en cada caso, para que las razones formen una proporción.

a) $\frac{8}{32}$ y $\frac{x}{8}$ b) $\frac{5}{3}$ y $\frac{x}{21}$ c) $\frac{2}{11}$ y $\frac{8}{x}$ d) $\frac{15}{6}$ y $\frac{25}{x}$

5. En el primer estudio nacional de la discapacidad en Chile, realizado el año 2004 se obtuvo que en nuestro país (www.ine.cl, consultado en marzo de 2008):

- Hay 2 068 072 discapacitados.
- 1 de cada 8 chilenos o chilenas presenta algún tipo de discapacidad.
- De un total de 4 481 391 hogares en Chile, en 1 549 342 hogares vive al menos una persona con discapacidad.

Según los datos anteriores, responde:

a) ¿Cuál sería la población aproximada de Chile? Explica paso a paso cómo lo calculaste.

b) ¿Es correcto decir que en 1 de cada 3 hogares chilenos vive al menos una persona con discapacidad?, ¿por qué?

Variaciones proporcionales y no proporcionales

Felipe tomó fotografías en un paseo que hizo junto a algunos amigos y amigas. Imprimieron la que más les gustó en su tamaño normal: 3 cm de ancho y 4 cm de largo, pero decidieron ampliarla. Agrandaron sus lados y al imprimirla notaron que se veía extraña.

Volvieron a la fotografía original y la agrandaron de otra manera, la imprimieron y nuevamente se veía extraña. Lo intentaron otra vez, pero asegurándose que las razones entre las medidas de los lados de la fotografía original y la ampliada, fuesen equivalentes. Al imprimirla, su ancho medía 9 cm y su largo, 12 cm.

PARA DISCUTIR

- ¿Cuál es la razón entre las medidas de los lados de la fotografía que tomó Felipe en tamaño normal?, ¿cuánto es el valor de esta razón?
- Si en la segunda impresión el ancho de la fotografía medía 4 cm y su largo, 6 cm, ¿cuál es la razón entre las medidas de sus lados?, ¿cuánto es el valor de esta razón?
- Si en la tercera impresión el largo de la fotografía medía 9 cm y el valor de la razón entre la medida de sus lados es $0,\overline{7}$, ¿cuánto mide su ancho?, ¿cómo lo supiste?
- Si en la cuarta impresión el ancho de la fotografía medía 12 cm y su largo, 18 cm, ¿cuál es la razón entre las medidas de sus lados?, ¿cuánto es el valor de esta razón?
- ¿Cuáles de las razones entre las medidas de los lados de las fotografías que imprimieron forman una proporción?, ¿por qué?
- Si la razón entre el largo y el ancho es de 3, ¿qué medidas podría tener el largo y ancho de la fotografía? Explica.
- Si la fotografía original se amplía en la razón 1 es a 4, ¿qué dimensiones tiene la fotografía ampliada? Explica.

NO OLVIDES QUE...

- Si el valor de la razón entre dos variables se mantiene constante (no cambia) estas variables son **proporcionales**.

EN TU CUADERNO

1. Determina si las variaciones que se observan en las siguientes situaciones son proporcionales o no. Explica tu decisión en cada caso.

a) El número de habitantes de un país y la extensión de su territorio.
b) El número de gallinas en un gallinero y la cantidad de huevos que producen al día.
c) Los intereses de un préstamo y el plazo fijado para pagarlo.
d) La cantidad de hijos de una mujer y la cantidad de nietos que tiene.
e) La hora del día y la altura de la marea.
f) El número de panes que se va a cocinar y la cantidad de harina que se va a utilizar en su preparación.
g) El número del calzado y el largo del pie de una persona, en centímetros.
h) Distancia recorrida y tiempo utilizado (a velocidad constante).
i) La estatura de una persona (en centímetros) y su masa (en kilogramos).

2. En el colegio a Carlos le pidieron recopilar distintos tipos de información para luego analizarla. La información la recopiló en las siguientes tablas:

Tabla 1

Nombre	Edad (años)	Masa (kg)
María	13	60
Carla	13	50
Marcelo	13	65
Ángela	12	54

Tabla 2

Nº de minutos hablados	Costo ($)
1	210
2	420
3	630
4	840

a) Dada la tabla 1, si Carla tiene 13 años y pesa 50 kg, ¿es posible determinar que cuando tenga 26 años pesará 100 kg?, ¿por qué?
b) Según la tabla 2, ¿es posible determinar cuánto se tendrá que cancelar por 12 minutos hablados?, ¿por qué?
c) La relación de las variables de la tabla 1 y de la tabla 2, ¿corresponde a una variación proporcional o no? Justifica.

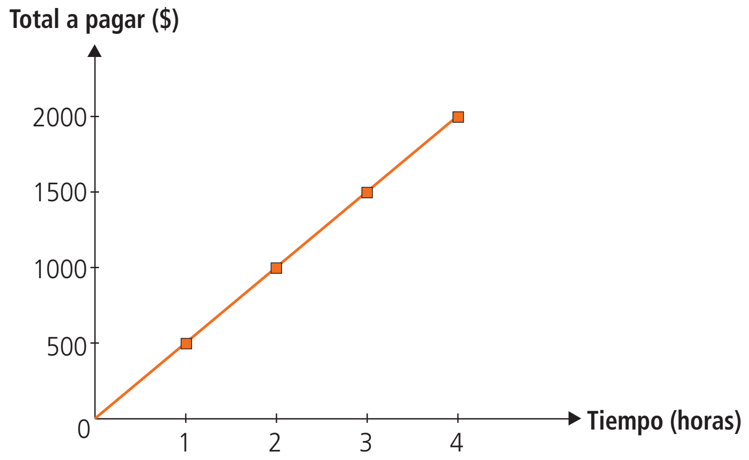
3. Completa la siguiente tabla en tu cuaderno, y luego responde.

Lado del cuadrado	Área	Perímetro
3 cm		
4 cm		
7 cm		

- El lado de un cuadrado, ¿es proporcional a su área?, ¿y a su perímetro?, ¿por qué?

Proporcionalidad directa

En el centro de una ciudad, el arriendo de un estacionamiento cuesta $ 500 por hora. Observa el gráfico que representa la relación que existe entre tiempo y precio. Luego, completa la tabla.



Tiempo (h)	Total a pagar ($)
1	500
2	1000
3	1500
4	
5	
6	
7	
8	4000

PARA DISCUTIR

- ¿Qué pasa con el total a pagar cuando aumenta la cantidad de horas de arriendo?
- ¿Cuánto gastarías por 3 horas de estacionamiento?, ¿y por 5?
- ¿Cuál es la razón entre el total a pagar y el tiempo?
- La razón entre los tiempos de arriendo del estacionamiento y la razón entre los precios, ¿forman una proporción?

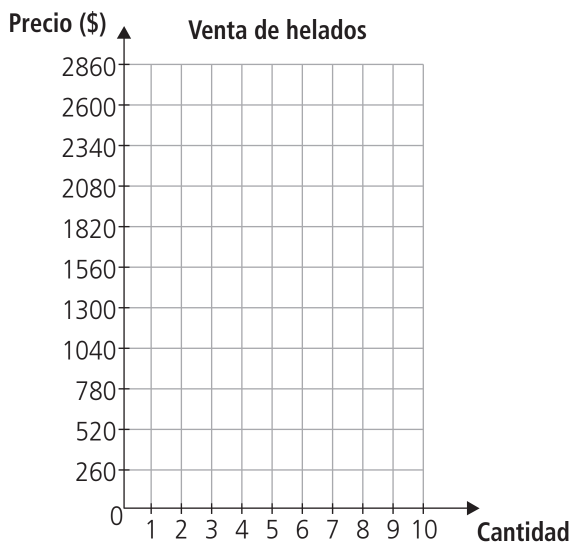
EN TU CUADERNO

1. En los días de calor, el dueño de un quiosco vende muchos helados, por eso diseña una tabla con los posibles pedidos. Complétala.

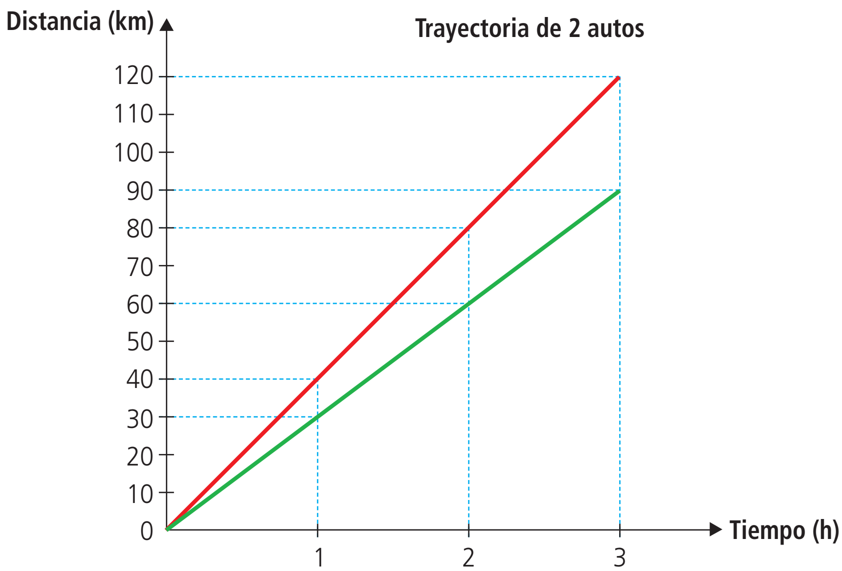
Cantidad de helados	1	2		4		9	10
Precio ($)	260	520	780		2080		

a) ¿Cómo calculaste la cantidad de helados?, ¿y cada precio?
b) ¿Cuántos helados puedes comprar con $ 3640?
c) ¿Cuál es el valor de la razón entre el precio y la cantidad de helados?

2. **Con los datos de la tabla de la actividad anterior, construye el gráfico en tu cuaderno.**



3. **El siguiente gráfico indica la distancia recorrida por dos autos, uno rojo y uno verde, en un tiempo determinado sin que cambien sus velocidades en el tiempo.**



a) Completa las tablas en tu cuaderno según el gráfico.

Distancia (km)	30		
Tiempo (h)	1		

Distancia (km)		80	
Tiempo (h)		2	

b) ¿Qué auto va más rápido?, ¿por qué?

c) ¿En cuánto tiempo el auto verde recorrerá 60 km?

d) ¿Cuál es la razón que se mantiene constante para el auto rojo?, ¿y para el verde?

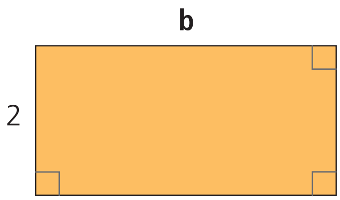
e) ¿Cuánto tiempo se demorará el auto rojo en recorrer 480 km?

f) A medida que el tiempo transcurre, ¿los autos recorren más o menos kilómetros? Explica.

4. **Indica si las siguientes magnitudes se relacionan de manera directamente proporcionales.**

a) El número de hojas de un libro y su peso.
b) El lado de un cuadrado y su perímetro.
c) Los lados de un triángulo y su área.
d) El número de trabajadores y los días que se demoran en terminar un trabajo.

5. **Observa el rectángulo, completa la tabla y, con estos datos, construye el gráfico correspondiente.**



a	b	Perímetro
2	3	$2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 10$
2	4	
2	5	
2	6	
2	7	

- ¿Qué sucede con el perímetro si la medida de b aumenta?, ¿y si disminuye?

6. **Si A y B son dos variables que forman una proporción directa, completa la siguiente tabla.**

A	B
8	2
12	
	4
20	
24	

- Construye un gráfico a partir de los datos. Si unes los puntos, ¿qué resulta?

NO OLVIDES QUE...

- Dos variables son directamente proporcionales si al aumentar (o disminuir) una de ellas, la otra aumenta (o disminuye) en un mismo factor.
- Dos variables son directamente proporcionales si la razón entre las cantidades correspondientes se mantiene constante. Por ejemplo: $\frac{1000}{2} = \frac{1500}{3} = 500$

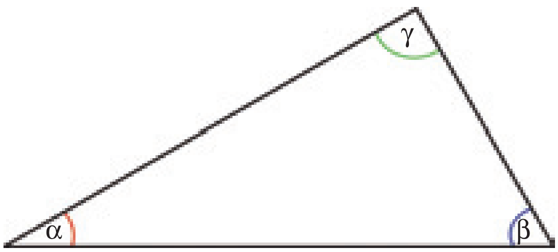
  En general:

  $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} = \mathbf{k}$ ⟶ constante de proporcionalidad directa
- La gráfica de cantidades directamente proporcionales es un conjunto de puntos que están en una línea recta que pasa por el origen de un sistema de coordenadas cartesianas.

7. Resuelve los siguientes problemas utilizando el procedimiento que tú quieras. No olvides seguir los pasos aprendidos: comprender, planificar, resolver, responder y revisar.

a) Los séptimos años de un colegio están juntando dinero para su paseo de fin de año. Hasta el momento llevan recaudado $ 270 000. Este dinero será repartido en forma proporcional al número de estudiantes que tenga cada curso. El 7° A tiene 42 estudiantes, el 7° B tiene 38 y el 7° C tiene 44 estudiantes. ¿Cuánto dinero le corresponde aproximadamente a cada curso en este momento? Explica paso a paso cómo lo calculaste.

b) La suma de las medidas de los ángulos interiores del triángulo dibujado están en la razón $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 4 : 6$. ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos del triángulo dibujado?



c) Las edades de Gabriel, Andrea y Rodrigo están en la razón 1 : 2 : 3. Además, la suma de sus edades es 30 años. ¿Cuál es la edad de cada uno?

d) Tres hermanas deben reunir $ 480 000 para mantener su hogar, aportando proporcionalmente los ingresos de cada una. Antonia gana $ 240 000, Alejandra gana $ 300 000 y Andrea $ 280 000. ¿Cuánto dinero debe aportar cada una, para que su aporte sea proporcional a su sueldo?

MI PROGRESO

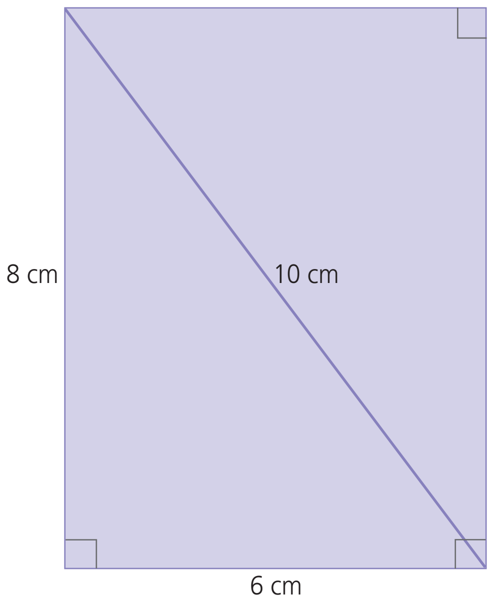
En la familia de Javiera, varias personas cumplen años en julio y generalmente lo celebran todos juntos. Este año Javiera cumple 9 años, Jorge cumple 36 años, Andrés cumple 63 años y Ana cumple 81 años. Generalmente celebran en una misma fiesta todos los cumpleaños.

1. Javiera estuvo calculando las relaciones entre las edades. Escribe la razón entre las edades de:

   a) Javiera y Jorge
   b) Andrés y Ana
   c) Javiera y Ana

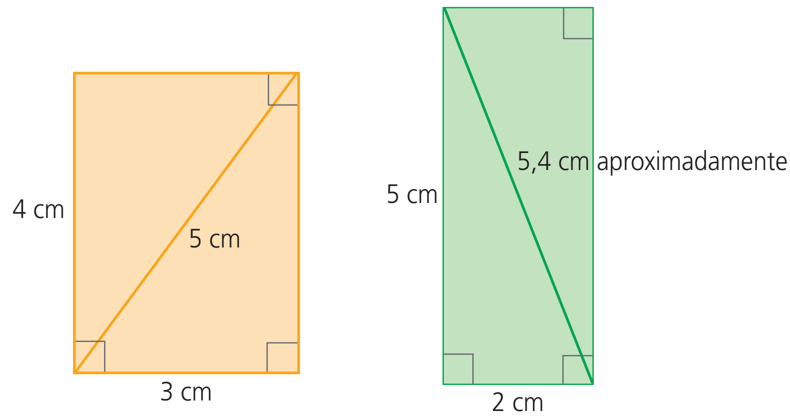
2. La tía Nena quería ponerles velitas a todos, pero como eran muchas disminuyó la cantidad de velas lo más posible, de modo que cada vela representa una cantidad de años. ¿Cuál es la menor cantidad de velas que podría usar?

3. El tío Pepe dice que les va a buscar regalos con un costo proporcional a los años que cumplen, pero que solo tiene $ 19 845 para todos los regalos. Calcula cuánto debiera destinar a cada uno.



Aplicaciones: semejanza y escala

Observa las figuras geométricas con sus respectivas medidas.



PARA DISCUTIR

- ¿Qué relación encuentras entre las medidas de cada figura?, ¿cuál es la razón entre las medidas del ancho y del largo de cada rectángulo?
- Al comparar las medidas respectivas de los rectángulos verde y morado, ¿cómo son los cuocientes?, ¿y los de los rectángulos naranja y morado?
- Si el cuociente entre las medidas respectivas de dos rectángulos es 2, ¿cómo interpretarías este número?, ¿qué información entrega?
- Si el rectángulo morado se obtuvo luego de una transformación aplicada al rectángulo naranja, ¿qué características tiene esta transformación?

En la situación anterior se obtiene el mismo cuociente al comparar las medidas respectivas de los rectángulos naranja y morado, entonces diremos que estos son **semejantes**. En cambio, los cuocientes entre las medidas respectivas de los rectángulos verde y morado no son iguales, es decir, estos rectángulos no son semejantes.

NO OLVIDES QUE...

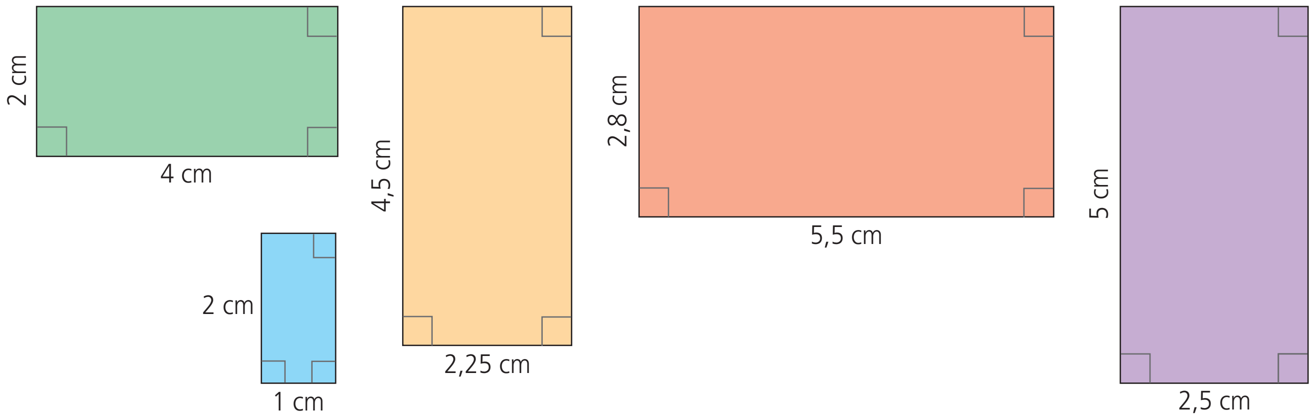
- Dos figuras son **semejantes** si tienen exactamente la misma forma y conservan las mismas proporciones con respecto a la medida de sus lados, alturas, diagonales, aunque sus tamaños sean diferentes.
- Dos figuras A y B son semejantes si para cada uno de los segmentos asociados a ellas (lados, alturas, diagonales, etc.) cumplen:

$$\frac{\text{longitud del segmento de la figura A}}{\text{longitud del segmento de la figura B}} = \mathbf{k}$$

donde **k** es un **número constante** que indica cuánto se agrandó la figura.
- Una transformación de puntos en el plano que mantiene la forma pero no el tamaño, aunque modifica todas las medidas en la misma proporción, es una semejanza.

EN TU CUADERNO

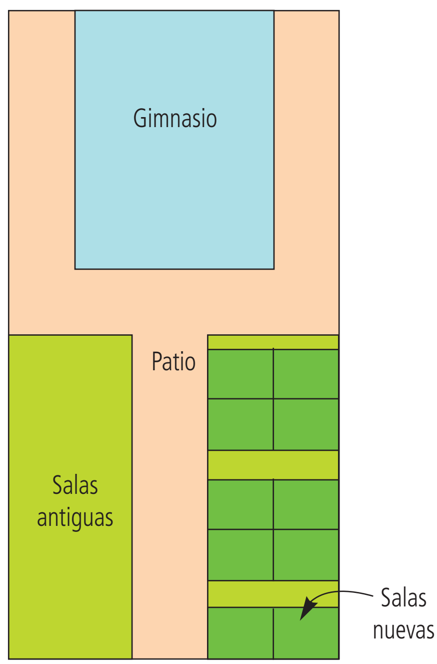
1. **Determina todos los rectángulos que sean semejantes al verde.**



2. **Construye en tu cuaderno un cuadrilátero A'B'C'D' semejante al cuadrilátero ABCD de la figura, cuya razón de semejanza respecto a ABCD sea 0,75.**

3. **Si tienes dos cuadrados de distinto tamaño, ¿son siempre semejantes?, ¿qué otras figuras cumplen esta misma condición? Justifica.**

4. **Todos los mapas o planos debieran señalar la escala a la que están construidos, la cual indica la razón entre la medida en el mapa o plano y su medida real.**
   Por ejemplo, el siguiente dibujo es el plano de la construcción de las nuevas salas y del gimnasio de un colegio, usando una escala de 1 : 1000, es decir, por cada 1 centímetro que midas en el plano, tendrás 10 metros reales.



   a) ¿Cuáles son las dimensiones del terreno en el plano?
   b) ¿Cuáles serán las dimensiones del terreno en la realidad?
   c) ¿Cuáles son las dimensiones reales de cada sala nueva?
   d) ¿Cuál es la razón entre el área del plano y el área real?, ¿están en la razón de la escala del plano? Explica.

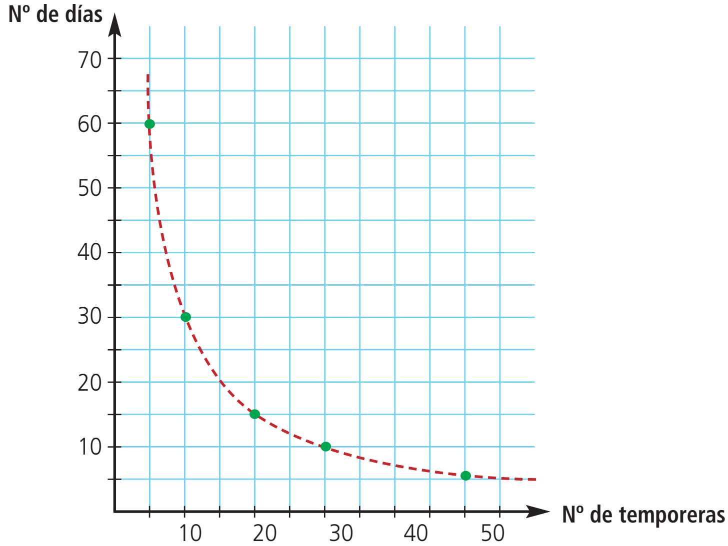
5. **En un mapa la distancia entre 2 ciudades es de 6,1 cm. Si la escala del mapa es 1 : 2 500 000, ¿cuál es la distancia real entre estas dos ciudades?**

Proporcionalidad inversa

Para terminar la cosecha en un fundo, la agrónoma a cargo ha calculado que con 10 temporeras trabajando diariamente termina la cosecha en 30 días.

La tabla muestra la relación que existe entre la cantidad de temporeras y los días que tardan en terminar la cosecha. Complétala en tu cuaderno, considerando que todas trabajan a un mismo ritmo. Esta situación la podemos representar por una curva llamada **hipérbola**. Observa.

Cantidad de temporeras	Cantidad de días
5	
10	30
20	
30	
40	
50	6



PARA DISCUTIR

- ¿Qué sucedería si se contratara a 10 temporeras más?, ¿se demorarían más o menos tiempo?, ¿por qué?
- ¿Cuántos días se demorarían 15 temporeras?, ¿cómo lo supiste?
- En cada caso, ¿qué sucede con el producto entre ambas cantidades?
- Observa el gráfico que se obtiene con los datos de la tabla. ¿En qué se diferencia del gráfico en que se representa una proporcionalidad directa?

En la situación presentada, podemos observar que al **aumentar** la cantidad de temporeras, **disminuye** el tiempo que demoran en terminar la cosecha. Si consideramos que todas las temporeras trabajan a un mismo ritmo e igual cantidad de horas diarias, esta variación es proporcional; es decir, si trabaja el doble de las temporeras, el tiempo disminuye a la mitad, y si es el triple de temporeras, el tiempo disminuye a la tercera parte. Cuando las variables varían de esta manera se dice que son **inversamente proporcionales**.

EN TU CUADERNO

1. **En una fábrica de alimentos envasados, se embala una producción mensual de aceitunas en 6 000 cajas que pueden contener 36 latas cada una. Se quiere variar el tamaño de las cajas por otras con capacidad para 12 latas y otra para 72 latas.**

   a) Suponiendo que la producción mensual es constante, ¿en cuántas cajas, de las nuevas, se puede embalar la producción mensual?, ¿cómo lo calculaste?
   b) Si la cantidad de latas disminuye a su tercera parte, ¿qué sucede con la cantidad de cajas, aumenta o disminuye?, ¿en cuánto?
   c) Si la cantidad de latas aumenta al doble, ¿cuántas cajas se necesitarán? Explica.

2. **Andrés se demora 30 minutos en llegar a la casa de su abuela caminando a una velocidad constante.**

   a) ¿Cuánto se demorará si en un día decide ir a la mitad de la velocidad que de costumbre?
   b) ¿Qué tipo de relación hay entre la velocidad a la que camina Andrés y el tiempo que demora en llegar a la casa de su abuela?

3. **Un automovilista recorre un camino a 50 km/h demorándose 2 horas en llegar a la ciudad de destino. ¿Cuánto tiempo tardará en hacer el mismo trayecto a una velocidad de 100 km/h?, ¿cómo lo calculaste?**

4. **Un gran acuario se puede llenar vaciando en él el agua contenida en 24 bidones de 18 litros cada uno. ¿Cuántos bidones se necesitarán para llenar el mismo acuario con bidones de 3 litros?**

5. **Se tiene un rectángulo de 90 cm de largo y 40 cm de ancho.**

   a) Si se mantiene constante su área, ¿cuánto tendría que medir el ancho, si el largo mide 120 cm?
   b) Y si el ancho midiera 45 cm, ¿qué medida tendría el largo? Explica.

6. **Para llenar una pileta de 250 litros se utilizan mangueras cuya salida para el agua tiene un diámetro que varía en función del tiempo de llenado. Por lo que, mientras mayor es el diámetro de la manguera, mayor es la cantidad de agua que sale por ella. La siguiente tabla resume la información anterior:**

Diámetro de la manguera	2,5 cm	5 cm	15 cm	30 cm
Tiempo de demora	90 minutos	45 minutos	15 minutos	7,5 minutos

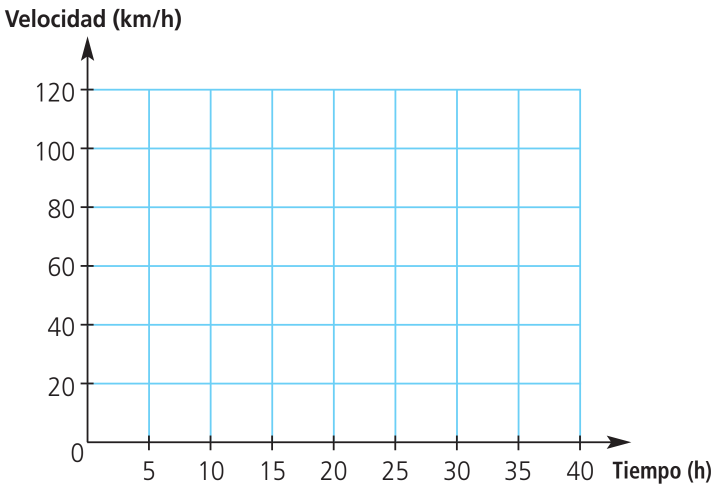
   a) ¿Qué ocurre con el tiempo de llenado si se aumenta el diámetro de la manguera?, ¿y si se disminuye?
   b) Tomando como referencia la manguera de 15 cm, si se aumenta al quíntuplo (cinco veces su valor) su medida, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse la pileta?

7. **Para las próximas vacaciones, el 7º A de un colegio irá a un lugar sorpresa del sur de Chile. La única información que tienen es que si el bus va a 100 km/h, tardarían 5 horas en llegar al destino.**

a) ¿A qué distancia se encuentra esta ciudad?
b) Completa la siguiente tabla que indica posibles velocidades del vehículo y el tiempo que utilizarían con cada una de ellas para llegar a la ciudad.

Velocidad (km/h)	100		25		
Tiempo (h)	5	10		30	40

c) Construye en tu cuaderno el gráfico correspondiente. Si unes los puntos del gráfico, ¿qué obtienes?
d) ¿A qué velocidad debe ir el vehículo para tardar 8 horas en llegar?
e) Si el vehículo fuese a una velocidad de 30 km/h, ¿cuánto tiempo tardaría en llegar a destino?
f) Si la velocidad promedio de una persona al caminar es de 5 km/h, ¿cuánto demoraría una persona en realizar el mismo viaje?



8. **El volumen que ocupa y la presión que ejerce un gas a igual temperatura son inversamente proporcionales. Si 2 metros cúbicos de aire ejercen una presión de 1,5 atmósferas, ¿qué presión habría si el aire se expande y ocupa un volumen de 6 metros cúbicos?**

9. **Determina si las siguientes variables son inversamente proporcionales.**

a) La longitud de los lados de un triángulo equilátero y su perímetro.
b) La cantidad de alimento para perros y el número de perros.
c) Litros de bencina y kilómetros recorridos.

NO OLVIDES QUE...

- Dos variables son inversamente proporcionales si al aumentar o disminuir una de ellas un cierto número de veces, la otra disminuye o aumenta, respectivamente, en la misma proporción.
- Dos variables son inversamente proporcionales si el producto entre las cantidades correspondientes se mantiene constante. En general:

$\mathbf{a \cdot b = c \cdot d = k}$ ⟶ constante de proporcionalidad inversa

- La gráfica de cantidades inversamente proporcionales es un conjunto de puntos que están en una curva, llamada **hipérbola**.

10. Si C y D son dos variables que forman una proporción inversa, completa la siguiente tabla.

C	D	Producto entre C y D
6	8	48
8		
	12	
24		
48		

a) ¿Qué obtienes al calcular el producto en cada fila?
b) Construye el gráfico correspondiente a esta tabla.

11. ¿En cuáles de las siguientes tablas las variables son inversamente proporcionales? Justifica tu respuesta.

x	y
4	5
2	10
1	20
0,5	40

x	y
7	8
10	11
13	14
16	17

x	y
100	51
50	2
25	4
5	20

x	y
1,2	5
1,5	4
6	1
0,5	40

MI PROGRESO

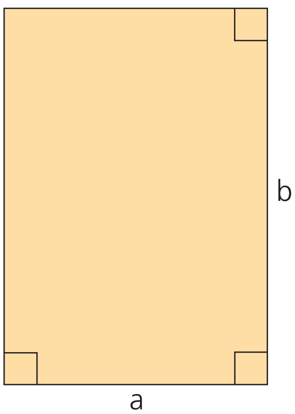
1. Completa la tabla sabiendo que el área de cada rectángulo es 6 cm^2 y construye el gráfico correspondiente.

Lado a (cm)	1	1,5	2	3	4	6
Lado b (cm)						

   a) ¿Los lados **a** y **b** varían directa o inversamente proporcionales?, ¿por qué?
   b) Si dibujaras rectángulos usando las medidas dadas en la tabla, obtendrías rectángulos semejantes?, ¿por qué?

2. Si la medida de cada uno de los lados de un rectángulo se multiplica por 1,5, ¿en cuánto aumenta su área?, ¿cómo lo calculaste?

3. Si la siguiente figura representa un terreno rectangular y está dibujado a una escala de 1 : 10 000 cm, ¿cuáles son sus medidas reales en metros?



Nueve personas pintan una casa en 12 días, trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días demoran 18 personas en pintar la misma casa trabajando al mismo ritmo 6 horas diarias?

Comprender

- ¿Qué sabes del problema?
  9 trabajadores pintan una casa en 12 días, trabajando a un mismo ritmo 8 horas diarias.
  El número de días de trabajo y la cantidad de personas que pintan la casa son variables inversamente proporcionales, cuando la jornada de trabajo es la misma.
  El número de días de trabajo y el número de horas de trabajo diario son variables inversamente proporcionales, cuando el número de personas que pintan la casa es la misma.
  ¿Qué debes encontrar?
  El número de días que demoran 18 personas en pintar la misma casa trabajando al mismo ritmo 6 horas diarias.

Planificar

- ¿Cómo resolver el problema?
  Como ambas proporciones son inversas, una posibilidad es contabilizar cuántas horas de trabajo en total son necesarias para terminar la obra, pintar la casa en este caso, y luego distribuirlo según las nuevas cantidades.

Resolver

- Horas que trabajó cada persona: $12 \cdot 8 = 96$
  Horas de trabajo totales: $12 \cdot 8 \cdot 9 = 864$

  Para obtener el número de horas que trabajaría cada persona, podemos dividir el número total de horas de trabajo por el número de personas que pintarían la casa:
  $864 : 18 = 48$
  Para obtener el número de días en que se pintaría la casa, podemos dividir el resultado anterior por la cantidad de horas diarias de trabajo: $48 : 6 = 8$.

  El número de días que demoran en pintar la casa.

Revisar

- Verificamos que $12 \cdot 9 \cdot 8 = 8 \cdot 18 \cdot 6$, es decir, se cumple la condición de las proporciones inversas, que el producto de las cantidades es constante.

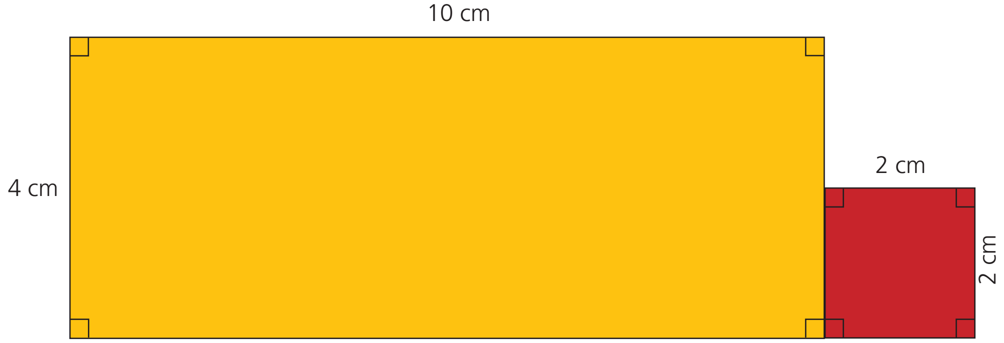
1. Resuelve los siguientes problemas, aplicando la estrategia de la página anterior.

a) 24 temporeras, trabajando al mismo ritmo, cosechan un predio de uva en 14 días, trabajando 6 horas diarias. ¿Cuántas temporeras se necesitan si se quiere terminar la cosecha en 12 días, trabajando 8 horas diarias?
b) Si van 12 niños al campamento, los alimentos durarán 10 días, si consumen 3 raciones diarias cada uno. ¿Cuántos días durará la comida si van 15 niños, y consumen 4 raciones diarias cada uno?
c) Si 25 telares producen cierta cantidad de tela en 12 turnos de 8 horas cada uno, ¿cuántos turnos de 10 horas demoran 60 telares iguales en producir la misma cantidad de tela?

2. Ahora resuelve el problema de la página anterior utilizando otra estrategia de resolución, explicándola paso a paso y compárala con las usadas por tus compañeros y compañeras.

3. Resuelve los siguientes problemas utilizando la estrategia que tú quieras. Compara el procedimiento que utilizaste con el de algún compañero o compañera. ¿Cuál es más simple?, ¿por qué?

a) En la fabricación de la pólvora se utiliza carbón, salitre y azufre, de manera que: el carbón y el salitre están en la razón 16 : 5, y el salitre con el azufre en la razón 10 : 3. ¿Cuántos kilogramos de carbón, salitre y azufre se usan para fabricar 5940 kilogramos de pólvora?
b) Tres máquinas iguales trabajando 6 horas cada día fabrican 1800 piezas. ¿Cuántas piezas pueden fabricar 5 máquinas trabajando 8 horas cada día?
c) Doce animales consumen 300 kilogramos de alimentos en 30 días. ¿En cuántos días, 60 animales consumirán 600 kilogramos de alimentos?
d) Ocho llaves llenan un estanque de 6000 litros en 4 horas. ¿En cuántas horas llenan 6 llaves un estanque de 4000 litros en iguales condiciones?
e) El siguiente plano muestra las medidas a escala y la forma de un terreno que está en venta.

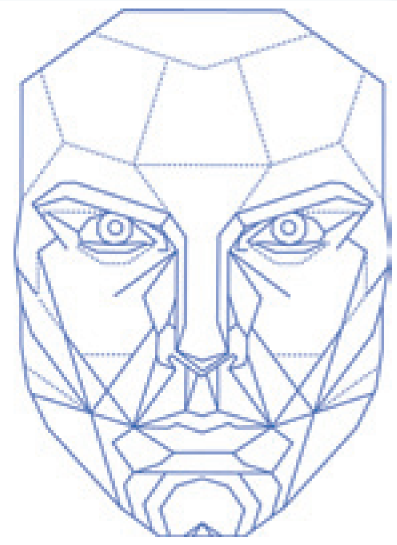


escala 1 : 1000

- ¿Cuál es el valor del terreno en UF, si el metro cuadrado cuesta 1,5 UF?

CIENCIA

La máscara áurea



Las máscaras arquetípicas del rostro humano son el resultado de las investigaciones sobre el atractivo del rostro humano del Dr. Stephen R. Marquardt. Se cree que estas máscaras representan la esencia de las preferencias en la forma de un rostro humano universal de toda nuestra especie. Las máscaras no representan un ideal o preferencia particular de una raza o etnia.
Las máscaras, para cada expresión facial (neutra, felicidad, tristeza, miedo, ira, asco, etc.), utilizan la razón áurea para establecer la distancia ideal entre los diferentes elementos de un rostro. Su invento tiene aplicaciones directas en cirugía plástica y reparadora, así como para maquillarse.
La máscara tiene derechos reservados (*copyright*) del Dr. Stephen R. Marquardt y "Marquardt Aesthetic Imaging Inc." y son cortesía de nuestro sitio web: www.beautyanalysis.com.

Máscara Marquardt de mujer adulta en la expresión de reposo, vista frontal.

1. Averigüen:

a) ¿Cuál es la proporción correspondiente a la proporción áurea?
b) ¿Cuál es el valor del número áureo (ϕ), correspondiente a la razón áurea?
c) ¿En qué elementos de la naturaleza se aprecia la proporción áurea?
d) ¿En qué obras arquitectónicas se aprecia la proporción áurea?

2. Ingresen a http://www.beautyanalysis.com/index2_mba.htm observen y comenten:

a) ¿Creen que esta máscara es buena referente para determinar la belleza de un rostro?
b) ¿Para qué situaciones puede ser beneficioso basarse en los cánones presentados en esta máscara?

EVALUAMOS NUESTRO TRABAJO

1. Cada uno complete en su cuaderno la siguiente tabla escribiendo Sí, A veces y No, según corresponda. Luego, comparen y comenten sus respuestas.

	Integrante 1	Integrante 2	Integrante 3
Respeté las opiniones de los demás integrantes.			
Cumplí con las tareas que me comprometí.			
Hice aportes interesantes para desarrollar el trabajo.			

2. Comenten y respondan: ¿en qué podrían mejorar para el próximo trabajo en equipo?

A continuación se presentan los conceptos fundamentales trabajados en la unidad. Construye con ellos un mapa conceptual, en tu cuaderno. No olvides agregar las palabras de enlace que indican las relaciones que hay entre los conceptos.

Razones y proporciones

Variaciones no proporcionales

Proporcionalidad directa

Hipérbola

Cociente

Producto

Recta que pasa por el origen

Proporcionalidad inversa

Variaciones proporcionales

Utilizando los contenidos aprendidos en la unidad y apoyándote en el esquema anterior, responde en tu cuaderno.

1. ¿Qué es una razón? Explica con dos ejemplos.
2. ¿Qué es el valor de una razón?
3. ¿Qué es una proporción? Da dos ejemplos.
4. Menciona dos situaciones en las cuales las magnitudes varíen proporcionalmente y dos en las cuales no varíen proporcionalmente.
5. ¿Qué tipo de situaciones puedes resolver con proporcionalidad directa?, ¿y con proporcionalidad inversa? Da dos ejemplos para cada caso.
6. Comenta tus respuestas con tus compañeros y compañeras, y aclara tus dudas.

¿QUÉ APRENDÍ?

Ahora trabaja en tu hipertexto

Marca, en tu cuaderno, la alternativa correcta en las preguntas 1 a la 8.

1. Si un árbol tiene una sombra que es el triple del tamaño de su altura, ¿en qué razón están el árbol y su sombra?

A. 1 : 4
B. 1 : 3
C. 4 : 1
D. 3 : 1

2. Un auto viaja a 85 kilómetros en una hora. Si mantiene esta velocidad y no para, ¿cuántos kilómetros puede recorrer en 4 horas?

A. 320 km
B. 330 km
C. 340 km
D. 350 km

3. En una florería el precio de cada rosa es de $ 1200. ¿Cuánto cuestan 8 rosas?

A. $ 8600
B. $ 9660
C. $ 9600
D. $ 10 600

4. ¿Cuál de las siguientes cantidades son directamente proporcionales?

A. La edad de una persona adulta y su altura.
B. El lado de un hexágono regular y su perímetro.
C. Los lados de un rombo y su área.
D. El número de trabajadores y los días que se demoran en terminar un trabajo.

5. Si 5 pintores logran pintar una casa en dos días, ¿cuántos días se demorarán 10 pintores al mismo ritmo?

A. 4
B. 2
C. 3
D. 1

6. Si 1 kg de manjar se puede envasar en 4 frascos de 250 g, ¿cuántos frascos de 100 g son necesarios para envasar 1 kg de manjar?

A. 8
B. 15
C. 10
D. 25

7. ¿Cuál de las siguientes cantidades son inversamente proporcionales?

A. Litros de bencina y kilómetros recorridos.
B. La altura de una persona y la longitud de su sombra.
C. La cantidad de alimento para perros y el número de perros.
D. La cantidad de llaves abiertas en un estanque y el tiempo que demora en llenarse ese estanque, manteniendo constante el flujo de agua en cada llave.

8. Un mapa está trazado a una escala de 1 : 100 000. Si la distancia en el plano entre una ciudad A y B es de 7,8 cm, ¿cuál es la distancia real?

A. 780 km
B. 7800 cm
C. 7800 km
D. 7,8 km

9. **El plano de una ciudad está dibujado usando una escala de 1 : 10 000. ¿Con qué longitud se representa en el plano la distancia de 2500 m entre dos lugares de la ciudad?, ¿cómo lo calculaste?**
10. **Una llave llena una piscina en cinco horas. Si se abre otra llave con igual flujo, ¿cuánto tiempo demora en llenarse la piscina?**
11. **Un ganadero tiene 30 vacas y alimento para ellas durante 8 días. Vende 18 vacas. Si a todas le da la misma cantidad de alimento, ¿cuántos días puede alimentar las vacas que le quedan con el alimento que tiene?**
12. **El perímetro de un triángulo es 240 cm y sus lados están en la razón 3 : 5 : 7. ¿Cuánto mide cada lado?**
13. **La suma de tres números es 300 y ellos están en la razón 3 : 4 : 5. ¿Cuáles son los números?**
14. **Don Miguel desea repartir $ 560 000 entre sus cuatro hermanos de modo que sus partes estén en la razón 1 : 2 : 3 : 4. ¿Cuánto recibe cada uno? Explica paso a paso el procedimiento que utilizaste.**

Compara tus respuestas en tu curso. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.

¿QUÉ LOGRÉ?

1. **Marca según tu apreciación.**	**No lo entendí**	**Lo entendí**	**Puedo explicarlo**
Razones y proporciones.			
Variaciones proporcionales y no proporcionales.			
Proporcionalidad directa.			
Aplicaciones: semejanza y escala.			
Proporcionalidad inversa.			
Resolución de problemas.			

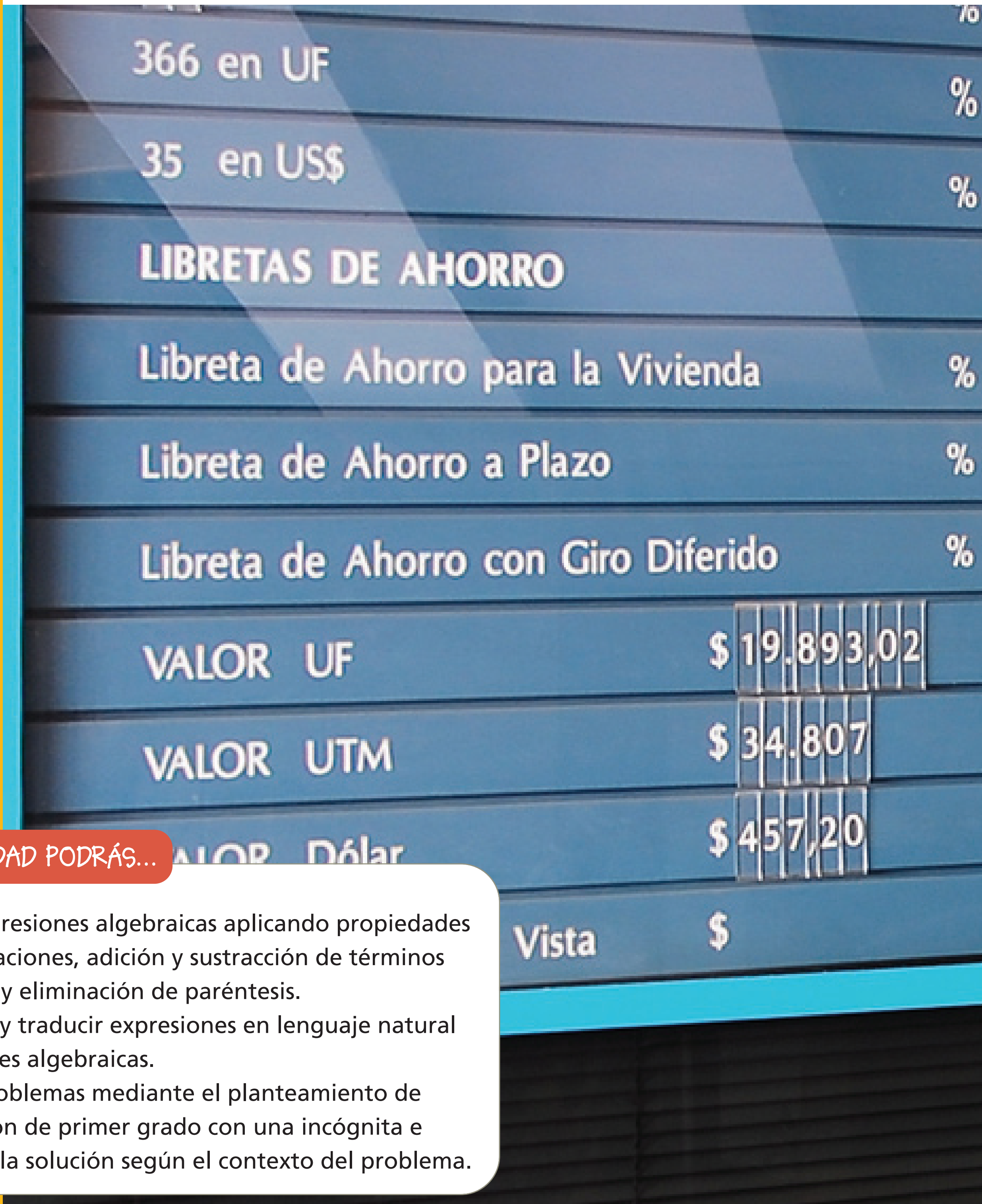
2. **Reflexiona y responde.**

   a) ¿Qué dificultades tuviste en la unidad?, ¿cómo las superaste?
   b) ¿Qué te gustó de lo que aprendiste en la unidad?, ¿por qué?
   c) Vuelve a la página 92 y revisa el recuadro “En esta unidad podrás…”, ¿crees que lograste aprender todo lo que se esperaba? Explica.

UNIDAD

5

Ecuaciones lineales



EN ESTA UNIDAD PODRÁS...

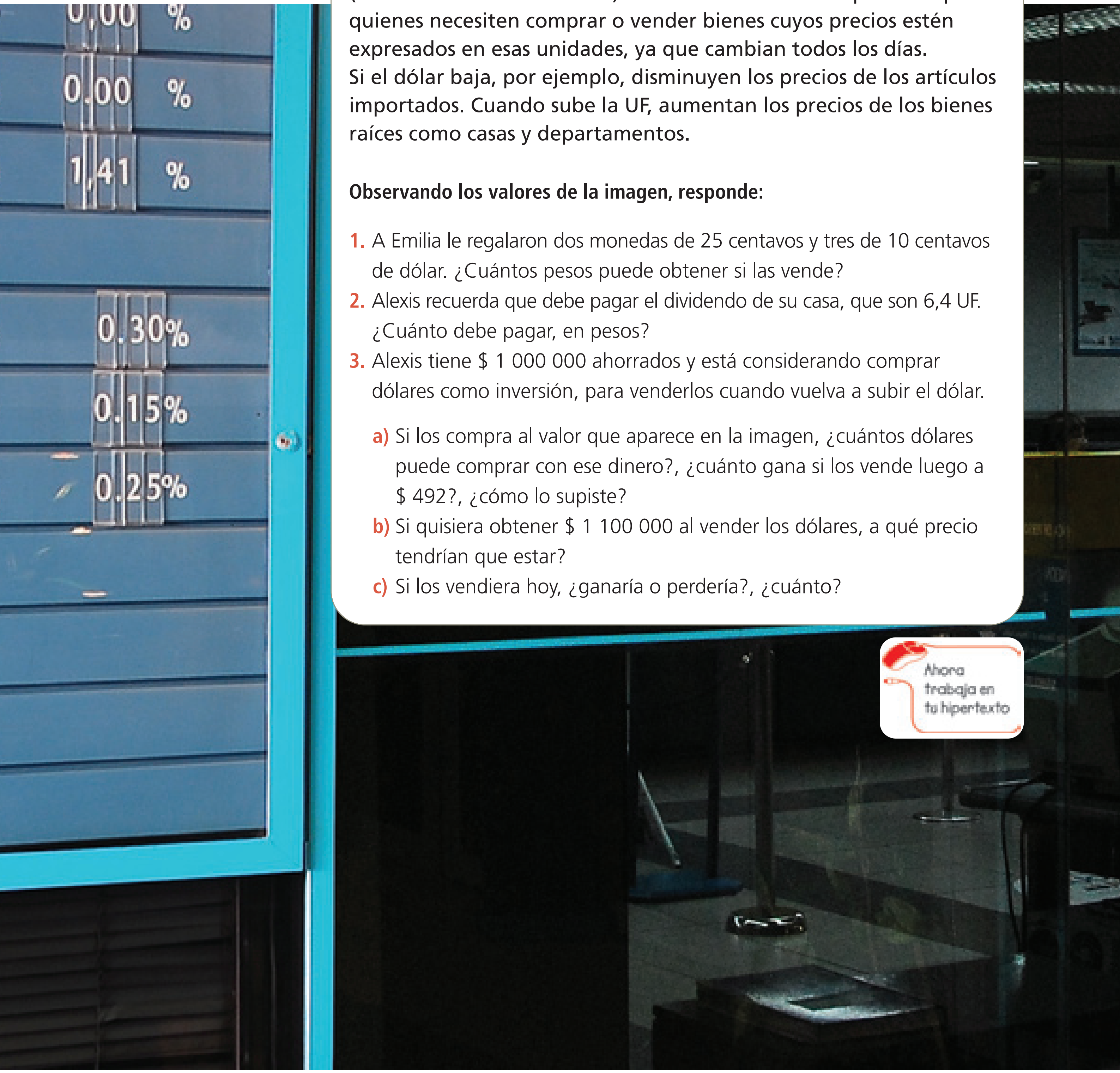
- Reducir expresiones algebraicas aplicando propiedades de las operaciones, adición y sustracción de términos semejantes y eliminación de paréntesis.
- Interpretar y traducir expresiones en lenguaje natural a expresiones algebraicas.
- Resolver problemas mediante el planteamiento de una ecuación de primer grado con una incógnita e interpretar la solución según el contexto del problema.

CONVERSEMOS DE...

¿Te has fijado que en los noticieros, diarios y en algunos bancos se anuncia el valor de monedas extranjeras como el dólar y el euro, y otros valores como el de la UF (Unidad de Fomento) y la UTM (Unidad Tributaria Mensual)? Esta información es importante para quienes necesiten comprar o vender bienes cuyos precios estén expresados en esas unidades, ya que cambian todos los días.
Si el dólar baja, por ejemplo, disminuyen los precios de los artículos importados. Cuando sube la UF, aumentan los precios de los bienes raíces como casas y departamentos.

Observando los valores de la imagen, responde:

1. A Emilia le regalaron dos monedas de 25 centavos y tres de 10 centavos de dólar. ¿Cuántos pesos puede obtener si las vende?
2. Alexis recuerda que debe pagar el dividendo de su casa, que son 6,4 UF. ¿Cuánto debe pagar, en pesos?
3. Alexis tiene $ 1 000 000 ahorrados y está considerando comprar dólares como inversión, para venderlos cuando vuelva a subir el dólar.
   a) Si los compra al valor que aparece en la imagen, ¿cuántos dólares puede comprar con ese dinero?, ¿cuánto gana si los vende luego a $ 492?, ¿cómo lo supiste?
   b) Si quisiera obtener $ 1 100 000 al vender los dólares, a qué precio tendrían que estar?
   c) Si los vendiera hoy, ¿ganaría o perdería?, ¿cuánto?



Ahora trabaja en tu hipertexto

Recuerda lo que aprendiste en años o unidades anteriores y resuelve los ejercicios en tu cuaderno.

1. Calcula.

a) El triple de ocho.
b) El doble de doce disminuido en seis.
c) La mitad de cuatro aumentada en dos.
d) Tres cuartos de ocho disminuido en un tercio de doce.

2. Escribe el número que falta para que se cumpla cada igualdad.

a) $-8 + \_\_\_ = -2$
b) $4 - \_\_\_ = 5$
c) $-3 + \_\_\_ - 6 = 15$

3. Resuelve calculando primero lo que está entre paréntesis.

a) $(4 - 8 + 3) - (9 + 6 - 5) =$
b) $1 - (9 + 12) + (3 - 6 - 7) =$
c) $12 + 24 - (48 : 8) + (7 - 25) =$
d) $16 + (56 - 64) - (2^3) =$
e) $12 \cdot 3 - (6^2) - (2 - 1) =$
f) $10 : (8 - 3) - (7 \cdot 4) =$

4. Determina si se cumplen las siguientes igualdades.

a) $\frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{2}{3} = 2 + \frac{1}{12}$
b) $0,5 - 0,25 \cdot 30 - 2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$
c) $50 : 5 + 10 = 1 + 5 \cdot 4 - 1$
d) $8 - 6 \cdot 2 + 1 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 - 9 \cdot 2$
e) $0,4 \cdot 1,2 - 0,2 = 0,7 \cdot \frac{2}{5}$
f) $0,5 \cdot 2 + 0,8 \cdot \frac{5}{4} = \frac{6 \cdot 3}{5 + 4}$

5. Verifica si se cumple cada igualdad para x = –6.

a) $3x = -18$
b) $29 - x = 25$
c) $x + 12 = 6$
d) $8x = -24$
e) $15 + 2x = 3$
f) $5x - 15 = 45$
g) $7x + 9 = 32$
h) $8x + 48 = 0$
i) $3x - 5 = 50$

6. Resuelve las siguientes ecuaciones. Luego verifica si las soluciones obtenidas son correctas, sustituyéndolas por la incógnita correspondiente.

a) $x + 3 = 11$
b) $2 + y = -3 - 1$
c) $-5 + z = -3$
d) $-2 + x = -4 + 6$
e) $x - 7 = 0$
f) $3 - x = 7 + 24$
g) $15 - v - 5 = 3 - 7 - 1$
h) $40 - 1 = 2 - v + 3$

7. **Patricia vende frutas y verduras a domicilio. Los precios de algunos productos se observan a continuación.**

a) Javier hace un pedido de 5 kg de papas. ¿Cuánto debe pagar?
b) Rosita pide 3 kg de tomates y 2 kg de manzanas. ¿Cuánto debe pagar?
c) ¿Qué es más barato, 5 kg de manzanas o 4 kg de peras?, ¿por qué?
d) Marcelo necesita 1 kg de limones, 2 kg de manzanas, 1 kg de tomates y 2 kg de papas. Si tiene $ 3500, ¿le sobra o e falta dinero?, ¿cuánto?

Compara tus respuestas en tu curso. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.

¿QUÉ DEBES RECORDAR?

- Para resolver una adición o sustracción de dos fracciones con igual denominador, se suman o restan los numeradores y se conserva el denominador.
- Para sumar o restar fracciones con distinto denominador puedes amplificar o simplificar todas o algunas de las fracciones dadas, para obtener fracciones con igual denominador. Luego, sumar o restar los numeradores, según corresponda, y conservar el denominador.
- Para trasformar una fracción a número decimal, debes dividir el numerador por el denominador.
- Al resolver un ejercicio con operaciones combinadas, debes respetar la prioridad de las operaciones:
  1° Lo que está entre paréntesis.
  2° Las potencias.
  3° Multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha.
  4° Adiciones y sustracciones de izquierda a derecha.
- Una **ecuación de primer grado con una incógnita** es una igualdad que contiene un valor desconocido llamado incógnita.
- Resolver una ecuación consiste en determinar el valor de la incógnita.
- A ambos lados de una igualdad puedes sumar o restar un mismo número, y la igualdad se mantiene. También puedes multiplicar o dividir por un mismo número (siempre que ese número no sea cero) a ambos lados, y la igualdad se mantiene.

Ejemplo: $-3 + 2\mathbf{x} = 9$ / sumar 3

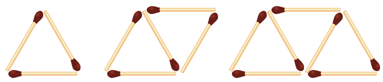
$-3 + 3 + 2\mathbf{x} = 9 + 3$ / dividir por 2

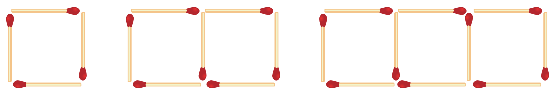
$2\mathbf{x} : 2 = 12 : 2$

$\mathbf{x} = 6$

Regularidades numéricas

Antonia y Tomás están formando figuras con palitos de fósforo. Antonia está haciendo una secuencia de figuras solo con triángulos y Tomás construye una solo con cuadrados. Cada figura que forman tiene un triángulo o cuadrado, respectivamente, más que la anterior.





PARA DISCUTIR

- ¿Cuántos fósforos necesita Antonia para agregar la figura que continúa en su secuencia?, ¿cómo lo supiste?
- ¿Cuántos fósforos necesita Tomás para agregar la figura que continúa en su secuencia?, ¿cómo lo supiste?
- ¿Cuántos fósforos necesita Antonia para formar la figura 10 de su secuencia?, ¿cuántos triángulos tiene esa figura?
- Si cada cajita tiene 51 fósforos, ¿para cuántas figuras de su secuencia le alcanzarían a Antonia?, ¿y para cuántas a Tomás?
- Tomás hace 9 cuadrados. ¿Cuántos triángulos puede hacer Antonia si usa todos esos fósforos?
- ¿Cómo representarías la cantidad de fósforos usados para formar **n** cuadrados?, ¿y para formar **n** triángulos?, ¿cómo lo supiste?

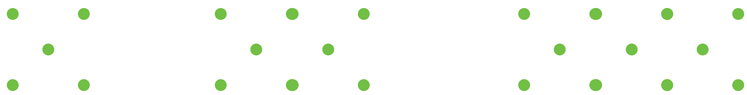
En la secuencia de Antonia, para formar una nueva figura se necesitan dos palitos más. Esta relación se puede describir de la siguiente manera:
Para la figura 1 se necesitan **2 · 1 + 1** palitos de fósforo.
Para la figura 2 se necesitan **2 · 2 + 1** palitos de fósforo.
Para la figura 3 se necesitan **2 · 3 + 1** palitos de fósforo.
Para la figura 4 se necesitan **2 · 4 + 1** palitos de fósforo.
En general, podríamos decir que si los palitos de fósforo lo escribimos como **F** y la cantidad de triángulos como **T**, la fórmula **F = 2 · T + 1** nos permite calcular cuántos palitos de fósforo necesitamos para formar una cantidad de triángulos dada. Por ejemplo, para calcular cuántos palitos se necesitan para formar la figura 100, sabemos que esta figura tiene 100 triángulos, entonces remplazamos este valor en la fórmula anterior y obtenemos:

$$F = 2 \cdot 100 + 1 = 200 + 1 = 201$$

Por lo tanto, se necesitan 301 palitos de fósforo para formar 100 triángulos.

EN TU CUADERNO

1. Las siguientes figuras de puntos mantienen un patrón. Descubre este patrón y resuelve.

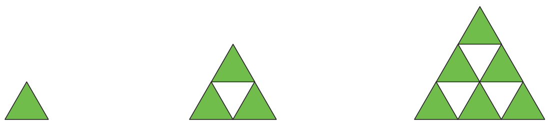


a) Completa la tabla.

Número de etapa	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Número de puntos									

b) ¿Cuál es la fórmula que relaciona cantidad de puntos y etapa?

2. En la siguiente secuencia de figuras, sea n el número de pisos que tiene el triángulo y m el número de triángulos pequeños pintados.



a) Dibuja las tres figuras que continúan en la secuencia, según el patrón.

b) Completa la tabla.

n	1	2	3	4	5	6
m	1	1 + 2	1 + 2 + 3			
Fórmula	$\frac{1 \cdot 2}{2}$	$\frac{2 \cdot 3}{2}$				

c) ¿Cuál es la fórmula general? Compara con tus compañeros y compañeras.

d) Siguiendo el mismo patrón, si hay 21 triángulos pintados, ¿cuántos pisos hay?, ¿y si consideramos 210 triángulos pintados?

e) ¿Cuánto es 1 + 2 + 3 + ... + 60?, ¿a qué triángulo corresponde?

NO OLVIDES QUE

- Reconocer una regularidad numérica nos permite determinar una expresión general que represente la relación entre dos cantidades.
- Para reconocerla, se puede analizar si según cambia una, la otra lo hace regularmente, por ejemplo, sumando o multiplicando siempre por un mismo número.

Expresiones algebraicas

	Fórmula
Perímetro de un triángulo (P_t)	$P_t = a + b + c$
Perímetro de un cuadrado (P_c)	$P_c = 4a$
Perímetro de un rectángulo (P_r)	$P_r = 2a + 2b$
Área de un triángulo (A_t)	$A_t = \dfrac{b \cdot h}{2}$
Área de un cuadrado (A_c)	$A_c = a^2$
Área de un rectángulo (A_r)	$A_r = a \cdot b$

La siguiente tabla presenta fórmulas que has visto en años anteriores que permiten calcular el perímetro y el área de diferentes figuras. Observa.

PARA DISCUTIR

- ¿Qué representan las letras en las expresiones de la tabla?
- ¿Por qué en la fórmula del perímetro de un triángulo hay letras distintas? Si un triángulo tiene tres lados, ¿nos serviría **3a** como fórmula para calcular el perímetro?, ¿por qué?
- ¿Cuál es la expresión correspondiente al área total de dos cuadrados iguales?, ¿y de dos distintos?
- Si conozco la medida de un lado del rectángulo, pero no la del otro, ¿puedo calcular su área y su perímetro?, ¿y en el caso del cuadrado?, ¿por qué?
- Si conozco la medida de la base del triángulo y el valor de su área, ¿puedo obtener la medida de su altura?, ¿cómo?

NO OLVIDES QUE

- En el lenguaje algebraico se utilizan letras para representar variables. Para variables distintas se asignan letras distintas.
- Un **término algebraico** es una expresión matemática que tiene dos componentes, un "coeficiente" (o factor numérico) y un "factor literal" compuesto de una o más letras con sus respectivos exponentes. Estos números y letras están relacionados solo por multiplicaciones o divisiones. En estos términos, el signo de multiplicación no es necesario escribirlo. Por ejemplo, el término $\mathbf{2a^2b}$ es equivalente a $\mathbf{2 \cdot a^2 \cdot b}$.
- Una **expresión algebraica** es un conjunto de uno o más términos algebraicos unidos mediante operaciones de suma o resta. Por ejemplo: $\mathbf{2x + y}$; $\mathbf{a^2 - ab + b^2}$.

EN TU CUADERNO

1. **Piensa, relaciona y responde:**

   a) Si **2x** representa el doble de tu edad, ¿qué representa **x**?

   b) Si **xy** representa el área del piso de tu sala, ¿qué representan **x** e **y**?

2. **Si x representa tu edad, ¿cómo expresarías en lenguaje algebraico la edad que tenías hace 5 años?, ¿y la que tendrás dentro de 5 años?**

3. **Observa los ejemplos y expresa en lenguaje algebraico las siguientes frases.**

El doble de un número. → 2x

5 aumentado en el doble de 4. → $5 + 2 \cdot 4$

a) 3 disminuido en el triple de 12.
b) El doble de la suma de 4 y –7.
c) La mitad del triple de un número.
d) La suma del cuarto de un número y el doble de otro número.

4. **Expresa en lenguaje algebraico las siguientes situaciones:**

a) El valor de 4 cebollas a **c** pesos cada una.
b) El valor de **x** kg de manzanas a $ 180 cada uno.
c) El valor de 8 pimentones a **x** pesos cada uno.
d) El valor de 5 cajas de chocolates a **t** pesos cada una.

5. **Expresa mediante una igualdad cada uno de los siguientes enunciados.**

a) La suma de **x** e **y** es igual a 30.
b) La mitad de 36 es igual a **y**.
c) El triple de **x** es igual a 24.
d) El producto de **y** por 10 es igual a 100.
e) La quinta parte de **z** disminuida en 3 es igual a **z**.
f) La sexta parte del cuádruple de **a** es igual a 7.

6. **Para calcular el área de un trapecio de bases b_1 y b_2 y altura h, se puede utilizar la siguiente fórmula:**

$$A_{trapecio} = \frac{b_1 + b_2}{2} h$$

a) ¿Cuál es el área de un trapecio de 6 cm de altura y cuyas bases miden 14 y 18 cm, respectivamente?
b) ¿Cuál es el área de un trapecio de 3 cm de altura y cuyas bases miden 28 y 36 cm, respectivamente?

Ayuda

Recuerda que para **valorar** una expresión algebraica debes remplazar las letras por los valores correspondientes y luego realizar los cálculos necesarios.

7. **Gabriel vende juguetes y para organizarlos los guarda en tres cajas: los dinosaurios en una caja verde, las muñecas en una caja roja y los autos en una caja amarilla. Un día su hijo lo ayudó en el negocio y dejó todos los juguetes en las cajas, pero desordenados. En la caja verde dejó 4 dinosaurios, 2 muñecas y 5 autos; en la caja roja, 6 dinosaurios, 1 muñeca y 3 autos y en la caja amarilla 2 dinosaurios, 3 muñecas y 7 autos.**

a) Asigna una letra a cada tipo de juguete y representa cuántos juguetes quedaron en cada caja mediante una expresión algebraica.
b) Gabriel vende los dinosaurios a $ 600, las muñecas a $ 950 y los autos a $ 750. ¿Cuánto dinero puede recibir Gabriel por la venta de todos los juguetes que dejó su hijo en la caja amarilla?, ¿y si vendiera todos los juguetes?, ¿cómo lo calculaste?

Reducción de expresiones algebraicas

Día	Donación
Lunes	$2a + 3b + 4c$
Martes	$3a + b + 2c + 3d$
Miércoles	$a + 4b + 5c + d$
Jueves	$3a + 3c + 2d$
Viernes	$b + 2c + 2d$

Los alumnos y alumnas del séptimo básico están recolectando alimentos en una caja para llevar a un hogar de niñas de la ciudad.

Solicitaron colaborar con arroz, leche en polvo, tallarines y/o legumbres. Para llevar un registro de lo que recibían, el profesor anotaba las cantidades junto a una letra: **a**, para un kilogramo de arroz, **b** para un kilogramo de leche en polvo, **c** para un kilogramo de tallarines y **d** para un kilogramo de legumbres. Observa la tabla que construyó.

PARA DISCUTIR

- ¿Qué productos había en la caja el lunes?, ¿cuántos kilogramos de cada uno?
- ¿Cuántos kilogramos de cada producto se habían recolectado hasta el miércoles?
- ¿De qué alimento se recibieron más donaciones?
- ¿Qué expresión representa el total de donaciones recibidas?, ¿cómo llegaste a esta expresión?

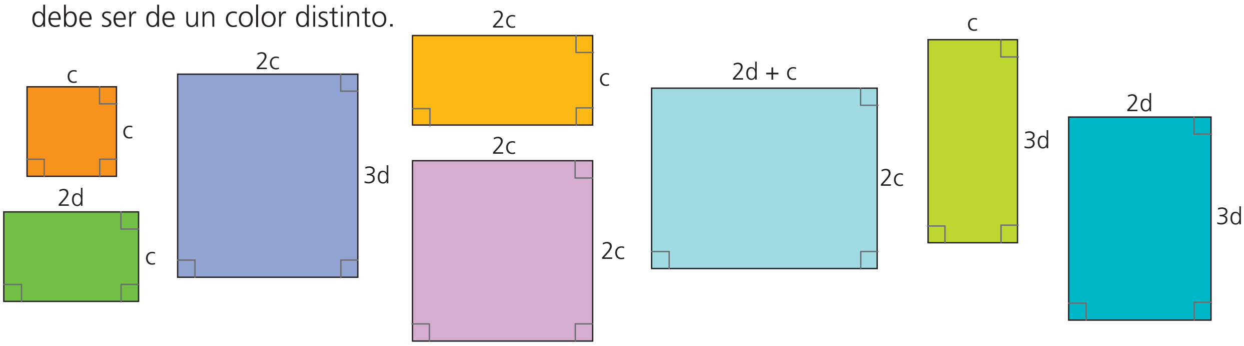
EN EQUIPO

Materiales:
- 8 papeles lustre de colores distintos
- Tijeras
- Regla

En esta actividad deberán reducir expresiones algebraicas aplicando propiedades de las operaciones, y adición y sustracción de términos semejantes.

Formen grupos de 3 integrantes y sigan las instrucciones.

1. Cada uno debe calcar las siguientes figuras en los papeles lustre y luego recortarlas. Cada figura debe ser de un color distinto.



2. Escriban las expresiones que representan el perímetro de cada figura. Comparen las expresiones obtenidas, ¿obtuvieron todos lo mismo?
3. Formen un rectángulo con las figuras anteriores y escriban el perímetro del rectángulo en términos de **c** y **d**. ¿Obtuvieron todos lo mismo?
4. Si sumas las expresiones que representan los perímetros de cada figura, ¿qué obtienes?
5. ¿Esta expresión es la misma que la del perímetro del rectángulo que formaron?, ¿por qué?

NO OLVIDES QUE

- En una expresión algebraica se distingue **factor o coeficiente numérico** y **factor literal**.

  Ejemplo: $5a^2b$ — factor literal

  factor o coeficiente numérico

- Los **términos semejantes** de una expresión algebraica son todos los que tienen el mismo factor literal. Dos factores literales son iguales solo si tienen las mismas letras y además el mismo exponente para cada una, cuando incluyen potencias.
- Para reducir los términos semejantes, se asocian los términos que son semejantes y luego se suman o restan, según corresponda. Por ejemplo: $3a + 5b + 2c - 8a + b = (3a - 8a) + (5b + b) + 2c = -5a + 6b + 2c$

EN TU CUADERNO

1. Determina en cada caso si los términos son semejantes.

a) $4a \quad 9a$ b) $-3xy^2 \quad 7xy^2$ c) $3xyz \quad -6xzy$

2. Reduce los términos semejantes en cada una de las siguientes expresiones algebraicas.

a) $4a + 7b - 6a + 4b - 3a + 9b =$

b) $8a - 6ab + 5b - 2a + 13b - ab =$

c) $a^2b - 2ab^2 + 3ab - 4a^2b + 6ab^2 =$

d) $6xy + 4x^2 - 5xy + 3y^2 - 5x^2 - xy + x^2 =$

3. Resuelve los siguientes ejercicios, considerando que debes resolver primero los paréntesis que están dentro de otros. Puedes eliminar el paréntesis si el signo que le antecede es positivo; en cambio, si es negativo, debes cambiar todos los signos de los términos que aparecen dentro del paréntesis. Luego, reduce los términos semejantes.

Ejemplo: $3m - (m - n) + (3m + 2n - 4n) + 3n = 3m - m + n + 3m + 2n - 4n + 3n =$

$= (3m - m + 3m) + (n + 2n - 4n + 3n) = 5m + 2n$

a) $8x + (4y - 2x + 3) - (5 - 3y) =$

b) $9y - z - (2y - 5x + 8z) - 7y =$

c) $12a - 5b + (3a - 2b) - (-8b - 10) =$

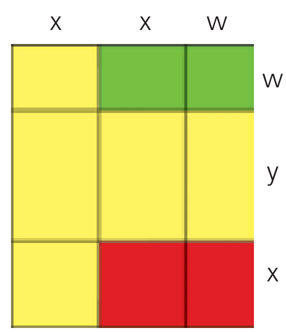
d) $3b - 10c - (5a + 7b - 2c) + (4a + c) =$

e) $6a^2 - 8ab + 3b^2 - (-9b^2 + 7ab + 3a^2) =$

f) $4xyz - (7xy + 8xz) + (15xy - 6yz - 2xyz) =$

MI PROGRESO

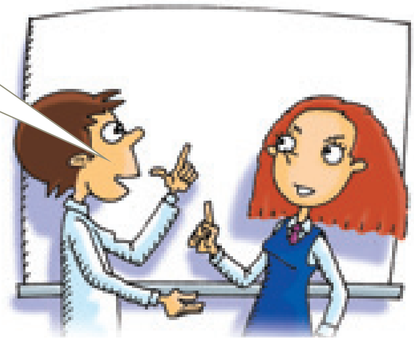
Observa la siguiente figura. Considera que todos los ángulos que se forman son rectos.



1. Escribe las expresiones que representan los perímetros de las figuras de cada color.
2. Escribe la expresión con menor cantidad de términos que representa el perímetro de la figura.
3. Javier dice que el perímetro de la figura amarilla es 24 cm, si **x** = 2 cm, **y** = 3 cm y **w** = 1,5 cm, ¿estás de acuerdo con él?, ¿por qué?

Ecuaciones lineales con coeficientes enteros

Rosario le pregunta la edad a Carlos y este le plantea el siguiente acertijo, observa:



Ayuda

Recuerda que a ambos lados de una igualdad puedes sumar, restar, multiplicar o dividir un número o expresión (en el caso de la división, debe ser distinto de 0) y la igualdad se mantiene.

PARA DISCUTIR

- Si **x** representa la edad de Carlos, ¿cómo plantearías la ecuación que permite resolver la situación?
- ¿Qué operaciones se deben aplicar para resolver la ecuación?
- ¿Cuántos años tiene Carlos?
- Rosario dice que Carlos tiene 16 años, ¿cómo lo verificarías en la ecuación que planteaste?

NO OLVIDES QUE

- Una **ecuación** es una igualdad que contiene al menos un valor desconocido llamado incógnita.
- Para determinar si la **solución** encontrada es correcta, se remplaza ese número en la incógnita, todas las veces que esté en la ecuación. Si se obtiene una igualdad, la solución es correcta. Luego, se debe verificar si es pertinente en el contexto del problema.

EN TU CUADERNO

1. Lee atentamente, plantea una ecuación y resuelve cada problema.

a) Si 1 kg de papas vale \$ 278, ¿cuántos kilogramos se pueden comprar con \$ 1390?
b) En un bolsillo Pedro tiene una cantidad de dinero y en el otro tiene el triple. Si en total tiene \$ 600, ¿cuánto dinero tiene en cada bolsillo?
c) Daniel compró un cuaderno en \$ 750 y cinco lápices iguales. En total pagó \$ 1200. ¿Cuál es el precio de cada lápiz?
d) De una cuerda de 12 m de longitud se cortan cinco trozos iguales y sobran 2,5 m. ¿Cuál es la longitud de cada trozo de cuerda que se cortó?
e) Nicolás quiere comprar un libro que vale \$ 7600. Si tiene \$ 5800, ¿cuánto dinero le falta?
f) Si Carlos pagó con \$ 1000 tres kilogramos de naranjas y recibió de vuelto \$ 160, ¿cuánto cuesta cada kilogramo de naranjas?
g) En un canasto hay 51 manzanas distribuidas en tres bolsas. La primera tiene 9 manzanas menos que la tercera y la segunda tiene 6 más que la tercera. ¿Cuántas manzanas tiene cada bolsa?

2. **Observa las ofertas que se muestran para un mismo producto en un supermercado.**

Analiza las ofertas y decide cuál es la mejor.

a) Si quieres llevar 4 rollos, ¿cómo te conviene hacer tu compra?
b) Si quieres llevar solo 6 rollos, ¿cómo lo harías? ¿Cuánto gastarías?
c) ¿De cuántas maneras puedes comprar 8 rollos de papel?, ¿cuánto gastarías en cada caso? Compara con tus compañeros y compañeras.

3. **Plantea la ecuación y luego calcula cuál es el número desconocido en cada caso.**

a) Si a un número le quito 33 se obtiene 67.
b) La suma de un número y su antecesor es 17.
c) La suma de un número con su mitad es igual a 60.
d) Un número aumentado en 7 unidades es igual al doble de 8.
e) La suma de un número y 36 es igual a la diferencia entre 340 y 200.
f) El triple de un número disminuido en dos resulta el doble del número aumentado en ocho.
g) Si a un número le agregamos 6, nos da el triple del número disminuido en cuatro.
h) El doble del número aumentado en su cuádruple es 36 disminuido en el triple del número.
i) Al cuádruple de un número le agregamos 9, nos resulta el número aumentado en su doble y disminuido en tres.
j) Si al quíntuple de un número le quitamos 7, se obtiene cuatro veces el número aumentado en 30.

4. **Las máquinas A y B transforman números. Observa lo que hace cada máquina y resuelve.**

Máquina A

x

$3x + 10$

Máquina B

x

$2x - 7$

a) ¿Cuál es el número que puede entrar a la máquina A y **no** tener cambio alguno?, ¿cuál en la máquina B?
b) ¿Cuál es el número que ingresa a la máquina A y su transformación es igual a la producida por la máquina B pero aumentada en 25?
c) ¿Cuál es el número que ingresa a la máquina B y su transformación es igual a la producida por la máquina A pero disminuida en 20?

Ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios y decimales

Don Jorge fue a comprar frutos secos al mercado. Primero compró $\frac{1}{2}$ kg de nueces y $\frac{1}{4}$ kg de almendras y gastó \$ 4625. Después compró 0,6 kg de higos secos y 0,3 kg de pasas y gastó en total \$ 2820.
De vuelta a casa, se encontró con la señora Patricia. Observa.

PARA DISCUTIR

- Con estos datos, ¿puede Patricia calcular el precio del kilogramo de almendras?, ¿y del kilogramo de pasas?, ¿cómo?
- ¿Qué ecuación te permite obtener el precio de las almendras?, ¿y el de las pasas?
- ¿Puedes escribir de manera más simple las ecuaciones anteriores antes de resolverlas?, ¿qué operación u operaciones debes realizar?
- ¿Cuánto costaba el kilogramo de almendras?, ¿y el de pasas?

NO OLVIDES QUE

- Para facilitar la resolución de ecuaciones con coeficientes fraccionarios, conviene transformar los coeficientes fraccionarios en enteros, amplificando cada término de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones presentes en la ecuación, y luego resolverla como siempre.
- Y cuando los coeficientes son números decimales, conviene amplificar cada término de la ecuación por la potencia de 10 que transforme en entero al decimal con más cifras decimales, y luego resolverla como siempre.

EN TU CUADERNO

1. Resuelve las siguientes ecuaciones.

a) $\frac{1}{3}x + 300 = \frac{2}{9}x$

b) $\frac{1}{2}x - 4500 = 1500 + \frac{3}{4}x$

c) $\frac{3}{2}a + 2400 = 600 - 2a$

d) $700 - \frac{2}{5}y = \frac{1}{3}y - 7000$

e) $0,25x + 750 = 1250 - 0,05x$

f) $1,4a - 0,128 = 0,342 + 0,6a$

g) $0,45x - 12,5 = 0,3x + 8$

h) $0,002y = 0,04 + 0,03y$

2. Plantea la ecuación y luego resuelve los siguientes problemas.

a) Ximena fue a comprar $\frac{1}{2}$ kg de pan y $\frac{1}{4}$ kg de jamón. Gastó en total \$ 1190. Si el pan cuesta \$ 820 el kilogramo, ¿cuánto cuesta un kilogramo de jamón?

b) En un supermercado se ofrece el choclo congelado en dos paquetes de distintas masas. El de 0,5 kg cuesta \$ 599 y el de 1,5 kg, \$ 1399. Patricia revisó los precios y decidió que si escogía llevar los paquetes grandes se ahorraba \$ 600, respecto de lo que gastaría llevando los paquetes chicos. ¿Cuántos kilogramos de choclo congelado llevó?

c) Marcelo le da a su hermano Nicolás la mitad de las manzanas que tiene y media manzana más. Luego le da a su hermana Paula la mitad de las manzanas que le quedan y media manzana más. Si él se queda con una sola manzana, ¿cuántas manzanas tenía?

ESTRATEGIA MENTAL

Observa las estrategias:

¿Por qué número hay que multiplicar 3,2 para obtener 320 000 000?

$3{,}2x = 320\,000\,000 \qquad 3{,}2 \cdot 100\,000\,000 = 320\,000\,000$

¿Por qué número hay que multiplicar 3,2 para obtener 0,00032?

$3{,}2x = 0{,}00032 \qquad 3{,}2 \cdot \frac{1}{10\,000} = 0{,}00032$

1. ¿Cómo se relacionan los "ceros" de las potencias de diez con los lugares en que se corrió la coma?, multiplicar por $\frac{1}{10\,000}$, ¿es lo mismo que dividir por 10 000?

2. Calcula mentalmente, utilizando la estrategia anterior.

a) ¿Por qué número hay que multiplicar 6,1 para obtener 6 100 000?
b) ¿Por qué número hay que multiplicar 5,098 para obtener 0,5098?
c) ¿Por qué número hay que multiplicar 1,23 para obtener 0,000123?

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

La calculadora básica te puede ser muy útil para resolver una ecuación, siempre que tú tengas muy claro la operación matemática que hay que realizar, ya que la calculadora no "sabe" resolverlas por sí sola.

Resuelve usando la calculadora.

a) $12{,}5x = 625\,000$
b) $2{,}701 + x = 0{,}0002701$
c) $19{,}01x = 1\,901\,000$
d) $32{,}4 + 0{,}2x = 15\,682{,}4$
e) $129{,}5 = 32 + x$
f) $1{,}27 = 4{,}07x$

Estudio de las soluciones

Antonia, una alumna de 7° año, ha obtenido en el segundo semestre las siguientes notas en matemática: 6,0; 3,5; 5,2; 4,1; 3,4.

Si le falta solo una evaluación y quiere tener un 6,0 de promedio en el semestre, ¿qué nota debe obtener en la última evaluación?

PARA DISCUTIR

- ¿Qué ecuación plantearías para resolver el problema?
- Al resolverla, el resultado que obtienes, ¿tiene sentido en el contexto del problema?, ¿por qué?
- ¿Qué pasaría si solo quisiera obtener un 5,5 como promedio en el semestre?, ¿es posible?

NO OLVIDES QUE

- **Siempre debes revisar tus respuestas, ya que aunque la ecuación esté bien resuelta, el resultado debe ser pertinente, según el contexto de la situación.**

EN TU CUADERNO

1. Escribe la ecuación correspondiente a cada situación y luego resuelve interpretando la solución.

a) Las notas de Tomás en Lenguaje son: 6,8; 6,0; 6,9; 7,0; 4,0; 7,0; 7,0. Si solo le queda una evaluación, ¿qué nota debe sacarse para asegurar un 5 de promedio?

b) Las notas de Joaquín en Estudio de la Sociedad son: 5,0; 5,0; 4,0; 4,0; 4,0; 6,6. Si solo le queda una evaluación, ¿qué nota debe sacarse para obtener un 5,1 de promedio?

c) La longitud de un cable más 1 metro es igual a la mitad de la longitud del cable, aumentada en 6 metros. ¿Cuánto mide el cable?

d) Un curso completo de 30 niñas decide ir al cine. Si la entrada cuesta $ 1500 y solo disponen de $ 28 000, ¿para cuántas entradas les alcanza?

e) En un hogar para niños de escasos recursos, se calcula que con $ 250 pueden ofrecer un desayuno por niño. ¿Cuántos desayunos alcanzarían con $ 79 250? ¿Cuánto dinero necesitan para ofrecer 500 desayunos?

2. **Descubre por qué la respuesta al siguiente problema es incorrecta.**

Problema: Verónica tiene 55 años y Daniel, 48 años. ¿Hace cuánto tiempo la edad de Daniel era los $\frac{9}{10}$ de la edad de Verónica?

Respuesta: Hace 15 años.

3. **Resuelve los siguientes problemas y compara tu estrategia con tus compañeros y compañeras. Recuerda evaluar si el resultado es pertinente al contexto del problema.**

a) Un repartidor de diarios entrega en la primera hora $\frac{1}{3}$ de los diarios que tenía, y durante la segunda hora, la mitad de los que le quedaban. Si después de esto aún le quedan 20 diarios por repartir, ¿cuántos tenía en un comienzo?

b) Sergio vende libros a las bibliotecas de varios colegios. Él debe llevar un registro de los libros que vende cada día, pero el día jueves se da cuenta de que ha perdido su registro de esa semana; solo recuerda que el lunes vendió el doble de los libros que vendió el martes, el miércoles vendió dos libros más que el lunes y el jueves vendió tres menos que el martes. También sabe que ha vendido 47 libros en total. ¿Puedes ayudar a Sergio a rehacer su registro de ventas?

MI PROGRESO

Isabel llevó a su nieta Emilia a una confitería muy antigua. Vendían dulces que Emilia no había visto nunca, y algunos eran los favoritos de Isabel. Los dulces no estaban en los paquetes de siempre, sino que se vendían por gramos, es decir, según cuánto pesan, se calcula el precio que se debe pagar.

Como era una ocasión especial, Isabel le dijo a Emilia que disponía de $ 1000 para escoger dulces y $ 1000 para escoger galletas.

1. ¿Cuánto cuestan 100 g de gomitas?, ¿y $\frac{1}{2}$ kg de galletas de champaña?
2. Si Emilia quiere 100 g de guagüitas y el resto en calugas, ¿para cuántos gramos de caluga alcanza?
3. Si luego quiere $\frac{1}{3}$ kg de galletas obleas y el resto en galletas de mantequilla, ¿para cuánto alcanza?
4. Emilia dice que si junta el dinero y lo reparte de otra forma puede llevar 300 g de galletas de mantequilla y $\frac{1}{4}$ kg de huevitos de almendra. Isabel le dice que no le alcanza el dinero. ¿Qué crees tú? Justifica tu respuesta.

Un padre tiene 23 años menos que su madre, y su hijo 35 años menos que él. Si la suma de las tres edades es 168 años, ¿qué edad tiene cada uno?

Comprender

- ¿Qué sabes del problema?
  La diferencia entre las edades del padre y su madre es de 23 años.
  La diferencia entre las edades del padre y su hijo es de 35 años.
  La suma de las edades de los tres es 168 años.

- ¿Qué debes encontrar?
  Las edades de cada uno.

Planificar

- ¿Cómo resolver el problema?
  Primero se debe decidir a qué valor asignar la incógnita. Luego, expresar los demás valores de acuerdo a sus relaciones numéricas con la incógnita. Y, finalmente, plantear la ecuación utilizando los datos del enunciado.
  En este caso, la incógnita se puede asignar a la edad del padre, de la abuela o del hijo, siempre que se expresen correctamente las relaciones numéricas entre los datos.

Edad del padre	Edad de la abuela	Edad del hijo
x	$x + 23$	$x - 35$
$x - 23$	x	$x - 58$
$x + 35$	$x + 58$	x

Resolver

- Usando la incógnita asignada a la edad del padre, la ecuación es:

$$\begin{aligned} x + (x + 23) + (x - 35) &= 168 \\ 3x - 12 &= 168 \\ 3x &= 180 \\ x &= 60 \end{aligned}$$

Responder

- El padre tiene 60 años, la abuela tiene 83 años y el hijo tiene 25 años.

Revisar

- Podemos sumar las edades obtenidas y verificar si el resultado es 168.

$$60 + 83 + 25 = 168$$

1. **Resuelve los siguientes problemas, aplicando la estrategia de la página anterior.**

   a) Tres números consecutivos suman 144. ¿Cuáles son los números?

   b) La suma de las edades de Andrea y Javiera es 45 años. Si dentro de 5 años la edad de Andrea será $\frac{3}{8}$ de la edad de Javiera, ¿qué edad tienen actualmente?

   c) Camila junta monedas de $ 5 y su hermano Javier de $ 10. El doble de las monedas que tiene Camila menos 7 es igual a 45 y Javier tiene nueve monedas menos que Camila.

   - ¿Cuánto dinero tiene cada uno?
   - ¿Cuántas monedas le faltan al que tiene menos dinero para juntar lo mismo que su hermano?

   d) En una caja hay el doble de caramelos de menta que de frutilla y el triple de caramelos de naranja que de menta y frutilla juntos. Si en total hay 144 caramelos, ¿cuántos hay de cada sabor?

2. **Ahora resuelve el problema de la página anterior utilizando otra estrategia de resolución. Explica paso a paso cómo lo resolviste y compara tu estrategia con las usadas por tus compañeros y compañeras.**

3. **Resuelve los siguientes problemas utilizando la estrategia que tú quieras. Compara el procedimiento que utilizaste con el de algún compañero o compañera. ¿Cuál es más simple?, ¿por qué?**

   a) Álvaro comió 100 galletas en cinco días. Cada día comió 6 más que el día anterior. ¿Cuántas galletas comió el primer día?

   b) La suma de cuatro números consecutivos es 74. ¿Cuáles son los números?

   c) La señora Jacinta está a cargo de 10 animales, entre gatos y perros. La señora debe darles vitaminas todos los días: 5 tabletas a cada gato y 6 a cada perro. Si reparte en total 56 tabletas de vitaminas, ¿cuántos gatos y cuántos perros tiene a cargo la señora Jacinta?

   d) Vicente es cuatro años más joven que Gonzalo. Pero dentro de cinco años, Gonzalo tendrá dos veces la edad que tiene Vicente ahora. ¿Cuántos años tiene en este momento cada uno de ellos?

   e) Una araña tiene 8 patas. Un matapiojos tiene 6 patas y 2 pares de alas. Una chicharra tiene 6 patas y un par de alas. Ahora tenemos un total de 18 insectos en una caja, de tres clases distintas. Hay en total 118 patas y 20 pares de alas. ¿Cuántos insectos hay de cada clase?

NACIONAL

Pulentos serán rostros de campaña contra obesidad

El Ministerio de Salud lanzó en septiembre de 2007 una campaña contra la obesidad orientada a estudiantes de Educación Básica que se llama "Vivir sano es Pulento".

Esta campaña la pueden encontrar en: http://www.redsalud.gov.cl/noticias/campana_pulentos.htm (consultado en mayo de 2009) y está promocionada por la serie "Los Pulentos" que, con tres nuevos temas musicales estimulan la actividad física y el consumo de comida saludable.

Para decidir si una persona tiene sobrepeso u obesidad se utiliza un número que a partir de la estatura y la masa, determina el rango más saludable de masa que puede tener una persona, este número es el IMC (índice de masa corporal), que se calcula dividiendo la masa (en kilogramos) por el cuadrado de la estatura (expresada en metros).

$$\text{IMC} = \frac{\text{peso (kg)}}{(\text{altura (m)})^2}$$

En adultos, se considera saludable cuando el valor del IMC está entre 18 y 25. En los niños y jóvenes, los valores de IMC dependen de la edad y el sexo de cada persona, porque aún están en crecimiento.

Varones	Bajo peso	Normal	Sobrepeso	Obesidad
12 años	Hasta 15,4	15,5–21	21–24,2	Desde 24,3
13 años	Hasta 16,0	16,1–21,8	21,9–25,1	Desde 25,2
14 años	Hasta 16,5	16,6–22,6	22,7–26,0	Desde 26,1

Mujeres	Bajo peso	Normal	Sobrepeso	Obesidad
12 años	Hasta 15,4	15,5–21,8	21,9–25,2	Desde 25,3
13 años	Hasta 15,4	16,0–22,5	22,6–26,3	Desde 26,4
14 años	Hasta 15,4	16,5–23,3	23,4–27,3	Desde 27,4

Fuentes: www.inta.cl., www.lanacion.cl (consultados en marzo de 2008, adaptación).

1. **Averigüen su peso y su estatura y remplacen los valores en la expresión dada para calcular el IMC.**
2. **Comparen los valores obtenidos con los de la tabla e identifiquen en qué rango se encuentran.**
3. **Comenten y respondan:**

   a) ¿Qué dificultades genera el sobrepeso y la obesidad en los jóvenes?
   b) ¿Cómo se puede evitar que siga aumentando el porcentaje de obesidad juvenil?

EVALUAMOS NUESTRO TRABAJO

1. **Cada uno complete en su cuaderno la siguiente tabla escribiendo Sí, A veces y No, según corresponda. Luego comparen y comenten sus respuestas.**

	Integrante 1	Integrante 2	Integrante 3
Respeté las opiniones de los demás integrantes.			
Cumplí con las tareas que me comprometí.			
Hice aportes interesantes para desarrollar el trabajo.			

2. **Comenten y respondan: ¿en qué podrían mejorar para el próximo trabajo en equipo?**

A continuación, se presentan los conceptos fundamentales trabajados en la unidad. Construye con ellos un mapa conceptual, en tu cuaderno. No olvides agregar las palabras de enlace que indican las relaciones que hay entre los conceptos.

Ecuaciones lineales

Términos algebraicos

Lenguaje natural

Igualdad

Factor literal

Solución

Números

Incógnita

Expresiones algebraicas

Letras

Términos semejantes

Factor o coeficiente numérico

Utilizando los contenidos aprendidos en la unidad y apoyándote en el esquema anterior, responde en tu cuaderno.

1. ¿Que ventajas tiene el uso de expresiones algebraicas?
2. ¿Es lo mismo una igualdad que una ecuación?
3. ¿Cuándo dos términos son semejantes?
4. ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de primer grado con una incógnita?
5. Comenta tus respuestas con tus compañeros y compañeras, y aclara tus dudas.

¿QUÉ APRENDÍ?

Marca, en tu cuaderno, la alternativa que consideres correcta en los ejercicios 1 al 8.

Ahora trabaja en tu hipertexto

1. Tomás forma distintos cuadrados con palitos de fósforo. ¿De qué tamaño es el cuadrado más grande que puede formar con 51 fósforos?

A. De 5 fósforos por lado.
B. De 10 fósforos por lado.
C. De 12 fósforos por lado.
D. De 17 fósforos por lado.

2. Al reducir la expresión $8a - 6ab + 4b - 7a + 10b - ab$ se obtiene:

A. $-5a + 14b$
B. $a + 14b - 7ab$
C. $2a - 2b - ab$
D. $a + 4b - 8ab$

3. La expresión algebraica: "el producto de un número y 25 es igual a la diferencia entre el doble de ese número y 125" es:

A. $x + 25 = 125 - 2x$
B. $a \cdot 25 = 2b - 125$
C. $25x = 2x - 125$
D. $x \cdot y \cdot 25 = 2 \cdot (x - 125)$

4. En un canasto hay 45 manzanas distribuidas en tres bolsas. La primera tiene 8 manzanas menos que la tercera y la segunda tiene 5 más que la tercera. ¿Cuántas manzanas tiene la segunda bolsa?

A. 10
B. 18
C. 21
D. 25

5. Se tiene la ecuación $2x + 5 = 11$. Entonces el valor de $-3x - 9$ es:

A. 0
B. 9
C. -9
D. -18

6. Alejandra hace 8 años tenía x años. En 6 años más tendrá:

A. $x - 8 + 6$
B. $x + 8 + 6$
C. $8 + 6 - x$
D. $8 - x - 6$

7. Un rectángulo tiene un largo que es el cuádruple de su ancho. Si su perímetro es de 120 cm, ¿cuál es el largo?

A. 10
B. 12
C. 30
D. 48

8. Gladys fue a comprar 1 kg de pan, $\frac{1}{4}$ kg de queso y $\frac{1}{8}$ kg de jamón para la once. Gastó en total \$ 2175. Si el pan cuesta \$ 900 el kilogramo y el jamón \$ 3800 el kilogramo, ¿cuánto cuesta 1 kg de queso?

A. \$ 3000
B. \$ 2900
C. \$ 3200
D. \$ 2600

9. **El largo de un rectángulo mide el triple de su ancho. Si su perímetro es 48 cm, ¿cuál es su área?**

10. **Sergio corrió en una competencia un cuarto más que el doble de lo que corrió Andrea. ¿Cuántos metros corrió Sergio, sabiendo que Andrea corrió 200 metros?**

11. **Aldo, Carlos y Javier juegan con una máquina tragamonedas. Entre los tres pierden 40 monedas. Carlos pierde 12 más que Javier. Javier pierde la mitad de las que pierde Aldo. ¿Cuántas monedas pierde cada uno?**

12. **Un zoológico tiene varias avestruces y varias jirafas. Si entre todas hay 30 ojos y 44 patas en total, ¿cuántas avestruces y cuántas jirafas hay?**

Compara tus respuestas en tu curso. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.

¿QUÉ LOGRÉ?

1. Marca según tu apreciación.	**No lo entendí**	**Lo entendí**	**Puedo explicarlo**
Regularidades numéricas.			
Expresiones algebraicas.			
Reducción de expresiones algebraicas.			
Ecuaciones lineales con coeficientes enteros.			
Ecuaciones lineales con coeficientes fraccionarios y decimales.			
Estudio de las soluciones.			
Resolución de problemas.			

2. Reflexiona y responde.

a) ¿Qué dificultades tuviste en la unidad?, ¿cómo las superaste?
b) ¿Qué te gustó de lo que aprendiste en la unidad?, ¿por qué?
c) Vuelve a la página 116 y revisa el recuadro “En esta unidad podrás…”, ¿crees que lograste aprender todo lo que se esperaba? Explica.

UNIDAD

6

Volumen de prismas rectos y pirámides

Latinstock

EN ESTA UNIDAD PODRÁS...

- Identificar y usar el milímetro cúbico, centímetro cúbico y metro cúbico como unidades de volumen.
- Determinar y aplicar fórmulas para el cálculo de volúmenes de prismas rectos de base rectangular y triangular.
- Calcular el volumen de cuerpos que pueden descomponerse en prismas rectos de base rectangular y triangular.
- Resolver problemas que involucran cálculos de volumen.

CONVERSEMOS DE...

El cartón corrugado es uno de los materiales más usados para envase y embalaje debido a sus diversas ventajas, como la protección de su contenido durante su transporte y almacenamiento; su economía; así como su naturaleza reciclable y reciclada.
Muchas veces se usan cajas de este material para los cambios de casa. Pero, ¿qué hacemos con las cajas después de usarlas?
Las cajas que aparecen en la imagen son de cartón corrugado y tienen distintos tamaños, según las dimensiones de los productos que queremos guardar en ellas. ¿Sabías que existen muchos materiales como este que se pueden reciclar y que esto aporta al cuidado del medioambiente? Por ejemplo, una tonelada de papel reciclado salva la vida de 5 árboles adultos, una tonelada de papel reciclado ahorra más de 30 000 litros de agua.

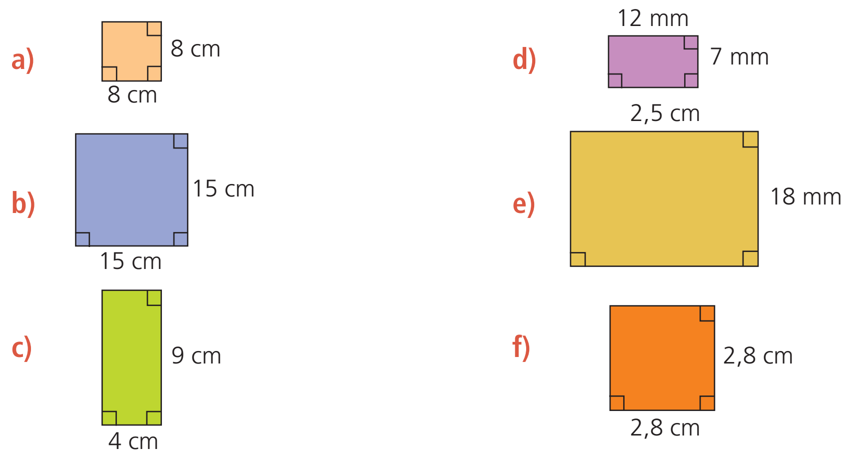
Observa las cajas de la imagen:

1. ¿Qué forma tienen?
2. ¿En todas se pueden guardar los mismos productos?, ¿cómo se puede describir la capacidad de una caja?
3. ¿Todas ocupan el mismo espacio dentro de una habitación?, ¿por qué?

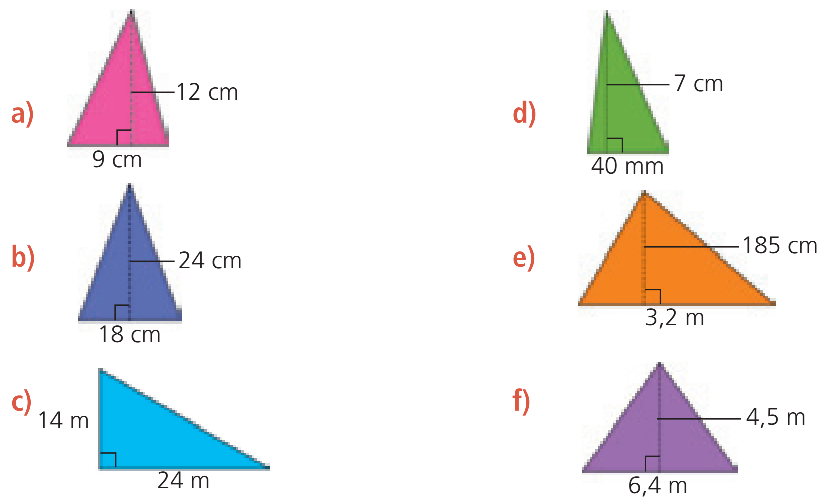
Ahora trabaja en tu hipertexto

Recuerda lo que aprendiste en años anteriores y resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno.

1. Calcula el área de los siguientes cuadriláteros y explica el procedimiento que usaste.



2. Calcula el área de los siguientes triángulos y explica el procedimiento que usaste.



3. Completa la tabla con las equivalencias entre las unidades de medida de longitud.

Milímetros (mm)	Centímetros (cm)	Metros (m)
	12,5	
4500		
		10,8
	3750	
25		

4. **Completa la tabla con las equivalencias entre las unidades de medida de superficie.**

Milímetro cuadrado (mm^2)	Centímetro cuadrado (cm^2)	Metro cuadrado (m^2)
	1600	
720		
		0,25
		9,6
	196	

5. **El papá de Bernardo tiene un viñedo en un terreno rectangular de 800 m de ancho y 1200 m de largo.**

a) ¿Cuántos rollos de alambre de 50 m se necesitarán para cercar el terreno?
b) Si en un metro cuadrado de terreno produce 10 kg de uvas, ¿cuál es el máximo de kilogramos de uvas que puede dar el terreno del papá de Bernardo?
c) Si se quiere considerar ahora un terreno cuadrado para la plantación de uvas y con el mismo perímetro del terreno anterior, ¿cuáles serían las dimensiones de este nuevo terreno?
d) ¿Cuántos kilogramos de uvas en total puede producir con este nuevo terreno? ¿Por qué sucede esto?

Compara tus respuestas en tu curso. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.

¿QUÉ DEBES RECORDAR?

- Para obtener el área de un cuadrado de lado **a**, se calcula $\mathbf{a^2}$.
- Para obtener el área de un rectángulo de lados **a** y **b**, se calcula $\mathbf{a \cdot b}$.
- Para obtener el área de un triángulo de base **b** y altura **h**, se calcula $\dfrac{\mathbf{b \cdot h}}{\mathbf{2}}$.
- En un triángulo rectángulo, las medidas de los catetos se pueden considerar como su base y su altura, ya que son perpendiculares entre sí.
- Algunas equivalencias entre las unidades de medida de longitud son:

  1 m = 100 cm = 1000 mm
  1 cm = 0,01 m = 10 mm
  1 mm = 0,001 m = 0,1 cm

- Las equivalencias entre las unidades de medida de superficie son:

  $1\ m^2 = 10\ 000\ cm^2 = 1\ 000\ 000\ mm^2$
  $1\ cm^2 = 0{,}0001\ m^2 = 100\ mm^2$
  $1\ mm^2 = 0{,}000001\ m^2 = 0{,}01\ cm^2$

Prismas rectos

Los minerales pueden aparecer en la naturaleza, básicamente, de dos maneras: sin una forma definida (amorfos), o bien con una forma geométrica bastante definida. A estos últimos se les llaman minerales cristalinos o cristales.

Los cristales se encuentran con frecuencia en las grietas o en las cavidades vacías de las rocas, ya que para que estos se formen se necesita espacio. Observa las imágenes de algunos minerales.

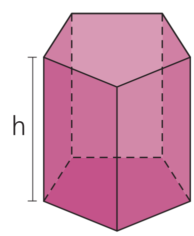
PARA DISCUTIR

- Considerando su forma, ¿qué tienen en común estos minerales?
- ¿Tienen superficies curvas?, ¿tienen superficies que correspondan a figuras geométricas? ¿A cuáles?
- ¿Cómo podrías describir la forma de estos minerales?

Los cristales tienen forma de cuerpos geométricos. Un cuerpo geométrico es un sólido, que ocupa un lugar en el espacio, limitado por una o más superficies.

Recordando lo visto en años anteriores podemos decir que:

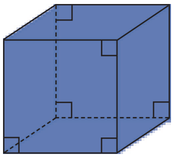
- Si todas las superficies de un cuerpo son planas, corresponde a un cuerpo poliedro. En este caso, a estas superficies las llamamos caras.
- Si alguna de sus superficies no es plana, como por ejemplo en un cilindro, corresponde a un cuerpo redondo.
- Dentro del conjunto de cuerpos poliedros, se llama prisma a los que están formados por dos polígonos congruentes y paralelos entre sí, que llamamos caras basales, y tantos paralelogramos como lados tienen las caras basales.
  Estos paralelogramos son las caras laterales.

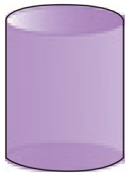


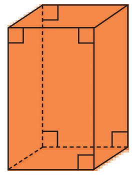
- Si las aristas que unen dos caras laterales son perpendiculares a las de las caras basales, se dice que es un **prisma recto.**
- Cuando las caras basales son cuadrados o rectángulos, al prisma se le llama también paralelepípedo.

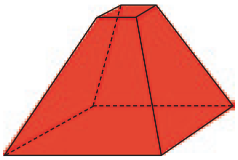
EN TU CUADERNO

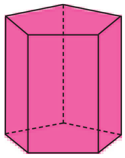
1. **¿Cuáles de los siguientes cuerpos geométricos son prismas rectos? Explica tu decisión.**

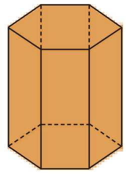
a) 

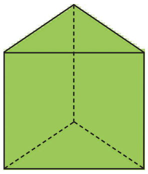
d) 

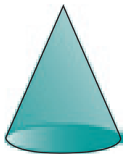
g) 

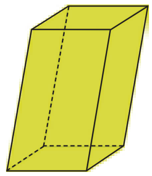
b) 

e) 

h) 

c) 

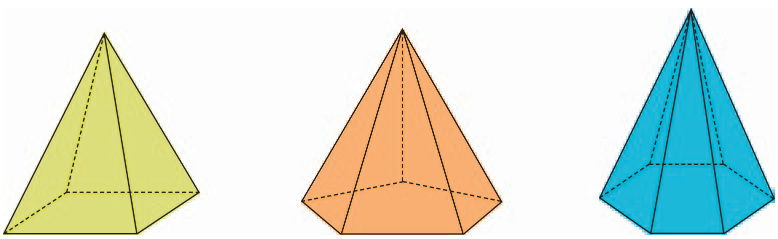
f) 

i) 

2. **Escribe cinco ejemplos de objetos con forma de prismas rectos que encuentres en tu vida cotidiana.**

3. **Describe las características que tienen los prismas rectos.**

4. **¿Los siguientes cuerpos son prismas rectos?, ¿por qué?**



NO OLVIDES QUE

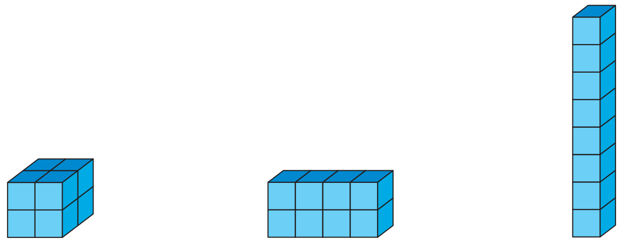
- Un **poliedro** es un cuerpo geométrico cuyas caras son todas planas.
- Un **prisma** es un poliedro que tiene dos caras basales paralelas e iguales y sus caras laterales son paralelógramos.
- La línea que se forma al intersectar dos caras es una **arista**. Los puntos donde concurren tres aristas se llaman **vértices**.
- Los prismas rectos son aquellos en que sus caras basales son perpendiculares a sus caras laterales.

Volumen: unidades de medida

Ayuda

Cuando hablamos de **volumen** nos referimos a la medida que ocupa un cuerpo en el espacio.

Cada uno de los siguientes cuerpos se formó con cubos del mismo tamaño, cuyo volumen es 1 m^3 y corresponde a la medida del espacio que ocupa un cubo cuyas aristas miden 1 m. Observa:



Dato interesante

La **capacidad** es la medida del volumen que puede contener un cuerpo. A pesar de que volumen no es lo mismo que capacidad, para calcular la capacidad se suelen utilizar las mismas fórmulas que para el volumen.

PARA DISCUTIR

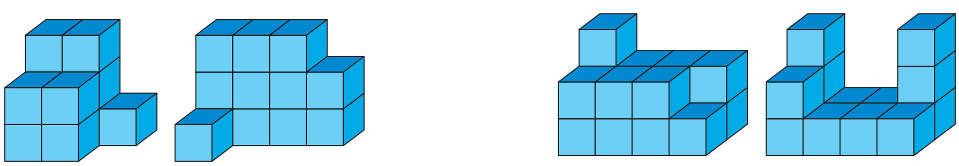
- ¿Cómo podrías describir el tamaño de cada uno de estos cuerpos?, ¿con cuántos cubos se formó cada uno?
- ¿Es correcto decir que tienen el mismo tamaño?, ¿y que ocupan el mismo espacio? Explica.
- Si desarmamos los cuerpos, ¿podemos guardar todos los cubos en una caja, si en ella caben cinco cubitos a lo largo, tres cubitos a lo ancho y dos cubitos a lo alto? Explica.
- Si el volumen de cada uno de los cubos que forman los cuerpos es 1 m^3, ¿cuánto es el volumen de cada cuerpo?, ¿cómo lo supiste?
- Si desarmamos los cuerpos, ¿podemos armar con todos los cubos un prisma recto cuyo volumen sea 24 m^3?, ¿cuántos cubos tendría de largo, de ancho y de alto ese prisma?, ¿es la única posibilidad?, ¿por qué?

NO OLVIDES QUE

- La unidad de medida que se utiliza para el volumen es el metro cúbico (m^3), pero tiene múltiplos y submúltiplos como el centímetro cúbico (cm^3) y milímetro cúbico (mm^3), entre otros. Al igual que con las unidades de medida lineales y de superficie, al expresar el volumen de un objeto es recomendable escoger la unidad de medida que permita comprender más fácilmente sus dimensiones. Por ejemplo, el volumen de un líquido que está dentro de una taza, puede expresarse como 200 000 mm^3 pero es más adecuado 200 cm^3.

EN TU CUADERNO

1. Si todos los cuerpos están formados por cubitos cuyo volumen es 1 cm^3, ¿cuál de los cuerpos tiene un volumen mayor? Explica cómo lo supiste y expresa su volumen en centímetros cúbicos.



2. Observa los datos de la siguiente tabla y responde.

Cubo cuya arista mide	Volumen	Equivalencia del volumen en m^3
1 milímetro (mm)	1 milímetro cúbico (mm^3)	0,000000001 m^3
1 centímetro (cm)	1 centímetro cúbico (cm^3)	0,000001 m^3
1 decímetro (dm)	1 decímetro cúbico (dm^3)	0,001 m^3
1 metro (m)	1 metro cúbico (m^3)	1 m^3
1 decámetro (dam)	1 decámetro cúbico (dam^3)	1000 m^3
1 hectómetro (hm)	1 hectómetro cúbico (hm^3)	1 000 000 m^3
1 kilómetro (km)	1 kilómetro cúbico (km^3)	1 000 000 000 m^3

a) Si comparo un cubo cuya arista mide 1 mm con uno cuya arista mide 1 cm, ¿qué cubo tiene un volumen mayor?, ¿y si lo comparo con uno cuya arista mide 1 m?, ¿por qué?

b) ¿Qué operación puedes realizar para encontrar la equivalencia en metros cúbicos de 1 dm^3, de 1 cm^3 y de 1 mm^3?, ¿y de 1 dam^3, de 1 hm^3 y de 1 km^3?

3. Determina qué unidad de medida de volumen es pertinente para medir el volumen en cada caso.

a) Un camión de mudanzas.

b) Una caja de zapatos.

c) Una caja de fósforos.

d) Un dormitorio.

4. Completa las siguientes equivalencias.

a) 6,54 m^3 = ________ cm^3

b) 0,28 m^3 = ________ mm^3

c) 4900 mm^3 = ________ cm^3

d) 67 500 cm^3 = ________ m^3

e) 8 400 000 mm^3 = ________ m^3

f) 3 650 000 cm^3 = ________ mm^3

ESTRATEGIA MENTAL

Si te fijas, las unidades de volumen aumentan o disminuyen de 1000 en 1000, como se muestra en el siguiente diagrama.

$$km^3 \underset{:\,1000}{\overset{\cdot\,1000}{\rightleftarrows}} hm^3 \underset{:\,1000}{\overset{\cdot\,1000}{\rightleftarrows}} dam^3 \underset{:\,1000}{\overset{\cdot\,1000}{\rightleftarrows}} m^3 \underset{:\,1000}{\overset{\cdot\,1000}{\rightleftarrows}} dm^3 \underset{:\,1000}{\overset{\cdot\,1000}{\rightleftarrows}} cm^3 \underset{:\,1000}{\overset{\cdot\,1000}{\rightleftarrows}} mm^3$$

Observa las siguientes equivalencias entre unidades de medida.

5000 mm^3 = (5000 : 1000 : 1000 : 1000) m^3 = 0,000005 m^3

8,16 m^3 = (8,16 · 1000 · 1000) cm^3 = 8 160 000 cm^3

Calcula las siguientes equivalencias.

a) 160 000 cm^3 = ________ m^3

b) 32 mm^3 = ________ cm^3

c) 0,000125 m^3 = ________ cm^3

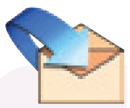
d) 75 cm^3 = ________ mm^3

Volumen de prismas rectos de base rectangular

Don Alberto está a cargo de coordinar los fletes de una distribuidora de alimentos hacia los supermercados y almacenes del sector. Hoy debe despachar varios pedidos que suman 100 cajas de 60 cm de ancho, 80 cm de largo y 50 cm de alto cada una. El camión que utiliza usualmente no está disponible, por lo que debe contratar un camión especialmente para esta oportunidad.

PARA DISCUTIR

- ¿Cómo puede estimar don Alberto qué capacidad necesita para su flete?
- Si pudiéramos poner cubos de 1 cm^3 en cada caja, ¿cuántos cubitos caben en el fondo de cada una?, ¿y con cuántos "pisos de esos cubitos" se llenaría cada caja?
- ¿Cuál es el volumen de cada caja en centímetros cúbicos?, ¿cómo lo calculaste?
- A don Alberto le ofrecen dos camiones, uno con 20 m^3 de capacidad y otro con 25 m^3 de capacidad. ¿Cuál le sirve para transportar los pedidos del día?



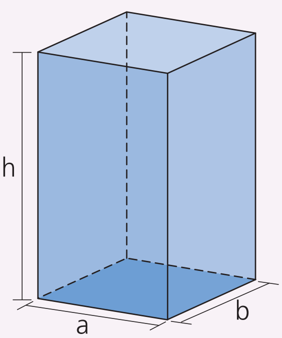
NO OLVIDES QUE

- Para calcular el volumen de un prisma recto de base rectangular, puedes utilizar la siguiente fórmula:

  Volumen = área basal · altura

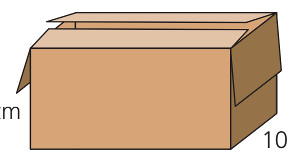
  Para el prisma de base rectangular de la figura, el área de la base es **a · b** y su altura es **h**, luego su volumen es: **V = a · b · h**.

- Siempre debes revisar que las medidas utilizadas estén en la misma unidad, si no es así, debes aplicar las equivalencias correspondientes antes de multiplicar.



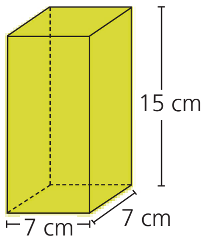
EN TU CUADERNO

1. Observa las dimensiones de la caja de la figura y aplica la fórmula para calcular su volumen.

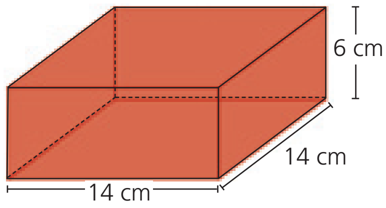


2. Calcula el volumen de los siguientes prismas:

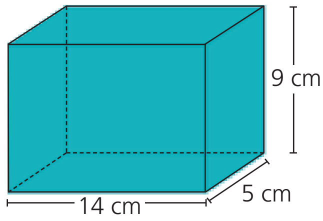
a)



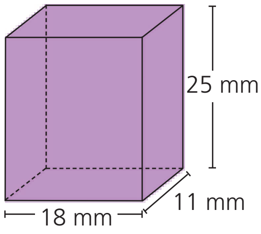
b)



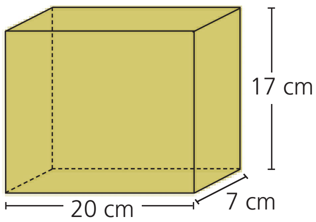
c)



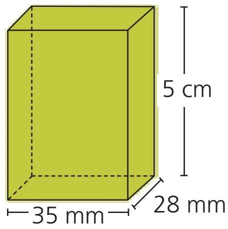
d)



e)

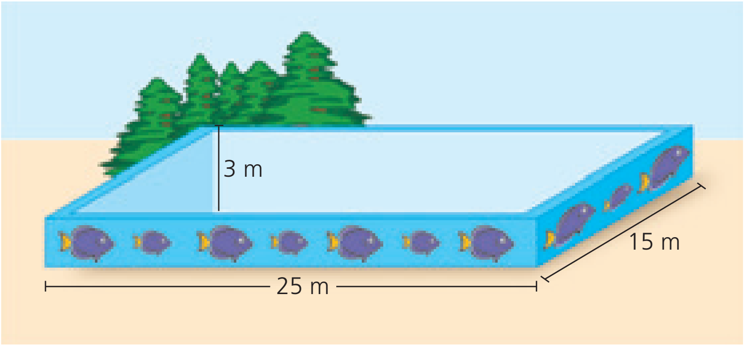


f)



- ¿Qué ocurrirá con el volumen de estos prismas si su altura se duplica?, ¿y si las medidas de los lados de sus bases se reducen a la mitad? ¿Ocurrirá siempre lo mismo? Explica.

3. Una piscina de 3 m de profundidad tiene forma de prisma de base rectangular con las dimensiones que se observan en la imagen. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?, ¿cómo lo supiste?



Ayuda

$1 \text{ m}^3 = 1000$ litros.

- Si el largo de la piscina se redujera a la mitad, ¿con cuántos litros de agua se llenaría la piscina?

4. Un granero de 3 m de largo y 2,5 m de ancho debe contener 45 m^3 de trigo, ¿cuál debe ser su altura?

5. Una tina con forma de prisma tiene 150 cm de largo, 60 cm de ancho y 50 cm de alto.

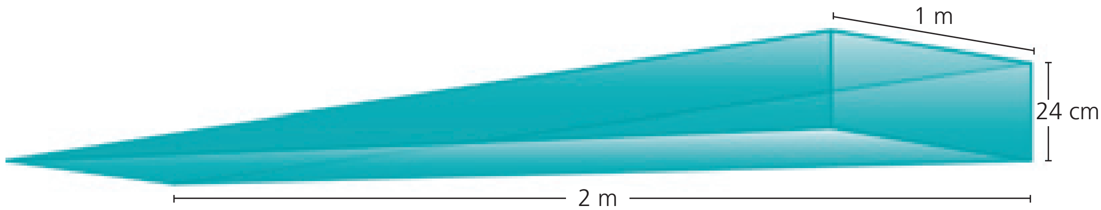
a) ¿Cuántos litros de agua caben en la tina?

b) Si se llena de agua hasta cierto nivel y luego, cuando se sumerge completamente un niño aumenta el nivel en 5 cm. ¿Cuál es el volumen del niño?

Volumen de prismas rectos de base triangular

En la Municipalidad están conscientes de que todo edificio, sea de uso privado o público, debe contar con entradas y espacios comunes, accesibles para personas con discapacidades físicas, por lo que han decidido construir rampas de acceso en sus edificios. Para que una persona que se desplaza en silla de ruedas pueda hacerlo sin ayuda, la inclinación debe ser de a lo más un 12%.

Se decidió entonces que la primera parte de la rampa sería con las medidas que se muestran en la siguiente figura:

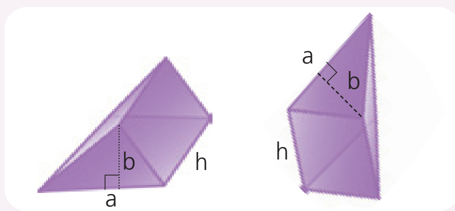


PARA DISCUTIR

- ¿Cómo se puede estimar la cantidad de hormigón que se necesita para construir la primera sección de la rampa?
- Si se considera un paralelepípedo de 2 m de largo, 1 m de ancho y 24 cm de altura, ¿cuál sería el volumen de hormigón utilizado?
- ¿Qué relación tiene el volumen de un paralelepípedo con el de un prisma de base triangular, si sus dimensiones son las mismas?
- Entonces, ¿cuál es el volumen de hormigón utilizado para construir la rampa?

NO OLVIDES QUE

- Para calcular el volumen de un prisma recto de base triangular, se puede utilizar la siguiente fórmula:



Volumen = área basal · altura

Para el prisma de base triangular de las figuras, el área de la base es $\frac{\textbf{base} \cdot \textbf{altura}}{\textbf{2}} = \frac{\textbf{a} \cdot \textbf{b}}{\textbf{2}}$

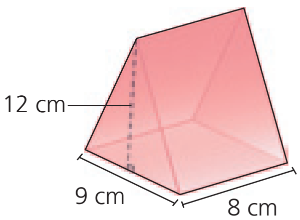
Como la altura del prisma es **h**, su volumen es $\mathbf{V} = \frac{\mathbf{a \cdot b \cdot h}}{\mathbf{2}}$.

- Recuerda revisar que las medidas utilizadas estén en la misma unidad, si no es así, debes aplicar las equivalencias correspondientes antes de multiplicar.

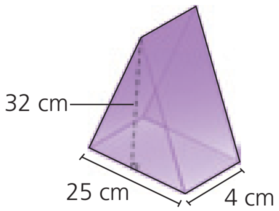
EN TU CUADERNO

1. Calcula el volumen de los siguientes prismas:

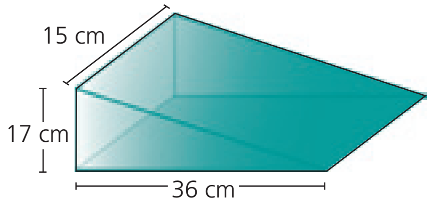
a)



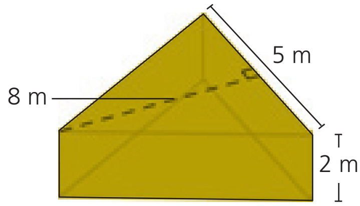
b)



c)



d)



2. La directora de una escuela básica decidió que se construya un cajón de arena para que jueguen los niños y niñas de prekinder y kinder. Luego consiguió que le donaran arena de una empresa del sector, la que le envió 1,5 m^3 de arena. La parvularia le indicó que el cajón debía llenarse con arena al menos 30 cm de altura.

a) Expresa el volumen de arena recibida en centímetros cúbicos.

b) Si ocupa un antiguo cajón de 3 m de largo y 2 m de ancho y lo llena con la arena recibida, ¿alcanzará la altura sugerida por la educadora?

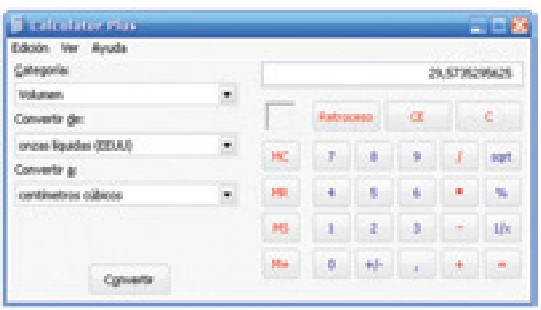
c) ¿Cuál debe ser la superficie del cajón para que la arena quede a buena altura?

d) Si le donaran el doble de arena, ¿podrían llenar un cajón construido con el doble de largo y el doble de ancho?

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

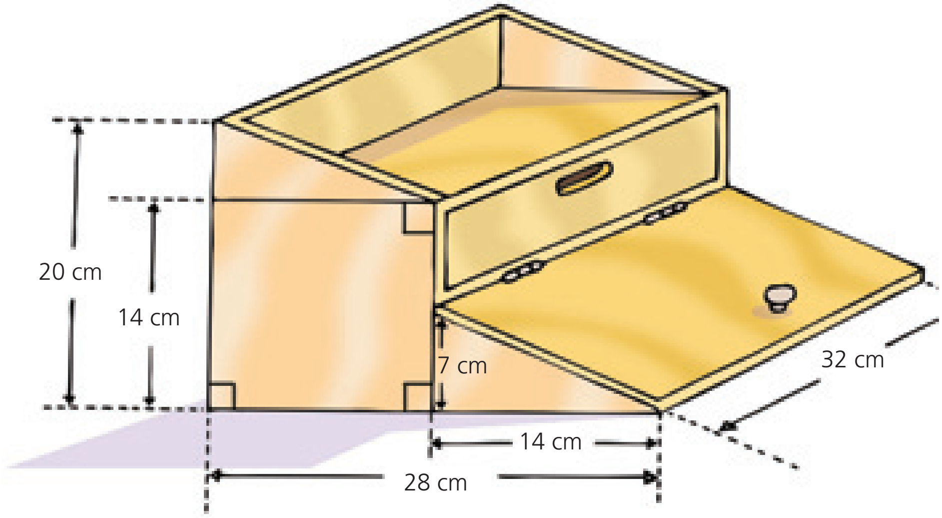
Además del metro, centímetro y milímetro cúbico, existen otras unidades de medida de volumen. Por ejemplo, en los países anglosajones se usan los galones y onzas líquidas, entre otras unidades. Para determinar a cuántos centímetros cúbicos corresponde, por ejemplo, una onza líquida se utilizan los factores de conversión. La calculadora que se puede descargar al computador desde Internet, llamada calculator plus, permite calcularlo directamente, aunque no conozcamos estos factores.

Para usar el conversor de unidades de la calculadora, en "Ver" se debe escoger "Conversión". Luego, en "Categoría", se escoge Volumen, en "Convertir de" se escoge la unidad en la que está expresado el volumen, y en "Convertir a" se escoge la unidad en que necesitamos que se exprese el volumen. Se anota la cantidad y luego se hace clic en "Convertir". En la imagen se convirtió una onza líquida a centímetros cúbicos.



Volumen de cuerpos que se pueden descomponer en prismas rectos de base rectangular y triangular

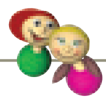
Martín y Javiera construyeron un mueble de madera, observa cómo les quedó.



PARA DISCUTIR

- ¿Cómo se puede calcular el volumen de este cuerpo geométrico?
- Martín dice que para construirlo, primero armaron un paralelepípedo y luego dos prismas de base triangular. Considerando esto, ¿cuánto es su volumen?, ¿cómo lo calculaste?

EN EQUIPO

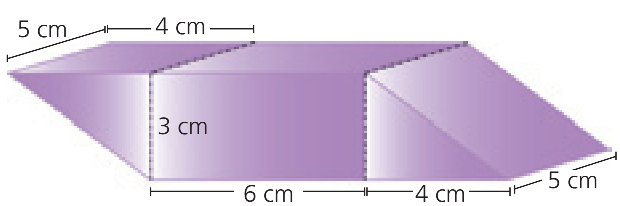


Materiales:
- Plasticina
- Hilo
- Regla

En esta actividad, verificarás que el volumen de un cuerpo es igual a la suma de los volúmenes de los cuerpos en los que se puede descomponer.

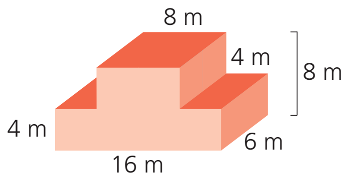
Formen parejas y sigan las instrucciones.

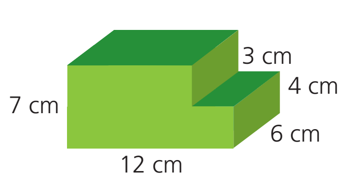
1. Cada uno modele con plasticina el cuerpo que se representa en la figura con las medidas indicadas.
2. Con el hilo, hagan los cortes que se muestran en la imagen.
3. Uno calcule el volumen de los tres prismas que se obtuvieron al hacer los cortes. Luego suma estos volúmenes.
4. El otro forma un prisma de base rectangular con los prismas obtenidos y luego calcula el volumen del prisma que formó.
5. Comparen los resultados obtenidos, ¿cómo son?, ¿ocurrirá siempre lo mismo?

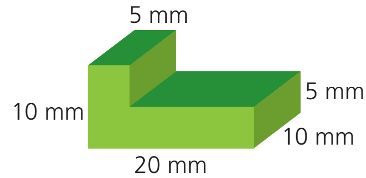


EN TU CUADERNO

1. Los siguientes cuerpos están compuestos por prismas rectos. Descomponlos para calcular su volumen.

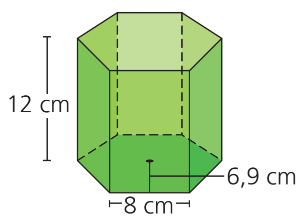


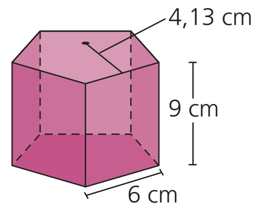




- Compara tus resultados con los de tus compañeros y compañeras.

2. Las caras basales de los siguientes prismas rectos son polígonos regulares. Descompón cada cuerpo en prismas de base triangular y calcula el volumen.





- Compara tus resultados con los de tus compañeros y compañeras.

3. El frente del granero es un rectángulo de lados 3 m de alto y 5 m de ancho, y el sector del techo es un triángulo de 4 m de altura. Si toda la construcción tiene 12 m de largo, ¿cuál es el volumen del granero?

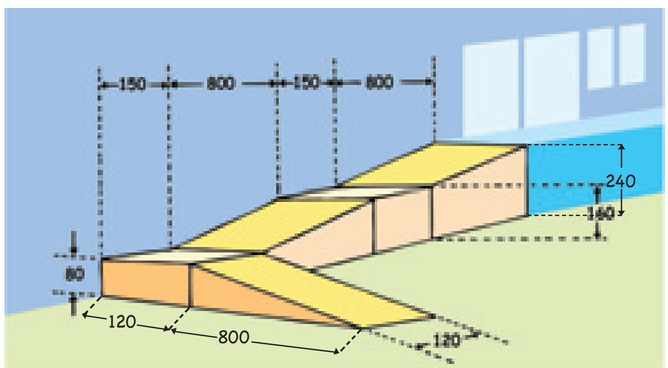
NO OLVIDES QUE

- El volumen de un cuerpo que se puede descomponer en prismas de base rectangular y triangular se puede obtener calculando el volumen de cada uno de los prismas en los que se descompuso el cuerpo y luego sumarlos.

MI PROGRESO

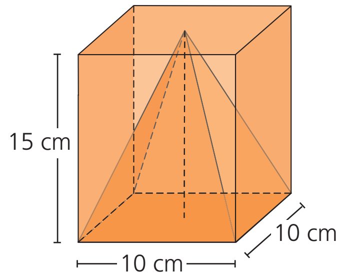
En una universidad se desea construir una rampa de acceso para personas con discapacidades físicas. El arquitecto explicó que por la altura que debía alcanzar, la rampa debe construirse en dos tramos. Observa las dimensiones de la rampa en centímetros.

1. Calcula el volumen del prisma triangular del primer tramo inclinado.
2. Planifica cómo desglosar la rampa en prismas de base rectangular y/o triangular.
3. Calcula el volumen total de la rampa.



Volumen de pirámides

Marcela tiene un juguete con forma de pirámide, cuya altura mide 15 cm y su base es de forma cuadrada de 10 cm de lado. Si lo guarda en una caja como se ve en la imagen, la altura del juguete es igual a la altura de la caja.



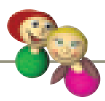
PARA DISCUTIR

- ¿Cuál es el volumen de la caja?, ¿cómo lo calculaste?
- ¿Cómo podrías calcular el volumen del juguete con forma de pirámide?
- ¿El volumen del juguete crees que será menor o mayor que la mitad que el volumen de la caja?, ¿por qué?

Para encontrar una fórmula general que nos permita calcular el volumen de una pirámide, observa que, en este caso, se puede formar un prisma que contiene a la pirámide.
El volumen de la pirámide es equivalente a la tercera parte del volumen del prisma. Es decir:

$$V = \frac{10 \cdot 10 \cdot 15}{3} = 500 \text{ cm}^3$$

EN EQUIPO



Materiales:
- Cartón o cartulina
- Regla.
- Tijeras.
- Arena.
- 3 bolsas o recipientes iguales.

En esta actividad podrán comprobar que el volumen de una pirámide es un tercio del volumen de un prisma que tiene la misma altura y base que la pirámide. Formen grupos de 3 integrantes y sigan las instrucciones:

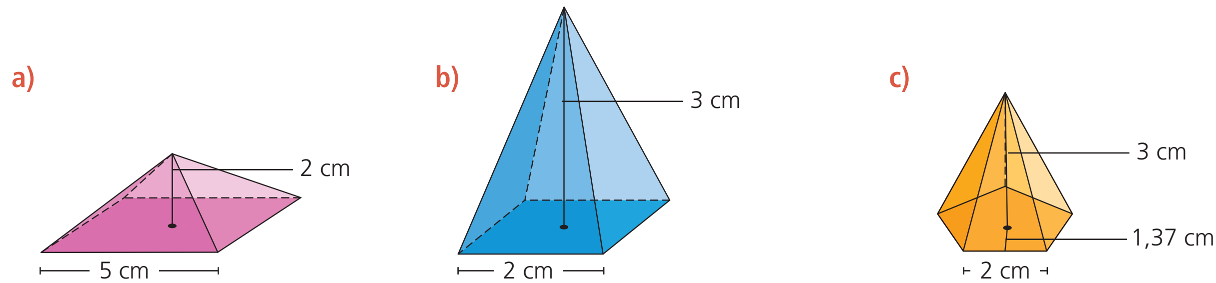
1. Construyan con cartulina un prisma y una pirámide cuyas de alturas y bases de iguales medidas. Dejen un agujero en la parte superior de cada uno para que los puedan llenar con arena.
2. Llenen con arena el prisma.
3. Saquen la arena con que llenaron el prisma y repártanlas en las tres bolsas o recipientes en partes iguales.
4. Echen la arena de una bolsa o recipiente en la pirámide. ¿Qué ocurre?

NO OLVIDES QUE

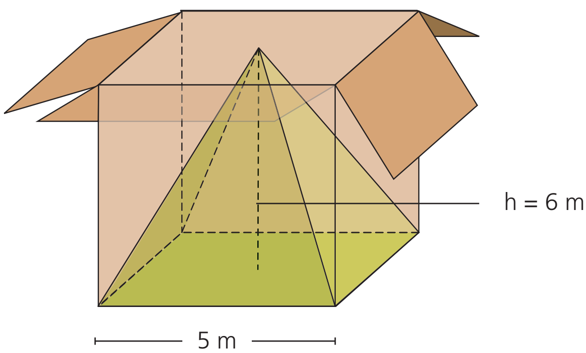
- Recuerda que el **área total** de una pirámide está dada por la suma de las áreas de cada una de sus caras.
  El **volumen** de la pirámide está dado por: $V = \dfrac{\text{área de la base} \cdot \text{altura}}{3}$

EN TU CUADERNO

1. ¿Cuál de las siguientes pirámides de bases regulares tiene mayor volumen? Justifica.



2. En la siguiente caja de base cuadrada se ha introducido una pirámide. ¿Cuántos litros de agua podrían caber entre la caja y la pirámide?

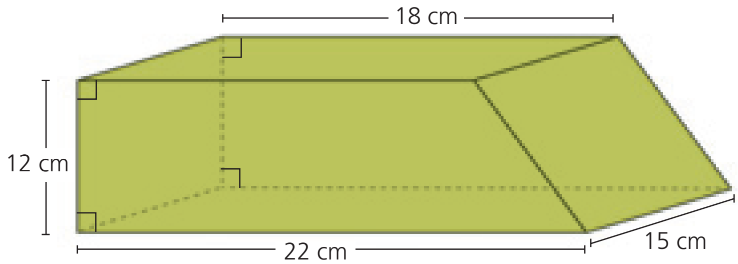


3. La pirámide de Keops, la mayor pirámide construida en Egipto, tiene base cuadrada cuyos lados miden 230,36 m, su altura es de 146,59 m y la apotema lateral (altura de las caras laterales) mide 186,43 m. ¿Cuál es su volumen?

4. Una pirámide recta tiene de altura 12 cm. Si la base de la pirámide es un cuadrado de lado 5 cm.

a) Calcula el volumen de la pirámide.
b) ¿Cuántas aristas tiene la pirámide?
c) ¿Cuántos vértices tiene?
d) Si la altura de la pirámide se reduce a la mitad, ¿qué ocurre con su volumen?
e) Si el lado del cuadrado de la base aumenta al doble, ¿qué ocurre con su volumen?

Camila necesita calcular el volumen del siguiente cuerpo. Observa el dibujo. ¿Cómo puede Camila calcular el volumen?



Comprender

- ¿Qué sabes del problema?
  El cuerpo tiene solo dos caras paralelas e iguales y las demás son todas distintas, su altura mide 15 cm. Luego, el volumen de este cuerpo se calcula multiplicando el área del trapecio, que es la base de este cuerpo, por la longitud de su altura. La altura del trapecio es de 12 cm y sus bases miden 22 cm y 18 cm.

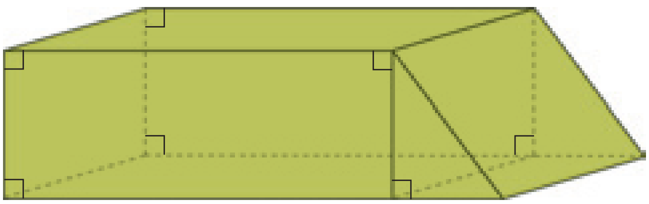
- ¿Qué debes encontrar?
  El volumen del cuerpo.

Planificar

- ¿Cómo resolver el problema?
  Una posible solución es imaginar que se corta el trapecio en dos figuras: un rectángulo y un triángulo rectángulo.

Resolver

- Este cuerpo geométrico se divide en dos cuerpos: un prisma de base rectangular y un prisma de base triangular.



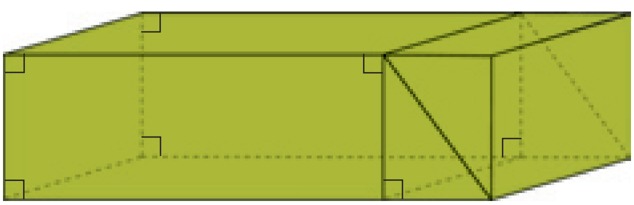
  El volumen del prisma de base rectangular es $12 \cdot 18 \cdot 15 = 3240$ cm^3

  El volumen del prisma de base triangular es $\frac{12 \cdot 4}{2} \cdot 15 = 360$ cm^3

  Luego, el volumen del cuerpo original es $3240 + 360 = 3600$ cm^3

Revisar

- Para comprobar el resultado puedes desarrollar el problema imaginando un prisma de base rectangular mayor al que se le quita un prisma de base triangular.



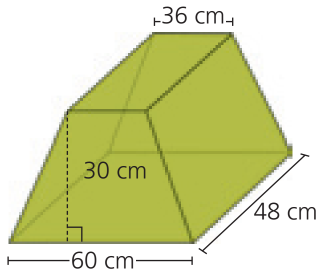
  El volumen del prisma de base rectangular es $12 \cdot 22 \cdot 15 = 3960$ cm^3

  El volumen del prisma de base triangular es $\frac{12 \cdot 4}{2} \cdot 15 = 360$ cm^3

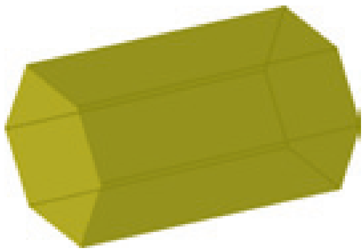
  Luego, El volumen del prisma es $3960 - 360 = 3600$ cm^3

1. Calcula los siguientes volúmenes, aplicando la estrategia de la página anterior.

a) El trapecio de la base es isósceles.



b) El hexágono es regular, de lado 8 cm y 21 cm de altura del prisma.



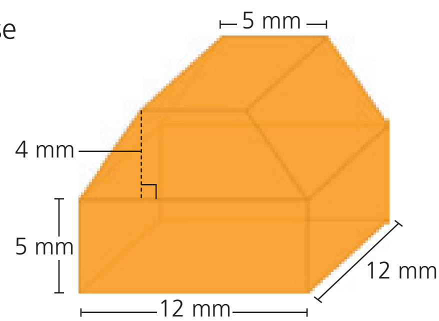
Ayuda

En un triángulo equilátero de lado **a**, el área aproximada es 0,433 a^2.

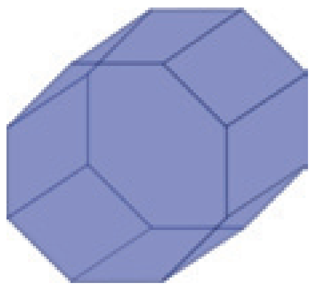
2. Ahora resuelve el problema de la página anterior utilizando otra estrategia de resolución. Explica, paso a paso, cómo lo resolviste y compara tu estrategia con las usadas por tus compañeros y compañeras.

3. Calcula los siguientes volúmenes utilizando la estrategia que tú quieras. Compara el procedimiento que utilizaste con el de algún compañero o compañera. ¿Cuál es más simple?, ¿por qué?

a) El trapecio de la base es isósceles.



b) El octágono es regular, de lado 10 cm y 7 cm de altura del prisma.



Ayuda

Si la diagonal de un cuadrado mide 10 cm, su lado mide aproximadamente 7,07 cm.

INTERNACIONAL

La fortaleza de Superman, pero en México

En abril de 2000 encontraron en México una caverna con cristales que tienen hasta doce metros de largo y hasta el momento, son los cristales aislados más grandes del mundo.
Esta caverna con columnas de más de un metro de perímetro y hasta 15 metros en longitud y filas superpuestas de formaciones cristalinas con forma de diente de tiburón, que alcanzan hasta un metro de alto, recuerda a la fortaleza de Superman.
El mismo año se descubrió otra caverna adyacente más grande que la primera, que es la única que está abierta bajo visita restringida para el público, solo para científicos, geólogos, mineralogistas o cualquier persona que tiene interés en la admiración de los maravillosos cristales sin dañarlos.


Gentileza Richard Fisher

Fuente: http://www.neoteo.com/la-fortaleza-de-superman-pero-en-mexico.neo (consultado en abril de 2008, adaptación).

Formen grupos de 3 integrantes y desarrollen las siguientes actividades.

1. **Suponiendo que su base es cuadrada, calculen qué volumen tiene uno de los cristales descritos en la noticia.**
2. **Midan el largo, ancho y altura de su sala de clases y calculen su volumen. Expliquen el procedimiento que usaron para calcularlo.**
3. **Si la primera caverna tiene aproximadamente 20 m de largo, 10 m de ancho y 8 m de altura, ¿cuántas veces cabría su sala de clases en esta caverna?, ¿cómo lo supieron?**
4. **Seleccionen en su barrio una construcción que tenga forma similar a un prisma recto, ya sea de base rectangular, triangular, o incluso que se pueda descomponer en prismas de ese tipo. Comparen el volumen de la construcción que escogieron con el volumen de su sala de clases, ¿cuántas salas cabrían en esa construcción?**

EVALUAMOS NUESTRO TRABAJO

1. **Cada uno complete en su cuaderno la siguiente tabla escribiendo Sí, A veces y No, según corresponda. Luego, comparen y comenten sus respuestas.**

	Integrante 1	Integrante 2	Integrante 3
Respeté las opiniones de los demás integrantes.			
Cumplí con las tareas que me comprometí.			
Hice aportes interesantes para desarrollar el trabajo.			

2. **Comenten y respondan: ¿en qué podrían mejorar para el próximo trabajo en equipo?**

A continuación, se presentan algunos de los conceptos fundamentales de la unidad. Haz un listado con los conceptos que faltan y construye un mapa conceptual que los organice y relacione.

Volumen

Unidades de medida

Capacidad

Pirámides

Prismas rectos

Utilizando los contenidos aprendidos en la unidad y apoyándote en el esquema anterior, responde en tu cuaderno.

1. ¿Cómo explicarías qué es el volumen de un cuerpo?
2. ¿En qué se diferencian volumen y capacidad?
3. ¿Qué fórmula te permite calcular el volumen de un prisma recto de base rectangular?, ¿y uno de base triangular?
4. ¿Qué fórmula te permite calcular el volumen de una pirámide?
5. ¿Qué unidades de medida de volumen conoces?
6. ¿Qué operación realizas para transformar una 1 m^3 a centímetro cúbico?, ¿y 1 mm^3 a metro cúbico?
7. ¿Cuál es la ventaja de usar la unidad de medida adecuada a las dimensiones del objeto para expresar su volumen?
8. Comenta tus respuestas con tus compañeros y compañeras, y aclara tus dudas.

¿QUÉ APRENDÍ?

Marca, en tu cuaderno, la alternativa correcta en las preguntas 1 a la 9.

1. ¿Cuál de estos cuerpos geométricos no es un poliedro?

A. cubo.
B. prisma de base triangular.
C. cilindro.
D. pirámide.

2. Un prisma siempre tiene:

A. solo dos caras laterales.
B. solo dos caras basales.
C. solo dos aristas laterales.
D. solo dos aristas basales.

3. Un prisma de base triangular tiene en total:

A. tres caras.
B. cuatro caras.
C. cinco caras.
D. seis caras.

4. La unidad de medida pertinente para el volumen de un refrigerador es:

A. Metros cúbicos.
B. Centímetros cúbicos.
C. Milímetros cúbicos.
D. Decímetros cúbicos.

5. 340 000 cm^3 es equivalente a:

A. 3,4 m^3
B. 0,34 m^3
C. 34 000 000 mm^3
D. 340 m^3

6. Una piscina tiene forma de prisma de base rectangular de 24 m de largo, 12 m de ancho y 240 cm de profundidad. ¿Cuántos litros de agua son necesarios para llenarla?

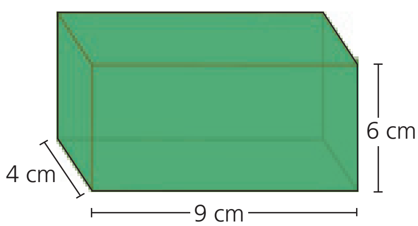
A. 691 200 litros
B. 691 200 000 litros
C. 345 600 litros
D. 345 600 000 litros

7. Si un prisma de base rectangular es tal que sus dimensiones son cada una el doble de las de otro prisma de base rectangular, su volumen es:

A. el doble del otro prisma.
B. la mitad del otro prisma.
C. el cuádruple del otro prisma.
D. el óctuple del otro prisma.

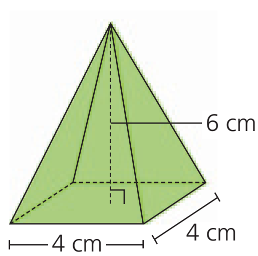
8. El volumen del siguiente prisma de base rectangular es:

A. 432 cm^3
B. 216 cm^3
C. 108 cm^3
D. 72 cm^3



9. El volumen de la siguiente pirámide de base cuadrada es:

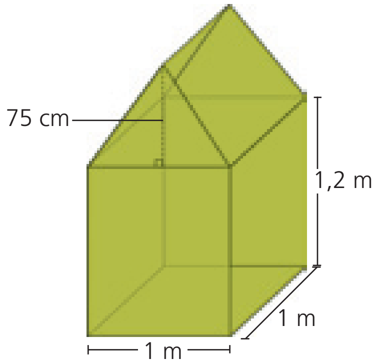
A. 16 cm^3
B. 30 cm^3
C. 32 cm^3
D. 48 cm^3



10. **Tamara está preparando una caja de arena para su gato Teo. Si la caja mide 80 cm de largo y 60 cm de ancho, y ella estima que la arena tiene que alcanzar una altura de 12 cm, ¿cuánta arena debe conseguir Tamara?**

11. **Guillermo está diseñando un nuevo envase para vender bombones. Tiene forma de prisma de base triangular, y ahora está decidiendo qué tamaño es el mejor. Uno tiene 425 cm^2 de área en su cara basal y 0,25 m de altura. El otro tiene como base un triángulo rectángulo de catetos iguales de 12 cm, y altura 185 mm. ¿Cuál de los dos tiene mayor volumen?**

12. **Calcula el volumen de la casa de la perrita Kika, según las medidas que se señalan en el dibujo.**



Compara tus respuestas en tu curso. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.

¿QUÉ LOGRÉ?

1. **Marca según tu apreciación.**	**No lo entendí**	**Lo entendí**	**Puedo explicarlo**
Prismas rectos.			
Volumen: unidades de medida.			
Volumen de prismas rectos de base rectangular.			
Volumen de prismas rectos de base triangular.			
Volumen de cuerpos que se pueden descomponer en prismas rectos de base rectangular y triangular.			
Resolución de problemas.			

2. **Reflexiona y aprende.**

a) ¿Qué dificultades tuviste en la unidad?, ¿cómo las superaste?
b) ¿Qué te gustó de lo que aprendiste en la unidad?, ¿por qué?
c) Vuelve a la página 138 y revisa el recuadro "En esta unidad podrás...", ¿crees que lograste aprender todo lo que se esperaba? Explica.

UNIDAD

7

Datos y azar

EN ESTA UNIDAD PODRÁS...

- Interpretar y comunicar información presentada en tablas y gráficos.
- Determinar el tipo de gráfico más adecuado a las características de los datos que interesa graficar.
- Reconocer los gráficos de barras, histogramas, pictogramas, y gráficos circulares.
- Construir tablas de datos y sus gráficos correspondientes.
- Determinar la frecuencia relativa de una categoría respecto del total de datos.
- Utilizar la frecuencia relativa como medida de la probabilidad de un evento aleatorio.

CONVERSEMOS DE...

El consumo de alimentos con alto contenido en grasas y azúcares y el aumento del sedentarismo, en las últimas décadas, ha producido importantes alteraciones en la salud de la población chilena, afectando incluso a niños y niñas. El estilo de vida que ellos llevan también ha cambiado mucho, la mayoría de sus actividades las realizan en torno a la televisión, el computador y los videojuegos. Si esto no se regula y se combina con deportes o actividad física, pueden convertirse en niños o niñas obesos.

Según tu experiencia, comenta y responde.

1. ¿Cuáles son los mayores factores de la obesidad en Chile?
2. ¿Cuál de las condicionantes del sedentarismo en Chile te parece que es la responsable de más casos de obesidad?
3. ¿Cuántas horas semanales dedicas a ver televisión, estar en el computador o jugar en un videojuego?, ¿y cuántas a practicar algún deporte?

Ahora trabaja en tu hipertexto

Recuerda lo que aprendiste en años anteriores y resuelve los ejercicios en tu cuaderno.

1. Simplifica las siguientes fracciones de modo que la fracción sea irreductible.

a) $\frac{45}{50}$

b) $\frac{22}{88}$

c) $\frac{36}{68}$

d) $\frac{27}{192}$

e) $\frac{65}{78}$

f) $\frac{32}{128}$

g) $\frac{25}{75}$

h) $\frac{90}{99}$

2. Determina a qué porcentaje corresponden las siguientes fracciones.

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{4}{12}$

d) $\frac{5}{60}$

e) $\frac{3}{5}$

f) $\frac{5}{8}$

g) $\frac{18}{27}$

h) $\frac{15}{75}$

3. Determina a qué fracción corresponden los siguientes porcentajes.

a) 40%

b) 35%

c) 75%

d) 84%

e) 16%

f) 50%

g) 2%

h) 90%

4. Expresa como fracción las siguientes relaciones entre cantidades.

a) 5 manzanas de un cajón de 25 manzanas.

b) 10 chocolates de una bolsa con 100 chocolates.

c) 16 bolitas de una colección de 60 bolitas.

d) 1 limón de un cajón de 100 limones.

e) 5 huevos de una bandeja de 12 huevos.

f) Medio kilogramo de harina de un paquete de 5 kilogramos.

g) 82 monedas de una alcancía con 82 monedas.

h) 6 años de un joven de 18 años.

5. Expresa como porcentaje las siguientes relaciones entre cantidades.

a) 10 naranjas de una bolsa con 20 naranjas.

b) 4 libros de un estante con 32 libros.

c) 125 g de una bolsa de 1 kilogramo de azúcar.

d) 24 personas de un grupo de 40 personas.

e) 14 láminas de un álbum con 70 láminas.

f) Ningún día nublado de una semana.

g) 28 dominós de un juego con 28 dominós.

Compara tus respuestas en tu curso. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.

¿QUÉ DEBES RECORDAR?

- Las fracciones equivalentes son aquellas que representan el mismo valor numérico, aunque los valores de sus numeradores y denominadores sean distintos.
  Por ejemplo: $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$ son fracciones equivalentes.

- Para determinar si dos fracciones son equivalentes, se puede multiplicar "cruzado" y confirmar que se obtiene una igualdad.

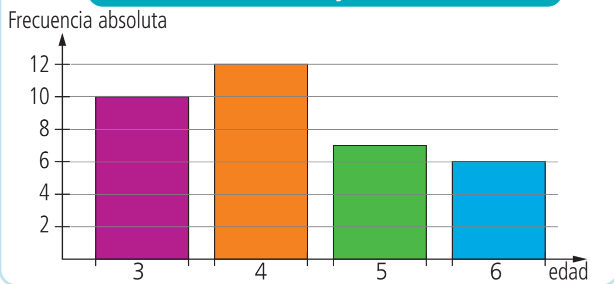
$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \longrightarrow \mathbf{a \cdot d = c \cdot d}$$

Por ejemplo: $\frac{3}{6} = \frac{6}{12} \longrightarrow \underbrace{3 \cdot 12}_{36} = \underbrace{6 \cdot 6}_{36}$

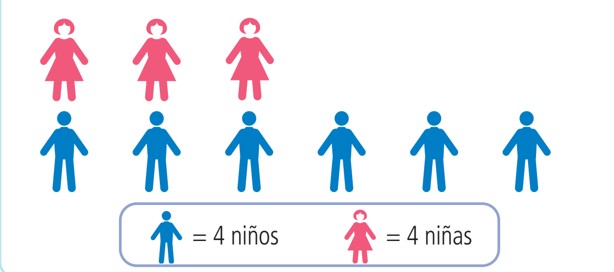
Tablas y gráficos

Valeria pasó el último fin de semana haciendo una tarea que consistía en averiguar el sexo y las edades de los niños y niñas que viven en su edificio. La información que obtuvo la representó de distintas maneras. Observa.

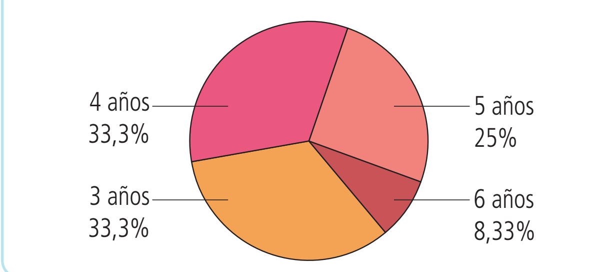
1 Edades de los niños y niñas del edificio



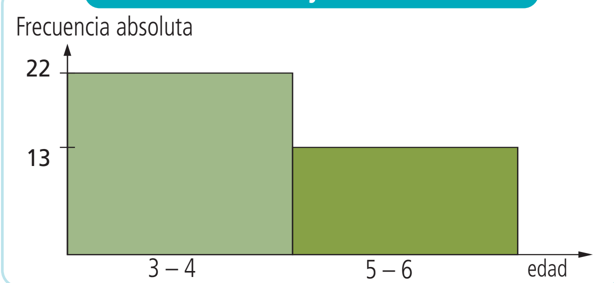
2 Sexo de los niños y niñas del edificio



3 Edades de las niñas del edificio



4 Edad de los niños y niñas del edificio



PARA DISCUTIR

- El primer gráfico se llama **gráfico de barras,** ¿cómo lo describirías?
- Según el gráfico de barras, ¿cuántos niños y niñas de 5 años viven en el edificio?, ¿cuántos niños y niñas viven en el edificio?, ¿cómo lo supiste?
- El segundo gráfico recibe el nombre de **pictograma,** ¿cómo lo describirías?, ¿qué información te entrega?, ¿es algo que ya sabías al ver el primer gráfico?
- El tercer gráfico se llama **gráfico circular,** ¿cómo lo describirías? Respecto de los gráficos anteriores, ¿agrega nueva información?, ¿es más fácil de entender? Justifica.
- Observando solo el gráfico circular, ¿puedes determinar el total de niños y niñas que viven en el edificio?
- El último gráfico se llama **histograma,** ¿cómo lo describirías?, ¿cuál es la diferencia en relación al gráfico de barras?, ¿es más útil respecto de lo que informa? Justifica.
- Si Valeria decidiera utilizar solo uno de estos gráficos para su tarea, ¿cuál le recomendarías tú?, ¿por qué?

Los gráficos se utilizan para ilustrar y presentar un conjunto de datos relacionados entre sí, de manera que se facilite su comprensión, comparación y análisis. Según las características y la cantidad de datos, conviene utilizar uno u otro gráfico.
Por ejemplo, los gráficos circulares no se recomiendan cuando las variables tienen muchos valores posibles. Imagina un gráfico circular que presente la población mundial, pero desglosada por cada país. Como son tantos países, en muchos casos el sector circular correspondiente no sería más que una línea.

NO OLVIDES QUE

- Se llama **frecuencia** al número de veces que se repite cierto valor de una variable. También se le dice frecuencia absoluta.
- Un **gráfico de barras** está compuesto por barras separadas, donde la altura de cada barra es proporcional a la frecuencia. Sirve para comparar las frecuencias de los valores.
- En un **pictograma,** en lugar de las barras, se dibuja una figura proporcional (por su tamaño o bien por su cantidad) a la frecuencia. Se recomienda cuando la variable que se estudia es una cualidad, por ejemplo el sexo de una persona.
- En un **gráfico circular,** un círculo está dividido en sectores circulares proporcionales a la frecuencia que se quiere dar a conocer. Es útil cuando se necesita representar porcentajes.
- Un **histograma** es un gráfico formado por barras contiguas, donde cada una representa un intervalo de valores, sirve para expresar información sobre datos que están agrupados.

EN TU CUADERNO

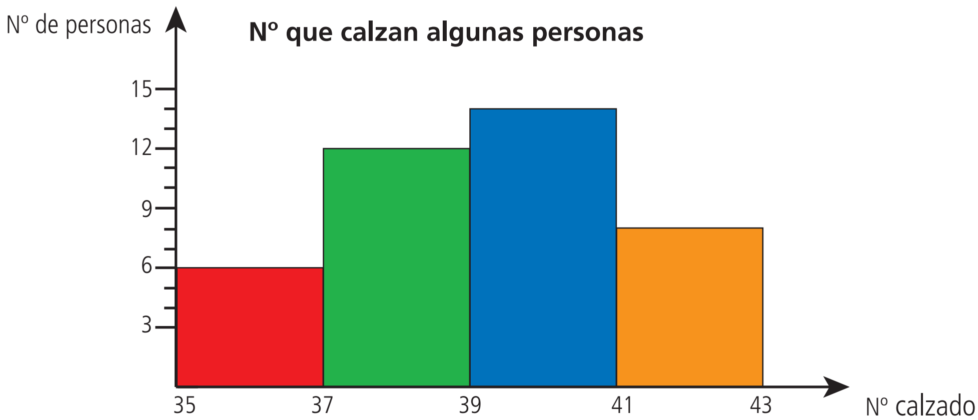
1. Determina qué tipo de gráficos realizarías para representar cada una de las siguientes situaciones y explica en cada caso tu elección.

a) El porcentaje de computadores vendidos durante los últimos 10 años.
b) Las comidas preferidas por un grupo de personas.
c) El número de aviones que salen de un aeropuerto entre las 7:00 y 21:00 horas.
d) El número de asistentes a las salas de cine de las películas que están en cartelera.
e) El porcentaje de nacimientos en un hospital, entre enero y julio.
f) Distribución de la población chilena, según edad, en intervalos de 5 años y según sexo.

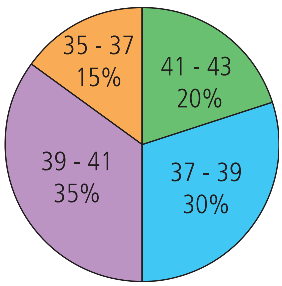
2. Piensa, comenta y responde:

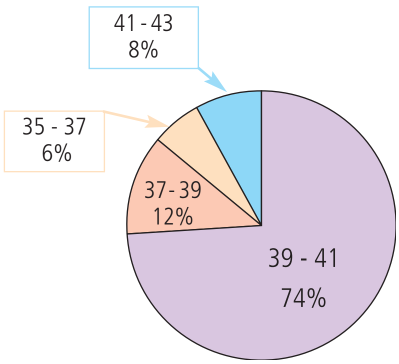
a) ¿Qué opinas sobre el uso de tablas para organizar la información?
b) ¿Para qué sirven los gráficos?
c) ¿En qué se parece un gráfico de barras a un histograma?, ¿y en qué se diferencian?
d) ¿Qué ventajas tiene un pictograma respecto de un gráfico de barras?, ¿y qué desventajas?
e) ¿Cuándo es útil representar la información en un gráfico circular?

3. El siguiente gráfico muestra cuánto calzan algunas personas.



a) ¿Qué nombre recibe este tipo de gráfico?
b) ¿Cuántas personas fueron consultadas en total?
c) ¿Cuál de los siguientes gráficos muestra de mejor manera la información del histograma? Explica.





4. Observa la siguiente tabla que representa las preferencias en la forma de vestir de 40 niñas.

a) ¿Qué gráfico sería más adecuado para representar el porcentaje de niñas que prefiere cada prenda?, ¿por qué? Constrúyelo.
b) ¿Cuántas niñas dijeron que prefieren usar faldas?, ¿y cuántas prefieren usar pantalones?
c) Construye un gráfico de barras con las preferencias de las niñas.

Prenda	Porcentaje
Falda	30%
Pantalón	50%
Vestido	20%

5. La cantidad de veces que los estudiantes de un séptimo básico han ido al estadio a ver a su equipo de fútbol favorito, se muestra en la siguiente tabla:

a) ¿Qué será más apropiado en este caso para representar la información: un gráfico de barras o un histograma?, ¿por qué? Grafica de acuerdo a tu elección.
b) Construye un gráfico circular que represente esta misma información.
c) ¿Qué información puedes desprender de los gráficos construidos?

Nº de veces	Nº de estudiantes
0 - 5	3
5 - 10	16
10 - 15	24
15 - 20	5

HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

En esta actividad te invitamos a utilizar una planilla de cálculo, como Excel, para presentar los resultados de una encuesta y analizarlos estadísticamente. Ingresa los datos en las celdas o casilleros correspondientes y usa la tecla  para graficar la información.

Practica siguiendo las instrucciones.

1. Ingresa los datos en las celdas, ordenados en columnas, tal como están en la tabla.
2. Selecciona todos los datos que quieras graficar.
3. Haz clic en el botón "Asistente para gráficos".
4. En el paso 1, escoge qué tipo de gráfico necesitas, en cada categoría hay varios modelos distintos.
5. En el paso 2, confirma cuáles son los datos que se van a graficar, tanto en los niveles de la variable como si se quieren comparar varios datos relacionados con la misma variable.
6. En el paso 3, completa los títulos, rótulos de datos, leyenda del gráfico y otras especificaciones, como los ejes y líneas de división.
7. Finalmente, en el paso 4, indica si el gráfico lo vas a ubicar en una hoja nueva o no.

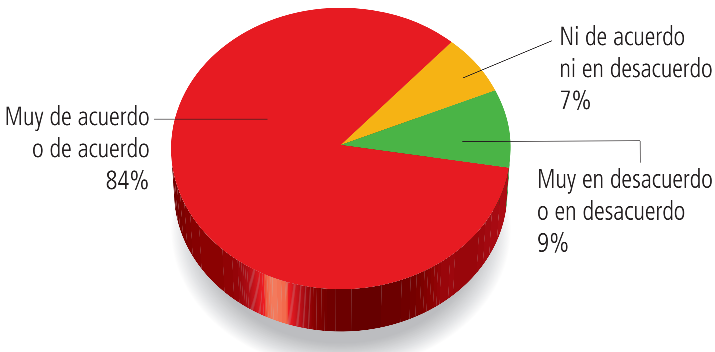
Disponibilidad de agua (en miles de m^3) por persona, años 1950 y 2000

	1950	2000
África	17,8	4,8
Asia	31,7	17,7
Europa	5,9	4,5
América	104,5	40,4
Oceanía	159,5	65,6

Fuente: Food and Agriculture, Organization of the United Nations (FAO), www.fao.org, consultado en febrero de 2010.

MI PROGRESO

El siguiente gráfico representa las respuestas de una encuesta en que se preguntó: ¿Cuán de acuerdo está usted con la siguiente afirmación: "ambos, el hombre y la mujer, deben contribuir al ingreso familiar"?



Fuente: CEP, Encuesta Nacional de Opinión Pública, diciembre 2002.

1. Si 135 personas contestaron "Muy en desacuerdo o en desacuerdo", ¿cuántas personas en total contestaron la encuesta?, ¿cómo lo supiste?
2. ¿Cuántas dijeron estar "Ni de acuerdo ni en desacuerdo"?
3. Ordena la información en una tabla de frecuencias.
4. Si ahora quisiéramos graficar las frecuencias absolutas de cada alternativa, ¿cuál es el gráfico más adecuado? Dibújalo.

Frecuencia relativa

Paulina registró en la siguiente tabla los resultados que obtuvo al lanzar 24 veces un dado.

Número obtenido	Frecuencia absoluta
1	6
2	3
3	3
4	3
5	5
6	4

Ayuda

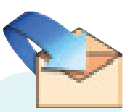
Recuerda que la frecuencia absoluta de un evento es el número de veces que ocurre dicho evento, cuando se repite un experimento aleatorio n veces.

Luego, comparó la cantidad de veces que obtuvo 4 respecto del total de lanzamientos y obtuvo lo siguiente:

$$\frac{\text{Número de veces que se obtuvo 4}}{\text{Número de veces que se lanzó el dado}} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8}$$

PARA DISCUTIR

- ¿Qué número del dado salió una mayor cantidad de veces en los lanzamientos que hizo Paulina?
- ¿Qué significado tiene la razón $\frac{1}{8}$ en el contexto de la situación?, ¿a qué porcentaje corresponde esta razón?
- ¿Qué razón obtienes al comparar la cantidad de veces que obtuvo 1 respecto del total de lanzamientos?, ¿y la cantidad de veces que obtuvo 5?, ¿y las que obtuvo 6?
- ¿Qué significan las razones obtenidas en el contexto del problema?
- Si sumas las frecuencias absolutas, ¿qué valor obtienes?, ¿qué indica este valor?
- Agrega a la tabla una columna con las razones que obtienes al comparar la cantidad de veces que se obtuvo cada número del dado con el total de lanzamientos. ¿Cuál es el valor de cada razón?, ¿qué resultado obtienes al sumarlos?, ¿por qué crees que se obtiene ese valor?



NO OLVIDES QUE

- La frecuencia relativa de un evento es la razón entre el número de veces que se obtuvo dicho evento y el número de veces que se realizó el experimento.
- La frecuencia relativa porcentual es la frecuencia relativa de un evento expresada en porcentaje.

EN TU CUADERNO

1. La siguiente tabla muestra los colores preferidos por los alumnos y alumnas de un curso.

a) Agrega dos columnas a la tabla y complétalas con la frecuencia relativa y relativa porcentual correspondiente.
b) Suma todas las frecuencias relativas. ¿Qué resultado obtienes?
c) Suma todas las frecuencias relativas porcentuales. ¿Qué puedes concluir?

Color	Frecuencia absoluta
Amarillo	12
Verde	9
Rojo	15
Azul	6

2. La siguiente tabla muestra el área de las carreras preferidas por 40 estudiantes, pudiendo cada estudiante elegir solo un área.

Área	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
Matemática			20%
Biológica	15		
Artística			32,5%
Educativa		$\frac{4}{40}$	

a) Completa la tabla en tu cuaderno.
b) Ordena las áreas según las preferencias de los y las estudiantes.
c) ¿Cuáles son las áreas más y menos preferidas por los alumnos y alumnas?

3. La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos en el censo de 2002 sobre el número de familias chilenas según el tipo de hogar que constituyen.

a) Agrega dos columnas a la tabla y complétalas con la frecuencia relativa y relativa porcentual correspondiente.
b) ¿Cuántas familias son nucleares?, ¿y cuántas son extensas?
c) ¿Qué porcentaje de familias son nucleares con hijos?, ¿y nucleares, sin hijos?
d) Construye un gráfico circular que represente la frecuencia relativa porcentual.

	Nº de familias
Nuclear monoparental sin hijos	480 647
Nuclear monoparental con hijos	400 171
Nuclear biparental con hijos	1 548 383
Nuclear biparental sin hijos	617 757
Extensa biparental	411 164
Extensa monoparental	290 452
Compuesta	132 057
Sin núcleo familiar	260 769
Total	4 141 427

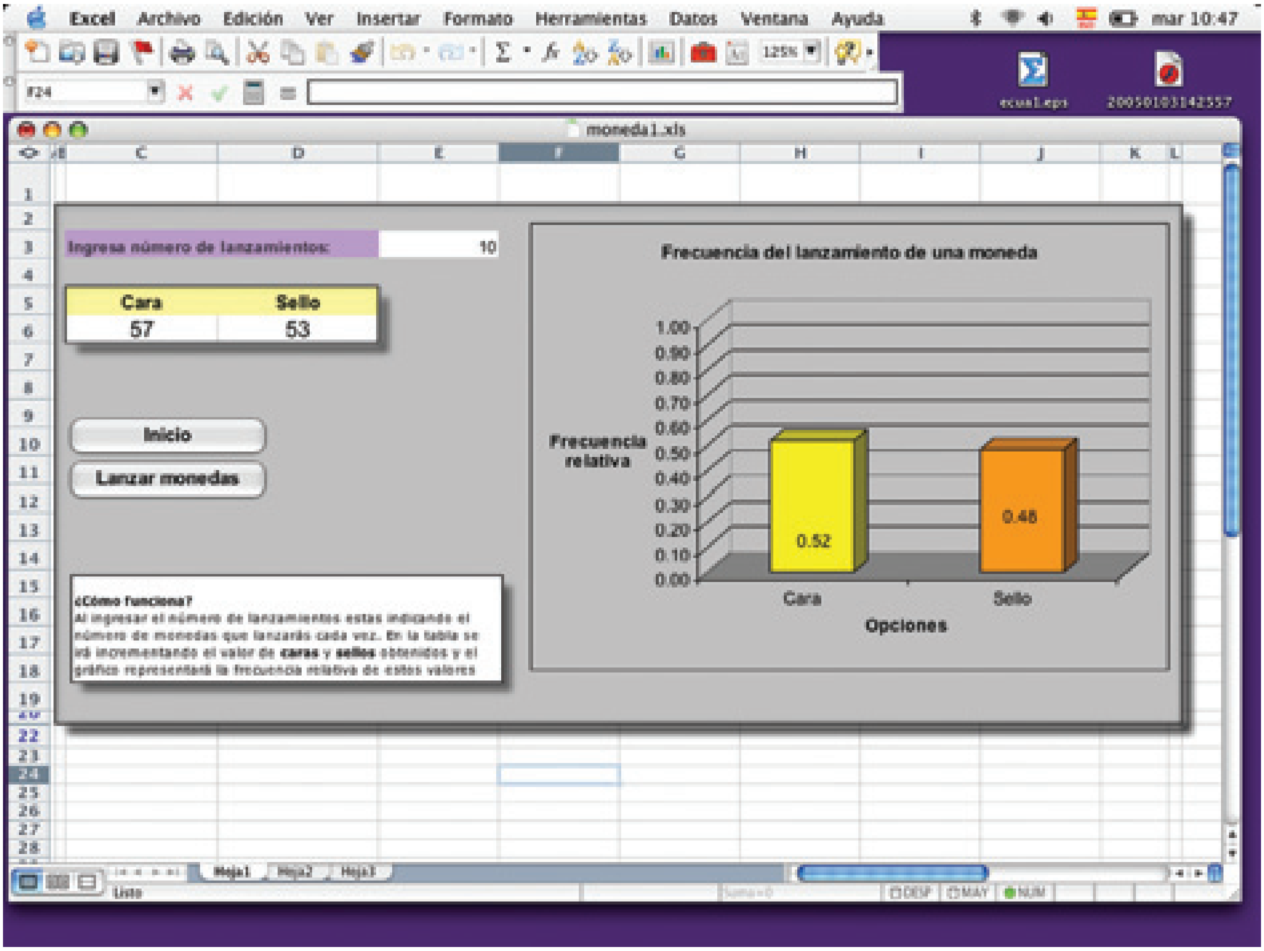
Fuente: http://www.ine.cl/canales/chile_estadistico/encuestas_trabajo_infantil/jovenes.php (consultado en abril de 2008)

NO OLVIDES QUE

- La frecuencia relativa es un número entre 0 y 1.
- La suma de las frecuencias relativas correspondientes a todos los resultados posibles es 1.

Probabilidades de eventos aleatorios

Si tienes una moneda equilibrada y la lanzas 20 veces quizás esperes obtener 10 caras y 10 sellos. Aunque realices esta experiencia varias veces es muy poco probable que obtengas la misma cantidad de sellos que de caras. Sin embargo, cuando la cantidad de repeticiones de un experimento es grande, se observan ciertas regularidades. Descarga del sitio web: www.santillana.cl/mat2/moneda.xls una hoja de cálculo para que experimentes con el lanzamiento de una moneda y observes el gráfico correspondiente.



PARA DISCUTIR

- Si realizamos 10 lanzamientos, ¿cuáles son las frecuencias relativas de obtener cara y de obtener sello?, ¿y cuándo realizamos 100 lanzamientos?
- A medida que el número de lanzamientos aumenta (sobre 500), ¿qué ocurre con las frecuencias relativas de ambos sucesos (obtener cara o sello)?
- Cuando tenemos más de 5000 lanzamientos, ¿a qué número se aproximan las frecuencias relativas de ambos sucesos?

NO OLVIDES QUE

- El número hacia el cual se aproxima la frecuencia relativa de un evento, a medida que aumenta el número de repeticiones de un mismo experimento aleatorio, se llama **probabilidad.**
- La probabilidad de que ocurra un evento en un experimento aleatorio se puede expresar como un número, entre 0 y 1, al cual las frecuencias relativas se acercan a medida que la cantidad total de repeticiones de un mismo experimento aleatorio aumenta.

EN EQUIPO

Materiales:
- Uno o más dados.

En esta actividad deberán determinar la probabilidad de que al lanzar un dado, se obtenga un número u otro. Tal como con la moneda, para determinar la probabilidad se obtiene un mejor resultado mientras más datos se utilicen. Consideren realizar al menos 300 lanzamientos distintos.

Formen grupos de 3 integrantes y sigan las instrucciones.

1. Cada uno en su cuaderno construya una tabla para registrar, por ejemplo, 50 lanzamientos del dado:

	Salió 1	Salió 2	Salió 3	Salió 4	Salió 5	Salió 6
Lanzamiento 1		X				
Lanzamiento 2					X	
...						

2. Cuando terminen, cuenten las frecuencias absolutas correspondientes a cada número del dado y anótenlo al final de la tabla.

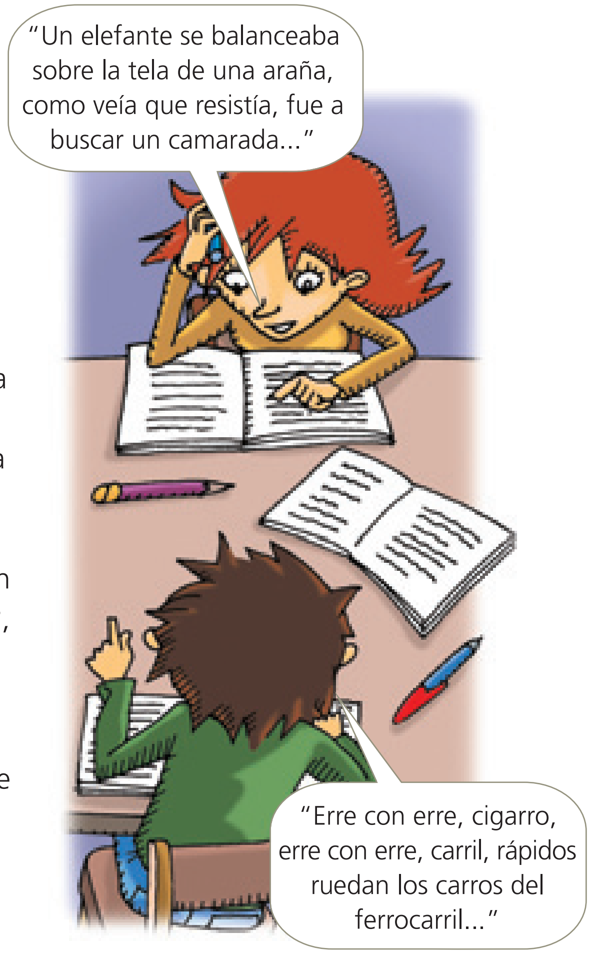
3. Ahora recopilen todos los datos del grupo en una sola tabla.

	Salió 1	Salió 2	Salió 3	Salió 4	Salió 5	Salió 6
Integrante 1	10	7	6	9	10	8
Integrante 2						
...						

4. Escriban la frecuencia relativa correspondiente a cada número. ¿Qué pueden concluir?

EN TU CUADERNO

1. Martín y Andrea estaban leyendo en la biblioteca y de pronto Andrea preguntó: "¿Cuál es la letra que más se repite en un libro en español?" Martín le contestó: "La letra A"."No, yo creo que es la letra E", replicó Andrea. Y como no les gusta perder, cada una buscó un ejemplo...



a) ¿Quién crees que tiene la razón, Andrea o Martín? ¿O hay otra letra que se repita más?

b) Calcula la frecuencia relativa de las letras A y E de cada una de las frases anteriores. ¿Qué puedes concluir?

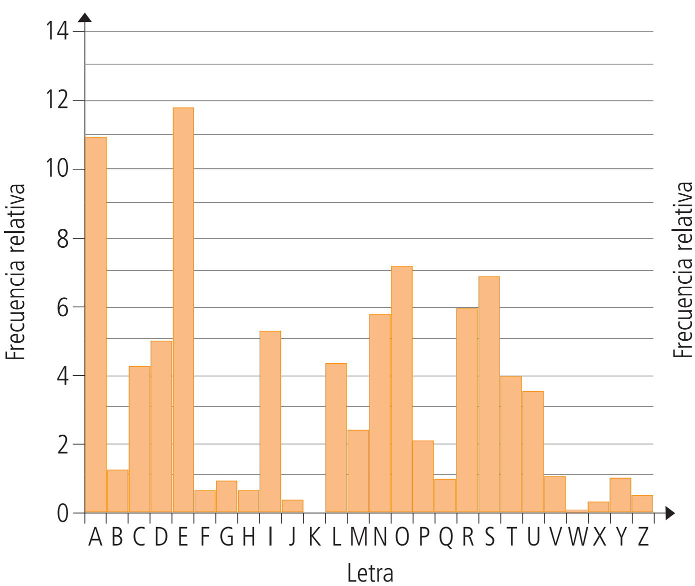
c) Calcula la frecuencia relativa de las letras B y R de cada una de las frases anteriores. ¿Qué puedes concluir?

d) Busca un cuento en tu libro de lenguaje y cuenta la frecuencia relativa de las letras A, E, B y R. ¿Se mantienen los valores que se obtuvieron con las frases anteriores?, ¿por qué?

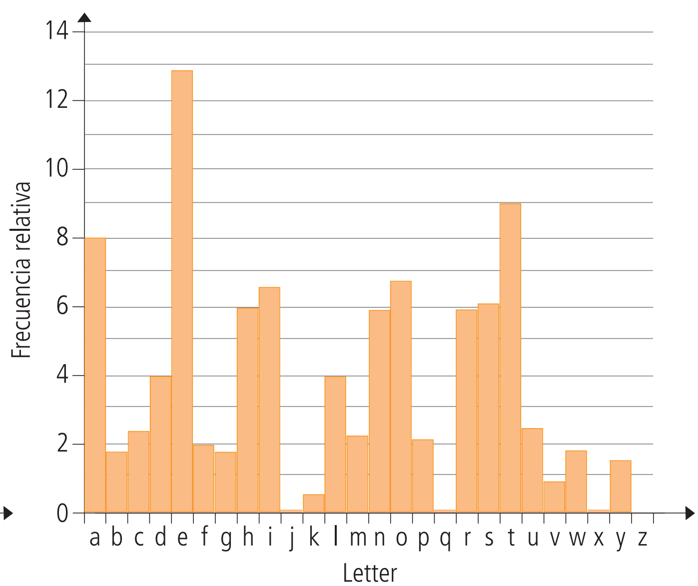
e) Si se contaran todas las letras de *El Quijote de la Mancha* y se calculara la frecuencia relativa de la A, E, B y R, ¿crees que serían parecidas a las que obtuviste con el cuento?

f) Se ha analizado la frecuencia con que se utilizan las letras en cada idioma –en inglés y en español–; los valores están expresados en los siguientes gráficos:

Frecuencia de letras en textos en español



Frecuencia de letras en textos en inglés



Observa los gráficos y determina si los valores de frecuencias relativas que calculaste se aproximan a los presentados en los gráficos.

2. Valentín y Matilde van a construir ruletas de colores como las siguientes:

Suponiendo que las ruletas están equilibradas:

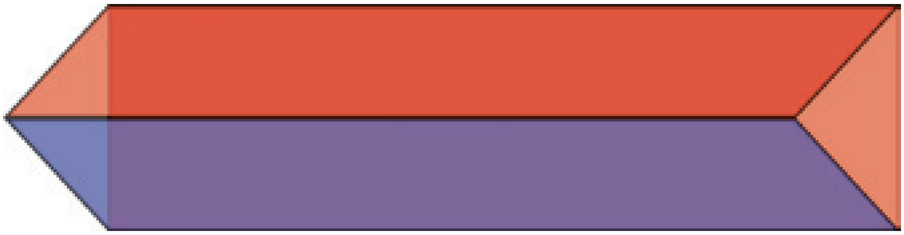
a) ¿Cuál es la probabilidad de que al girar la ruleta se detenga en rojo en cada caso?
b) ¿En cuál de las dos ruletas es mayor la probabilidad de que se detenga en azul?
c) ¿Cómo debiera pintarse la ruleta para que la probabilidad de que se detenga en cada color sea la misma?
d) ¿Cómo podría pintarse para que la probabilidad de que se detenga en el azul sea el doble que la del verde?

Dato interesante

El **análisis de frecuencias** se aplica en el **criptoanálisis**, que es el estudio de la **frecuencias de las letras** o grupos de letras en un texto cifrado. Se utiliza para descifrar mensajes.

MI PROGRESO

Sergio tiene un prisma de base triangular como el de la imagen, con dos de sus caras laterales pintadas de color rojo y la otra de azul.



Lo deja caer al suelo diez veces y registra qué cara quedó cada vez en el piso: rojo, azul, rojo, rojo, azul, azul, rojo, rojo, rojo, azul. Considerando que no puede caer sobre sus bases:

1. Construye la tabla de las frecuencias absolutas con los resultados obtenidos por Sergio.
2. Construye luego la tabla de frecuencias relativas.
3. Suponiendo que el prisma siempre cae al azar, ¿cuáles deberían ser las probabilidades de que caiga roja?, ¿y de que caiga azul?
4. Suponiendo que el prisma se dejara caer 36 000 veces, ¿cuál debiera ser la frecuencia absoluta en cada caso?

Población y muestra

La editorial Leemás está interesada en conocer acerca de los hábitos de lectura de los y las estudiantes de séptimo y octavo año básico de todo Chile, pues piensa lanzar una serie de libros el próximo verano. Esta editorial es nueva y no cuenta con muchos recursos para realizar el estudio, pero quiere que el estudio pueda indagar sobre los siguientes temas:

- Frecuencia con que los alumnos y las alumnas leen en la semana.
- ¿En qué época del año leen más?
- ¿Qué leen: diarios, libros o revistas? ¿Cómo acceden a ellos?
- Si leen libros, ¿cuántos libros leen al mes?
- ¿Qué tipo de libros leen?

PARA DISCUTIR

- ¿Cuál es la población considerada?
- ¿Es factible realizar este estudio a todos los elementos de la población?, ¿por qué?
- ¿Qué aspectos se deben tener en cuenta al realizar el estudio?
- ¿Qué características pueden hacer que se lleguen a conclusiones equivocas?

NO OLVIDES QUE

- **Población** es el conjunto de todos los individuos, objetos u observaciones que poseen al menos una característica en común (por ejemplo, la población de estudiantes de séptimos y octavos básicos de nuestro país).
- Una **muestra** es un subconjunto o subgrupo de la población.

Cuando nos enfrentamos ante un estudio de esta naturaleza y por falta de recursos, ya sea económicos o de tiempo, no se puede encuestar a la **población** completa lo usual es seleccionar una **muestra.** Una vez realizado el estudio, se asume que se obtendrían los mismos resultados si se hubiese levantado la encuesta a la población total. Es por ello, que es muy importante que esta muestra debe ser de tal forma que **represente** a la población. Cuando hablamos de representatividad de una muestra, lo que queremos decir es que esperamos que este subgrupo sea una especie de copia pequeña del universo.

En el problema de Leemás la población corresponde a los y las estudiantes de séptimo y octavo año básico de todo Chile, luego, ¿qué ocurre si tomamos una de las siguientes muestras?

- considerar solo alumnos de la Región Metropolitana.
- considerar solo alumnas de séptimo y octavo año básico de todo Chile.
- considerar solo alumnos de séptimo básico de todo Chile.

Como puedes ver, en todos los casos anteriores estaríamos excluyendo a una parte de la población, por lo que ninguna de esas muestras es representativa.

El director de Leemás, preocupado por los costos del estudio consulta acerca del número de encuestas a realizar, y les pregunta qué pasaría con este número si la serie estuviera dirigida:

- Solo a los alumnos y las alumnas de la sexta región.
- Solo a los alumnos y las alumnas de séptimo básico.
- Solo a los alumnos de sexo femenino.

¿Qué le responderías?
Además el director de Leemás ahora está pensando en lanzar una serie de libros para niños de sexto año básico. ¿Le servirá el estudio anterior?, ¿por qué?

Veamos, ahora, el siguiente ejemplo:

Tenemos dos cortes de telas de 8 metros cada uno para hacer unas cortinas, una es lisa de color amarillo y la otra estampada con flores de diversos colores y tipos. Necesitamos elegir unos botones adecuados para adornarlas, el color del riel para colgarlas y el hilo para coserlas. Al salir de casa para ir a buscar todo lo que necesitamos no podemos cargar con los cortes de tela; tan solo con llevar una muestrita de cada una tendríamos idea exacta de la tela. ¿La muestra a cortar de tela amarilla será del mismo tamaño que de la estampada?

Claro que NO, con un corte pequeño que hagamos en la punta del corte de tela amarillo tendríamos una idea clara del color; sin embargo, de la estampada necesitamos obtener un pedazo de tela más grande para poder tener una idea de todos los colores que posee y que pudieran servir al momento de elegir los accesorios.

NO OLVIDES QUE

- La representatividad de una muestra no tiene que ver, necesariamente, con el tamaño de esta, sino con la capacidad de reproducir a pequeña escala las características de la población.
- Si los individuos que componen la población son muy distintos entre ellos tenderemos a tomar una muestra de tamaño más grande que en el caso de que los individuos que componen la población sean similares.

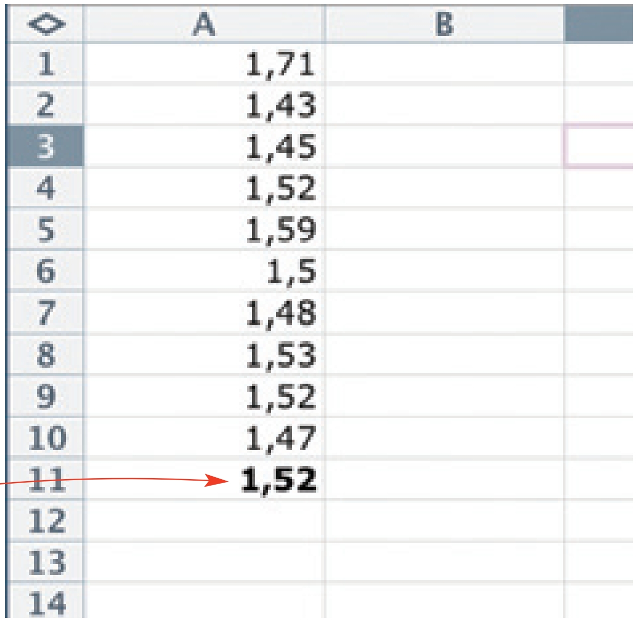
HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS

Esta actividad la puedes realizar utilizando una planilla de cálculo, como Excel.

Reúne la información de la estatura de diez de tus compañeros y compañeras. Luego, sigue las instrucciones:

1. Ingresar los datos en la planilla de cálculo. Utiliza para esto la primera columna, A, de la planilla. Como se muestra en la imagen.
2. En la primera celda vacía, debajo de los datos, escribe "=Promedio(A1 : A10)".

Promedio de los datos registrados desde A1 hasta A10



	A	B
1	1,71	
2	1,43	
3	1,45	
4	1,52	
5	1,59	
6	1,5	
7	1,48	
8	1,53	
9	1,52	
10	1,47	
11	**1,52**	
12		
13		
14		

Con esta función obtienes el promedio de un conjunto de datos. En este caso, el promedio es 1,52

EN TU CUADERNO

1. **Corta tantos cuadraditos de papel como compañeros y compañeras de curso tengas.**

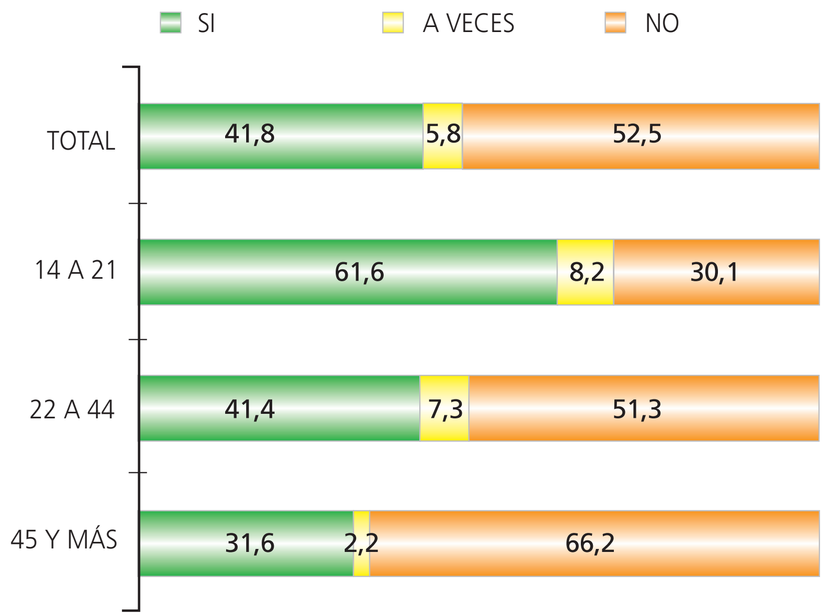
   a) En cada uno de ellos anota la estatura de un compañero o compañera.
   b) Echa estos papeles en una bolsa y extrae cuatro papeles. Calcula el promedio de los números que salen.
   c) Ahora extrae 8 de estos papeles y repite el ejercicio.
   d) Repite lo anterior con 12, 16 y 20 papeles.

   - ¿Qué observas en los promedios obtenidos?

2. En marzo del año 2009, la Fundación Futuro realizó una encuesta con el fin de determinar el comportamiento de los televidentes en torno a las teleseries. La población considera a personas mayores de 14 años, habitantes de las 49 principales ciudades de nuestro país que tengan más de 45 mil habitantes. La muestra seleccionada está integrada por:

- **189 personas del gran Santiago**
- **211 personas del resto del país:**

El siguiente gráfico muestra por rango etario, los resultados de la pregunta: ¿está viendo alguna de las teleseries que dan entre las 8 y 9 de la noche y que fueron estrenadas durante marzo de este año?



a) ¿Observas diferencias entre los resultados obtenidos para los distintos grupos etarios?

b) ¿Qué grupo tiende a ver más teleseries?, ¿dónde observas esto?

c) ¿Cuál hubiese sido la conclusión del estudio si solo se encuestan a personas mayores de 45 años?, ¿y si solo se hubiesen considerado personas de 14 a 21 años?¿Por qué crees que es bueno considerar estos grupos?

3. Revisa durante la semana los diarios u otros medios de comunicación. Busca noticias acerca de estudios o encuestas que se hayan realizado. Redacta un pequeño informe donde comentes acerca del objetivo del estudio. Identifica la población y el tamaño de la muestra. Comenta si, a tu juicio, la muestra es representativa o no.

NO OLVIDES QUE

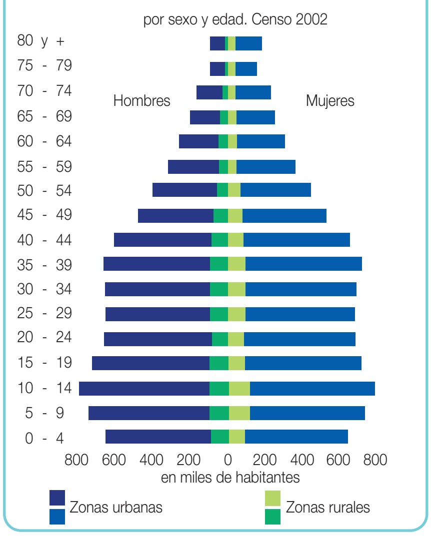
- La representatividad de una muestra no tiene que ver, necesariamente, con el tamaño de esta, sino con la capacidad de reproducir a pequeña escala las características de la población; sin embargo, mientras más grande sea la muestra, más certeros serán los resultados de esta.

El siguiente gráfico muestra la composición de la población total de Chile según sexo, grupos de edad y área rural o urbana, según el censo de 2002 realizado en nuestro país.

a) ¿En qué rango de edad hay mayor cantidad de hombres y mujeres?, ¿en cuál hay menor cantidad?
b) ¿En qué rango de edad hay mayor cantidad de mujeres y de hombres en la zona rural?
c) ¿Cuál es la tendencia general que se observa en el gráfico, respecto a la cantidad de población?

Fuente: www.ine.cl/cd2002/poblacion.pdf (consultado en abril de 2008)

Población urbana y rural



Comprender

- ¿Qué sabes del problema?
  La población total de Chile según sexo, grupos de edad y área rural o urbana.
  Hay 17 grupos de edad, cada uno de amplitud 4 años.
  Los tonos azules corresponden a la zona urbana y los verdes, a la zona rural.
  La parte izquierda del gráfico corresponde a los hombres y la derecha, a las mujeres.
- ¿Qué debes encontrar?
  El rango de edad en que hay mayor y menor cantidad de hombres y de mujeres, en general, y en la zona rural, y una interpretación de la tendencia que se observa en el gráfico.

Planificar

- ¿Cómo resolver el problema?
  Debemos analizar el gráfico. En este caso, la longitud de la barra indica la mayor cantidad de personas, en este caso. Luego hay que determinar a qué rango de edad corresponde la barra más larga y la más corta del gráfico. Al observar los tonos verdes por sí solos, se puede determinar qué sucede en el área rural.

Resolver

Existe mayor cantidad de hombres y de mujeres en el rango de edad 10 - 14, es decir, la mayoría de la población del país se encuentra en este rango. Y la menor cantidad en el intervalo 75 - 79 años.

En la zona rural, hay mayor cantidad de hombres y de mujeres en el rango de edad 10 - 14, lo que es probable debido a que en este grupo es donde hay mayor población.

Podemos concluir, mirando el gráfico en su totalidad, que la cantidad de población en los primeros años de vida (0 - 14) va en aumento, luego disminuye un poco y se “estanca” entre los 20 y 39 años, para ir descendiendo notoriamente en los años posteriores, produciéndose un leve aumento en el último intervalo.

Revisar

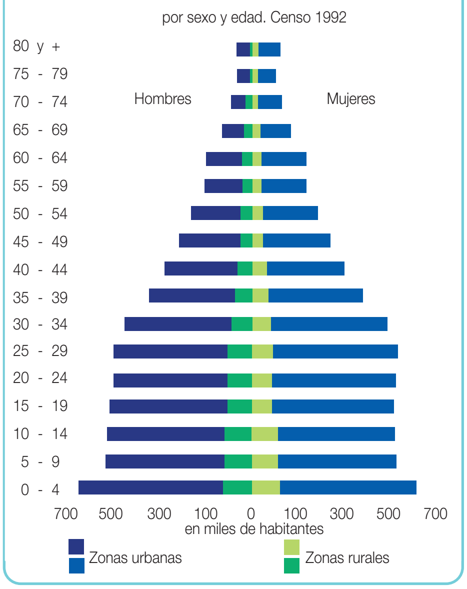
- Compara tus resultados con los de tus compañeros y compañeras.

1. **Observa el gráfico correspondiente al censo de 1992 y resuelve los siguientes problemas, aplicando la estrategia de la página anterior.**

   a) ¿En qué rango de edad hay mayor cantidad de hombres y de mujeres?
   b) ¿En cuál hay menor cantidad?
   c) ¿Son los mismos grupos que en el gráfico del año 2002?
   d) ¿Cómo varió el rango 0 - 4 según ambos gráficos (1992 y 2002)? ¿Por qué crees que ocurrió dicha variación?
   e) ¿Cómo varió la cantidad de población de las zonas rurales entre los años 1992 y 2002?, ¿por qué crees que ocurrió dicha variación?

Fuente: www.ine.cl/cd2002/poblacion.pdf (consultado en abril de 2008)

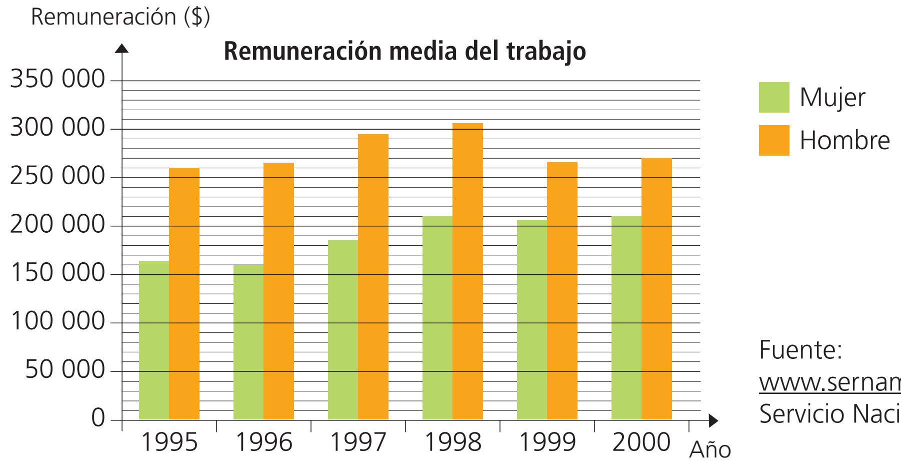
Población urbana y rural



2. **Ahora resuelve el problema de la página anterior utilizando otra estrategia de resolución. Explica paso a paso cómo lo resolviste y compara tu estrategia con las usadas por tus compañeros y compañeras.**

3. **Resuelve el siguiente problema utilizando la estrategia que tú quieras. Compara el procedimiento que utilizaste con el de algún compañero o compañera. ¿Cuál es más simple?, ¿por qué?**

   El siguiente gráfico representa la remuneración promedio que recibieron mensualmente, por su trabajo, hombres y mujeres en Chile, durante los años 1995 a 2000. Responde las preguntas dadas a continuación.



Fuente: www.sernam.cl/basemujer/index.htm. Servicio Nacional de la Mujer,.

   a) ¿Cuánto ganaron, aproximadamente, en promedio, las mujeres en los años 1996 y 2000?, ¿y los hombres?
   b) ¿En qué año se produce la mayor diferencia entre los sueldos de hombres y de mujeres?
   c) A medida que transcurren los años, ¿aumenta o disminuye la diferencia entre los sueldos de hombres y mujeres?

NACIONAL

Jóvenes protagonizan 25% de accidentes de tránsito

Es común enterarse por la prensa del día lunes de algún grave accidente de tránsito ocurrido los fines de semana, en los cuales los jóvenes son los protagonistas.

Generalmente, los jóvenes creen que nada malo les va a pasar y piensan que tener un accidente o no depende del azar. Por eso, no toman conciencia de que las horas sin dormir y el alcohol, entre otras, pueden traerles consecuencias graves.

Fuentes: www.pediatraldia.cl, http://www.carabinerosdechile.cl/sitioweb/web/verSeccion.do?cod=190&codContenido=899 (consultados en abril de 2008)

Nº de accidentes de tránsito los fines de semana, según horas del día

	Viernes	Sábado	Domingo
1^{00} a 4^{00}	231	467	364
4^{00} a 7^{00}	255	565	733
7^{00} a 10^{00}	995	642	508
10^{00} a 13^{00}	1014	904	674
13^{00} a 16^{00}	1214	1098	939
16^{00} a 19^{00}	1482	1204	1068
19^{00} a 22^{00}	1190	1107	1116
22^{00} a 1^{00}	621	824	692

Formen grupos de 3 integrantes, analicen los datos de la tabla y desarrollen las actividades.

1. **Analicen los datos y decidan entre todos qué tipo de gráfico sería el más adecuado para presentar la información.**
2. **Construyan, utilizando el computador, al menos tres gráficos que presenten los aspectos más relevantes de los datos de la tabla.**
3. **En general, ¿qué hora del día es la que tiene la mayor frecuencia relativa de accidentes del tránsito?, ¿a qué creen que se deba esto?**
4. **¿Qué día del fin de semana es el que tiene la mayor frecuencia relativa de accidentes del tránsito?, ¿por qué creen que sucede esto?**

EVALUAMOS NUESTRO TRABAJO

1. **Cada uno complete en su cuaderno la siguiente tabla escribiendo Sí, A veces y No, según corresponda. Luego, comparen y comenten sus respuestas.**

	Integrante 1	Integrante 2	Integrante 3
Respeté las opiniones de los demás integrantes.			
Cumplí con las tareas que me comprometí.			
Hice aportes interesantes para desarrollar el trabajo.			

2. **Comenten y respondan: ¿en qué podrían mejorar para el próximo trabajo en equipo?**

A continuación, se presentan algunos de los conceptos fundamentales de la unidad. Haz un listado con los conceptos que faltan y construye en tu cuaderno un mapa conceptual que los organice y relacione.

Datos y azar

Tablas y gráficos

Frecuencia relativa

Probabilidad

Frecuencia absoluta

Utilizando los conceptos aprendidos en la unidad y apoyándote en el mapa que construiste, responde en tu cuaderno.

1. ¿En qué casos se recomienda representar los datos en un histograma?
2. ¿Cuál es la diferencia entre histograma y pictograma?
3. Si se quiere representar un conjunto de datos expresados como porcentaje, ¿qué gráfico es el más adecuado?
4. ¿Cuál es la diferencia entre la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa?
5. ¿Cómo se relaciona la frecuencia relativa con la probabilidad?
6. Comenta tus respuestas con tus compañeros y compañeras.

¿QUÉ APRENDÍ?

Ahora trabaja en tu hipertexto

Marca, en tu cuaderno, la alternativa correcta en las preguntas 1 a la 8.

1. El número de veces que aparece cada valor de una variable se llama:

A. frecuencia absoluta.
B. frecuencia relativa.
C. porcentaje.
D. probabilidad.

2. Un profesor fue calificado por sus alumnos y alumnas obteniendo los siguientes porcentajes:

Muy bueno: 50%
Bueno: 25%
Regular: 15%
Malo: ?

¿Cuál de los siguientes porcentajes corresponde a los y las estudiantes que dijo que el profesor es malo?

A. 90%
B. 1%
C. 10%
D. 0%

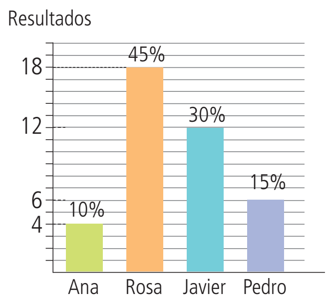
3. Si el día en que se hizo la encuesta había 40 estudiantes, ¿cuántos lo calificaron como regular?

A. 5
B. 6
C. 15
D. 20

4. El gráfico recomendado para representar los datos del ejercicio 2 es:

A. gráfico de barras.
B. histograma.
C. pictograma.
D. gráfico circular.

5. En una elección de presidente de curso los resultados fueron expresados así:



¿Cuántos alumnos votaron en las elecciones?

A. 20
B. 40
C. 60
D. 100

6. ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno o alumna del curso hubiera votado por Javier?

A. $\frac{3}{10}$
B. $\frac{12}{30}$
C. $\frac{1}{10}$
D. $\frac{3}{20}$

7. La suma de todas las frecuencias absolutas en cualquier tabla corresponde a:

A. 1
B. 1%
C. 100%
D. el número total de observaciones.

8. La suma de todas las frecuencias relativas en cualquier tabla corresponde a:

A. 100
B. 100%
C. el número total de observaciones.
D. 1

9. **Los siguientes resultados fueron obtenidos del Estudio Nacional de Opinión Pública, número 44, "Mujer, familia y valores" (Centro de Estudios Públicos, diciembre 2002) y se refieren a la tasa de participación laboral femenina. Observa las tablas y responde las preguntas relacionadas.**

A. Tasa de participación laboral femenina por grupos de edad.

Grupos de edad (años)	% de participación dentro de su grupo
18 – 24	37%
25 – 34	55%
35 – 54	58%
55 y más	14%

B. Tasa de participación laboral femenina según años de educación.

Años de educación	Tasa
0 – 3 años	19%
4 – 8 años	34%
9 – 12 años	46%
13 años y más	61%

a) ¿Cuál es el grupo de edad que muestra una mayor participación laboral? Explica.
b) ¿Se puede construir un gráfico circular con los datos de la tasa de participación laboral femenina según años de educación? Justifica.
c) Decide qué gráfico es más apropiado para presentar la información de cada tabla.

Compara tus respuestas en tu curso. ¿Te equivocaste en alguna?, ¿cuál fue el error? Explícalo y resuelve correctamente el ejercicio.

¿QUÉ LOGRÉ?

1. Marca según tu apreciación.	No lo entendí	Lo entendí	Puedo explicarlo
Tablas y gráficos.			
Frecuencia relativa.			
Probabilidades de eventos aleatorios.			
Población y muestra.			
Resolución de problemas.			

2. Reflexiona y aprende.

a) ¿Qué dificultades tuviste en la unidad?, ¿cómo las superaste?
b) ¿Qué te gustó de lo que aprendiste en la unidad?, ¿por qué?
c) Vuelve a la página 160 y revisa el recuadro "En esta unidad podrás...", ¿crees que lograste aprender todo lo que se esperaba? Explica.

Solucionario

Unidad 1

Página 12

¿CUÁNTO SABES?

1. a) < d) < g) <
   b) < e) < h) >
   c) > f) > i) >

2. a) 235, 253, 465, 523, 526, 546, 645, 653, 654
   b) 506, 509, 528, 543, 548, 564, 587, 589, 598
   c) 712, 719, 724, 725, 777, 780, 781, 786, 795
   d) 3654, 3662, 3675, 3734, 3796, 3802, 3808

3. a)


b)


c)


d)


4. a) 152 f) 24 k) 625
   b) 60 g) 60 l) 235
   c) 36 h) 23 m) 357
   d) 24 i) 434 n) 180
   e) 16 j) 662

Página 13

5. 80 años aproximadamente.

6. a) 14 959 m aproximadamente.
   b) No
   c) A 1041 m aproximadamente.

Página 15

1. a) Dos pisos.
   b) Nueve pisos.
   c) El –2

2. A 4 m

3. a) –70 b) –165 c) –1875

Página 17

1. a) No
   b) Sí

2. a) –7 °C d) –$ 300 000
   b) –5000 m e) –14 m
   c) 1864 f) 6959 m

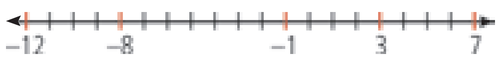
3. a) –5 °C b) 20 pisos

Página 18

1. a) El hombre.
   b) El hombre tiene ocho años y la mujer tiene diecisiete años.

2. a) 10 d) 2 g) 53
   b) 8 e) 23 h) 35
   c) 23 f) 0

Página 19

2. a)


b)


c)


Página 20

1. a) > d) > g) >
   b) < e) < h) >
   c) = f) >

Página 21

2. a) –98, –14, 28, 37, 56
   b) –67, –64, –20, 5, 93
   c) –48, –19, –18, 27, 35
   d) –19, –17, –13, –12, 11

3.

a – 1	a	a + 1
6	7	8
–6	–5	–4
–2	–1	0
–101	–100	–99
–20	–19	–18

4. a) Menor **b)** Mayor **c)** Mayor

MI PROGRESO

1. –90 000, –80 000, +120 000, –65 000, +160 000, –32 000, –25 000, –5.000.
2. –90 000, –80 000, –65 000, –32 000, –25 000, –5000
3. Les falta dinero este mes.
4. Sí, $ 13 000

Página 22

1. a) 6 °C
b) 3 °C
c) –2 °C

2. a) 40
b) 30
c) 20
d) 10
e) 0
f) 4
g) 1
h) –3
i) –7
j) –10
k) 7
l) –11
m) –18
n) –25
ñ) –43

Página 23

3. a)

9	–5	5
–1	3	7
1	11	–3

b)

–9	5	–5
1	–3	11
–1	7	3

c)

–6	8	–2
4	0	–4
2	–8	6

d)

6	–8	2
–4	0	4
–2	8	–6

4. a)

0
–5 5
–10 5 0
–7 –3 8 –8

b)

–2
–10 8
–5 –5 13
–2 –3 –2 15

5.

a	b	c	a + b	a + c	c + b
2	–3	–4	–1	–2	–7
–1	4	2	3	1	6
1	2	3	3	4	5
–2	–2	–3	–4	–5	–5

Página 25

1. a) –2
b) –12
c) –4
d) –13
e) –11
f) 4

2. a) –22
b) 0
c) 7
d) –6
e) 11
f) –7

3.

	Máxima	Mínima	Variación de temperaturas
Lunes	22 °C	12 °C	10 °C
Martes	17 °C	–2 °C	19 °C
Miércoles	16 °C	–4 °C	20 °C
Jueves	19 °C	12 °C	7 °C
Viernes	20 °C	–3 °C	23 °C

4.

a	b	c	a – b	b – a	b – c	c – b	a – c
–3	–8	5	5	–5	–13	13	–8
10	–9	–4	19	–19	–5	5	14
6	–15	3	21	–21	–18	18	3
0	–1	1	1	–1	–2	2	–1

5. a) Aproximadamente 2 m, 3 m, 4 m, 5 m y 5,5 m.
b) Aproximadamente 3,5 metros más largo.

Página 26

1. a) 14
b) –15
c) 0
d) 13
e) –23
f) 13
g) 0
h) 400

2. a) 1 **b)** 7 **c)** –22 **d)** –8 **e)** 19 **f)** 18 **g)** –10 **h)** –26 **i)** 3 **j)** –3 **k)** 2 **l)** 5

Página 27

3. a) 5 **b)** 3 **c)** 11 **d)** 10 **e)** 0 **f)** –6

4. a) $ 18 000 **b)** 14 pisos

MI PROGRESO

1. Andrés e Ignacio.
2. Andrés: 1 punto, Camilo: –6 puntos, Felipe: –13 puntos, Ignacio: 4 puntos y Nicolás: –3 puntos.
3. El entrenador otorgó el menor puntaje a Felipe y el técnico otorgó el menor puntaje a Andrés.
4. Nicolás.

Página 29

BUSCANDO ESTRATEGIAS

1. a) $ 200 000
b) A diez metros.
c) A 50 m de profundidad.
d) Entre el tercer y cuarto piso.

3. a) –16 °C
b) Va subiendo; entre el 2° y el 3°.

Página 32

¿QUÉ APRENDÍ?

1. C **2.** B **3.** C **4.** C **5.** A **6.** A **7.** A **8.** C

Página 33

9. a) 75 años. **b)** 212 años.
10. No tiene suficiente dinero, aún le faltan $ 550.
11. a) 30, 55, –35, 40, –25
b) 65 kilómetros al norte.
c) 185 kilómetros.

Unidad 2

Página 36

¿CUÁNTO SABES?

1. a) $3 \cdot 6 = 18$ **b)** $5 \cdot 8 = 40$ **c)** $10 \cdot 7 = 70$ **d)** $\frac{2}{3} \cdot 9 = 6$ **e)** $0{,}2 \cdot 4 = 0{,}8$ **f)** $0{,}1 \cdot 5 = 0{,}5$

2. a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$
b) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
c) $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7$
d) $5 \cdot 5 \cdot 41$
e) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
f) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
g) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$
h) $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
i) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

3. a) 2187 **b)** 3125 **c)** 1728 **d)** 16 807 **e)** 2197 **f)** 1 000 000 **g)** 100 000 000 **h)** $\frac{12}{343}$
i) $\frac{50}{63}$ **j)** $\frac{7}{18}$ **k)** $\frac{625}{36}$ **l)** $\frac{1}{1000}$ **m)** $\frac{243}{10\,000}$ **n)** $\frac{1}{500}$ **ñ)** $\frac{1}{9}$ **o)** $\frac{3}{4}$
p) 0,07686 **q)** 0,57125 **r)** 0,0492 **s)** 0,0027 **t)** 1 **u)** 0,00001 **v)** 3,09753 **w)** 50,944

Página 37

4. a) $\frac{16}{49}$ **b)** $\frac{25}{36}$ **c)** $\frac{108}{77}$ **d)** $\frac{100}{119}$ **e)** $\frac{10}{9}$
f) 1 **g)** $\frac{81}{121}$ **h)** $\frac{343}{400}$ **i)** 1 **j)** 0,93932
k) 0,84 **l)** 1,0692 **m)** 1,59933 **n)** 0,8976 **ñ)** 0,72

5. a) 9 cm^2 **b)** 22 cm^2

Página 39

1. a) 2^5 **d)** 7^2 **g)** $0,27^8$

b) 5^2 **e)** $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ **h)** $0,064^6$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ **f)** $\left(\frac{3}{10}\right)^3$

2. a) Tres elevado a cinco.
b) Ocho al cubo.
c) Dieciséis al cuadrado.
d) Un medio elevado a siete.
e) Tres cuartos elevado a ocho.
f) Siete décimos elevado a cuatro.

3. a) 1296 **d)** $\frac{2401}{10\,000}$
b) 243 **e)** 0,00243
c) 125 **f)** 0,512

4. a) $18^3 + 9^3$ **e)** $1,25^4$
b) $3 \cdot 4^3$ **f)** $6,65^4$
c) 7^7 **g)** $3 \cdot 6,3^2$
d) $\left(\frac{3}{8}\right)^5$ **h)** $\left(\frac{4}{9}\right)^4 + \left(\frac{4}{9}\right)^2$

5. a) 3 **d)** 3 **g)** 3
b) 5 **e)** 3 **h)** 6
c) 4 **f)** 3 **i)** 4

6. a) 256 personas son informadas en el nivel 4 y 4096 personas son informadas en el nivel 6.
b) 16 384 alimentos no perecibles.

Página 40

1. a) 16 **c)** 16 **e)** 100
b) 64 **d)** 256 **f)** 10 000

2. a) Sí.
b) 10 cm
c) Pregunta abierta.
d) 15 cm, 17 cm, 21 cm, 25 cm, 36 cm
e) Pregunta abierta.
f) Pregunta abierta.

Página 41

3. a) $>$ **c)** $>$ **e)** $>$
b) $<$ **d)** $<$ **f)** $<$

4. a) $>$ **b)** $<$

5. a) 4096 bacterias, 262 144 bacterias y 16 384 bacterias.
b) En 5 horas y 20 minutos.
c) A las 14:40; a las 15:20; 524 288 bacterias.

Página 43

1.

Años transcurridos	Factor de crecimiento	Tamaño de la población
0	$\left(\frac{2}{3}\right)^0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot 250\,000 = 250\,000$
1	$\left(\frac{2}{3}\right)^1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^1 \cdot 250\,000 = 166\,666,6$
2	$\left(\frac{2}{3}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot 250\,000 = 111\,111,1$
3	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot 250\,000 = 74\,074,074$
4	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 250\,000 = 49\,382,716$

a) En el tercer año.
b) 32 921,81 y 21 947,87 insectos aproximadamente.
c) Después de 31 años.

2. a) $\frac{1}{125}$ **c)** $\frac{128}{2187}$ **e)** $\frac{441}{625}$

b) $\frac{256}{2401}$ **d)** $\frac{243}{100\,000}$ **f)** $\frac{64}{125}$

3. a) = **b)** = **c)** = **d)** =
4. =

Página 44

1. $ 2 048 434

2. a) 1,728 **e)** 100,020001 **i)** 0,49
b) 0,0625 **f)** 0,6561 **j)** 0,970299
c) 0,00000001 **g)** 1,8225
d) 0,00000001 **h)** 15,625

3. a) Menor **b)** Mayor

Página 45

EN EQUIPO

3. a) 8, 27 y 64 cubitos respectivamente.

b) 125, 216, 343, 512, 729 y 1000 cubitos respectivamente.
c) La base corresponde a la medida de la arista del cubo y el exponente siempre es el número tres.
d) 15,625 cm^3
e) 34,328125 cm^3

MI PROGRESO

1. $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$
2. 8^5 personas.
3. $ 640 000 por cada edificio.
4. 2^{15}

Página 46

1. a) $2,4 \cdot 10^{12}$
b) $4,2 \cdot 10^{17}$
c) $7,57 \cdot 10^{15}$
d) $3,3 \cdot 10^{-21}$

Página 47

2. a) 3 870 000 000
b) 120 400 000 000 000
c) 400 000 000 000 000 000 000
d) 758 900 000
e) 0,00003677
f) 0,00000000000254
g) 0,00000000000000000098
h) 0,0000000142

3. a) Sí c) Sí e) Sí
b) No d) No f) Sí

4. a) > c) =
b) > d) <

5. a) 1 700 000; $1,7 \cdot 10^6$
b) 100 000 000 000 000; $1 \cdot 10^{14}$
c) 778 330 000; $7,7833 \cdot 10^8$; 142 984; $1,42984 \cdot 10^5$
d) 0,0000032; $3,2 \cdot 10^6$
e) 0,005; $5 \cdot 10^{-3}$; 0,009; $9 \cdot 10^{-3}$
f) 3; $3 \cdot 10^0$; 900 000; $9 \cdot 10^5$; 60 000 000; $6 \cdot 10^7$

Página 48

1. a) $2^8 = 256$
b) $3^6 = 729$
c) $5^4 = 625$
d) $10^6 = 1\,000\,000$
e) $3^{10} = 59\,049$
f) $2^9 = 512$
g) $10^9 = 1\,000\,000\,000$
h) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$
i) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$
j) $\left(\frac{1}{10}\right)^5 = \frac{1}{100\,000}$
k) $(0,3)^5 = 0,00243$
l) $(0,2)^5 = 0,00032$

Página 49

2. a) 3 b) 3 c) 2 d) 7

3. a) $3 \cdot 9 \cdot 27 = 3 \cdot 3^2 \cdot 3^3 = 3^6 = 729$ combinaciones de ropa.
b) $2 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 = 2^5 = 32$ combinaciones de colación.
c) $2 \cdot 4 \cdot 8 = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 2^6 = 64$ caminos posibles.

4. a) 30 375
b) 40 000
c) 259 308
d) 7776

Página 50

1. a) 400
b) 216
c) 50 625
d) 100 000
e) $\frac{1}{36}$
f) $6,4 \cdot 10^{-11}$

Página 51

3. a) 45^2 **d)** 70^2 **g)** $\left(\frac{4}{3}\right)^3$

b) 27^2 **e)** $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ **h)** 2^3

c) 6^3 **f)** $\left(\frac{1}{8}\right)^2$

4. a) 1 000 000 000 **d)** $\frac{1}{1000}$

b) 216 **e)** 1

c) 15 625 **f)** $\frac{1}{225}$

5. 12^3 cm^2 = 1728 cm^2

6. a) $(2 \cdot 5 \cdot 7)^2 = 4900$
b) $(2 \cdot 3 \cdot 4)^3 = 13\,824$
c) $(6 \cdot 5)^3 = 27\,000$
d) $(2 \cdot 3)^5 = 7776$

7. a) 36^2

b) 48^2

c) 30^5

d) $\left(\frac{1}{9}\right)^2$

e) $0{,}3^4$

f) $\left(\frac{1}{48}\right)^3$

8. a) 8^2
b) 35^4
c) $\left(\frac{1}{10}\right)^3$

9. Sí

10. Sí

MI PROGRESO

1. $1{,}35 \cdot 10^{10}$ km
2. $2^8 \cdot 3^3 \cdot 5^9$ km
3. $1{,}35 \cdot 10^{15}$ cm
4. 90 UA

Página 53

BUSCANDO ESTRATEGIAS

1. a) 8 **b)** 7 **c)** 3 **d)** 6

3. a) 1 **b)** 6 **c)** 1

4. a) 10,24 cm
b) Después de 22 dobleces.
c) $1{,}126 \cdot 10^{13}$ cm aproximadamente.
d) El grosor de la hoja es mayor por 4 150 000 km.

5. a) 512 granos, 524 288 granos.
b) A partir de la casilla 24.

Página 56

¿QUÉ APRENDÍ?

1. A **3.** C **5.** C **7.** D
2. C **4.** D **6.** A **8.** C

Página 57

9. a) El resultado correcto es 304
b) El resultado correcto es 242
c) El resultado correcto es 17,2361

10. a) 4 **d)** 2
b) 5 **e)** 2
c) 6 **f)** 3

11. a) A las 12:18 horas.

Unidad 3

Página 60

¿CUÁNTO SABES?

3. a) Dos líneas rectas son paralelas cuando no se intersecan en ningún punto o cuando son coincidentes.
b) Dos líneas rectas son perpendiculares cuando se intersecan formando cuatro ángulos iguales y rectos.

5. a) Hexágono
b) Rectángulo
c) Pentágono
d) Trapecio
e) Romboide
f) Triángulo
g) Octágono
h) Cuadrado

Página 61

6. a) 150°
b) 60°
c) 110°
d) 90°
e) 135
f) 120°
g) 170°
h) 108°
i) 45°

7. a) 180°
b) 360°
c) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180, 360.

Página 62

1.

– Triángulo (3 lados)
– Cuadrilátero (4 lados)
– Pentágono (5 lados)
– Hexágono (6 lados)
– etc.

Convexo: todas las Diagonales del polígono, pertenecen a la región interior de este.

Cóncavo: de todas las diagonales, al menos una de ellas o parte de ella no pertenece al interior del polígono.

Regulares: todos sus lados y ángulos tienen igual medida.

Irregulares: al menos uno de sus Lados tiene distinta medida o uno de sus Ángulos tiene distinta medida.

Página 63

2. a) Sí, 24 m
b) No, faltaría material.
c) No, el perímetro del escenario original es menor que la suma de los perímetros de los dos escenarios.

3. En 8 cm, en 12 cm.

4. En 3 cm, en 15 cm.

5. En un polígono de n lados, su perímetro aumenta en n, 2n, 3n y 4n, respectivamente.

Página 64

EN EQUIPO

4.

Polígono regular	Número de lados	Número de diagonales	Número total
Triángulo	3	0	0
Cuadrado	4	1	2
Pentágono	5	2	5
Hexágono	6	3	9
Heptágono	7	4	14
Octágono	8	5	20

Página 65

1. a) 9 diagonales, 54 diagonales.
b) 12 diagonales, 90 diagonales.

3.

Nombre del polígono	Cuadrado	Pentágono	Hexágono	Heptágono	Octágono
N° de lados	4	5	6	7	8
N° de triángulos que forman	2	3	4	5	6
Suma de los ángulos interiores	360°	540°	720°	900°	1080°
Medida de cada ángulo interior	90°	108°	120°	128,5714°	135°

a) Suma de los ángulos interiores = $180 \cdot (n - 2)$, con n = número de lados.

b) 1440°, 6120°

c) Medida de cada ángulo interior = $\frac{180 \cdot (n - 2)}{n}$ con n = número de lados.

d) 144°, 170°

4. a) La suma de las medidas de los ángulos exteriores de cualquier polígono convexo siempre es 360°.

Página 66

EN EQUIPO

3. a) No

b) La medida de los lados permanece igual pero cambia las medidas de los ángulos.

4. a) Se mantiene igual.

5. a) Dadas las medidas de los lados solo se puede construir un triángulo. Dadas las medidas de los ángulos se pueden construir infinitos triángulos.

Página 71

1. a) No

b) No

c) Quedan triángulos isósceles.

2. Triángulo isósceles.

3. Paula no. Porque las medidas de los lados no cumplen la desigualdad triangular.

4. Porque las medidas de los lados de la figura del aviso no cumplen con la propiedad de la desigualdad triangular, por lo tanto no se puede construir un triángulo con tales medidas y el aviso es falso.

Página 73

2.

Medida de los ángulos interiores			¿Es posible construir un triángulo?
45°	90°	90°	No
76°	24°	80°	Sí
120°	23°	100°	No

3.

Ángulos interiores de un △		
20°	60°	100°
55°	100°	25°
101°	67°	12°

Ángulos exteriores de un △		
120°	90°	150°
40°	170°	150°
61°	90°	209°

4. a) No

b) No

c) Sí

MI PROGRESO

1. Deben cumplir la propiedad de desigualdad triangular.

2. No, se pueden construir infinitos triángulos.

3. a) Sí

b) No

c) No

Página 74

1. c) En 6 triángulos.

d) Son congruentes.

Página 75

2. Un triángulo isósceles.

Continuación Página 75

3.

	Tipo de triángulo		
	Acutángulo	**Rectángulo**	**Obstusángulo**
Lugar donde se ubican las alturas	Al interior del triángulo	Sobre los catetos del triángulo	Al exterior del triángulo
Lugar donde se encuentra el ortocentro	Al interior del triángulo	En el vértice del ángulo recto del triángulo	Al exterior del triángulo

Página 77

1. Ambos son triángulos rectángulos.

2. 40º, 40º y 100º

Página 79

2. Coinciden en un mismo punto.

Página 81

1. En el c)

MI PROGRESO

2. a) Sí
b) No
c) La altura siempre pasa por el vértice opuesto al lado que interseca, en cambio la simetral no necesariamente cumple con esta condición.

Página 84

1. a) Sí
b) Sí
c) No
d) Sí
e) No
f) Sí

2. Sí se mantiene la relación.

3. No se mantiene la relación.

4. Cuatro kilómetros menos.

5. Luego de tres minutos se encuentran a 180 m de distancia, luego de diez minutos se encuentran a 600 m de distancia.

6. a) Sí
b) Sí
c) No
d) Sí

Página 87

BUSCANDO ESTRATEGIAS

1. a) 5,3 km
b) Mayor que 11.
c) 6 cm

3. a)

b) Localizando el circuncentro del triángulo cuyos vértices son los condominios.
c) 4 cm

Página 90

¿QUÉ APRENDÍ?

1. B	**3.** D	**5.** C	**7.** D	**9.** B
2. B	**4.** A	**6.** B	**8.** A	

Página 91

10. Solo uno, el circuncentro del triángulo cuyos vértices son las ciudades.

Página 91

9. Sí, con cualquier triángulo y cualquier cuadrilátero se puede teselar el plano, ubicándolos de manera adecuada.

10. Pregunta abierta.

Unidad 4

Página 94

¿CUÁNTO SABES?

1. a) $\frac{5}{7}$ d) $\frac{4}{5}$ g) $\frac{1}{5}$
   b) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{7}{8}$ h) $\frac{8}{3}$
   c) $\frac{6}{7}$ f) $\frac{1}{3}$ i) $\frac{3}{200}$

3. Una de las opciones de fracciones equivalentes puede ser:
   a) $\frac{10}{12}$ d) $\frac{24}{34}$ g) $\frac{48}{128}$
   b) $\frac{16}{30}$ e) $\frac{50}{66}$ h) $\frac{42}{182}$
   c) $\frac{8}{18}$ f) $\frac{32}{72}$ i) $\frac{1}{10}$

4. a) 0,75 d) 0,833333... g) 0,8
   b) 0,8 e) 1,3 h) 0,25
   c) 0,125 f) 0,6 i) 0,25

5. a) $\frac{17}{50}$ d) $\frac{6}{10\,000}$ g) $\frac{3}{5}$
   b) $\frac{18}{25}$ e) $\frac{45}{10\,000}$ h) $\frac{71}{250}$
   c) $\frac{17}{2500}$ f) $\frac{375}{1000}$ i) $\frac{125}{100}$

6. a) $<$ d) $=$ g) $<$
   b) $>$ e) $>$ h) $>$
   c) $<$ f) $=$ i) $>$

Página 95

7. a) 30 d) 15 g) 6
   b) 9 e) 64 h) 42
   c) 1 f) 5 i) 10

8. a) 2,4 km c) 5,835 km e) 3,65 km
   b) 0,7 km d) 1,4 km f) 0,0723 km

9. a) 300 000 m c) 1250 m e) 32 m
   b) 4,5 m d) 12,85 m f) 6425 m

Página 97

1. a) 1 : 3 b) 7 : 5 c) 1 : 4 d) 2 : 9

2. a) Sí b) No c) Sí d) Sí

3. a) No b) No c) Sí d) Sí

4. a) 2 b) 35 c) 44 d) 10

5. a) 16 554 576 habitantes.
   b) No.

Página 99

1. a) No c) No e) No g) Sí i) No
   b) No d) No f) Sí h) Sí

2. a) No
   b) Sí
   c) Los datos de la tabla 2 son proporcionales.

3.

Lado del cuadrado	Área	Perímetro
3 cm	9 cm^2	12 cm
4 cm	16 cm^2	16 cm
7 cm	49 cm^2	28 cm

El lado del cuadrado no es proporcional a su área. El lado de un cuadrado es proporcional a su perímetro.

Página 100

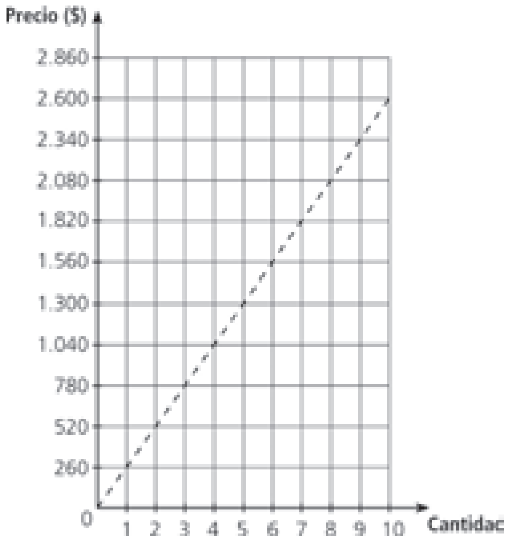
1.

Cantidad de helados	1	2	3	4	8	9	10
Precio ($)	260	520	780	1040	2080	2340	2600

a) Dividiendo el precio por 260; multiplicando 260 por la cantidad de helados.
b) 14 helados.
c) 260

Página 101

2.



3. a)

Distancia (km)	30	60	90
Tiempo (h)	1	2	3

Distancia (km)	40	80	120
Tiempo (h)	1	2	3

b) Auto rojo; su velocidad es mayor.
c) 2 horas
d) 40 : 1, 30 : 1
e) 12 horas
f) Recorren más kilómetros.

Página 102

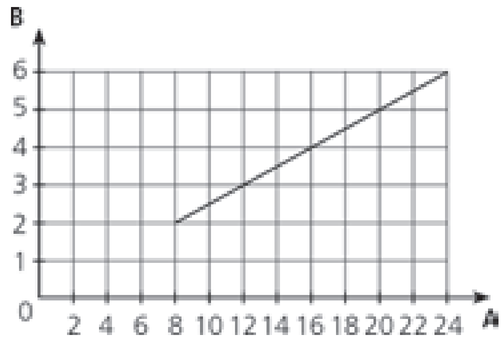
4. a) Sí **b)** Sí **c)** No **d)** No

5.

a	b	Perímetro
2	3	2 • 2 + 2 • 3 = 10
2	4	2 • 2 + 2 • 4 = 12
2	5	2 • 2 + 2 • 5 = 14
2	6	2 • 2 + 2 • 6 = 16
2	7	2 • 2 + 2 • 7 = 18

6.

A	B
8	2
12	3
16	4
20	5
24	6



- Si unes resulta una recta que pasa por el origen.

Página 103

7. a) 7° A: $ 91 452; 7° B: $ 95 806; 7° C: $ 82 742.
b) 30°, 60° y 90°.
c) 5, 10 y 15 años.
d) Antonia $ 140 488, Alejandra $ 175 610, Andrea $ 163 902.

MI PROGRESO

1. a) 9 : 36 = 1 : 4
b) 63 : 81 = 7 : 9
c) 9 : 81 = 1 : 9

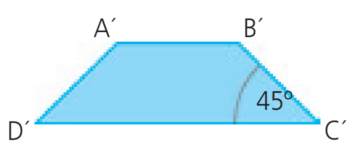
2. 21 velas

3. Javiera $ 945, Jorge $ 3780, Andrés $ 6615 y Ana $ 8505.

Página 105

1. Los rectángulos semejantes al verde son los de medidas 1 cm y 2 cm; 2,25 y 4,5 cm; y 2,5 cm y 5 cm.

2.



3. Dos cuadrados son siempre semejantes. Esta condición de semejanza la cumplen todos los polígonos regulares.

4. a) 8,5 cm y 4,5 cm
   b) 85 m y 45 m
   c) 9 m y 7 m
   d) 1 : 1 000 000

5. La distancia real es 152,5 km.

Página 107

1. a) 18 000 cajas de 12 y 3000 cajas de 72.
   b) La cantidad de cajas aumenta; aumenta al triple.
   c) Se necesitarán la mitad de las cajas.

2. a) Se demorará 1 hora.
   b) Hay una relación inversamente proporcional.

3. 1 hora

4. 144 bidones.

5. a) 30 cm
   b) 80 cm

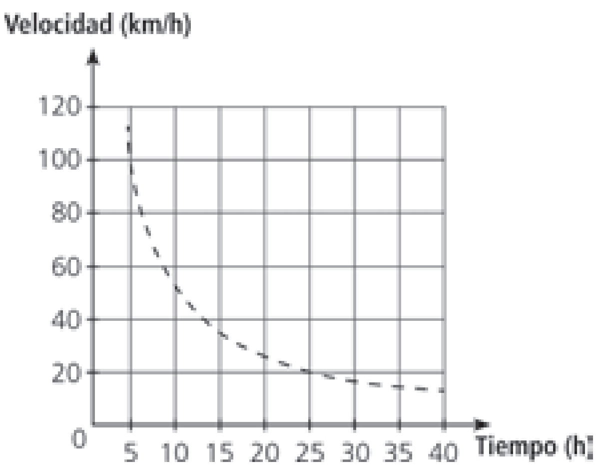
6. a) Disminuye el tiempo.
   b) Aumenta el tiempo.
   c) 3 minutos

Página 108

7. a) 500 km
   b)

Velocidad (km/h)	100	50	25	$16,\overline{6}$	12,5
Tiempo (h)	5	10	20	30	40

   c)



   d) 62,5 km/h
   e) 16,7 minutos aproximadamente.
   f) 100 horas

8. 0,5 atmósferas

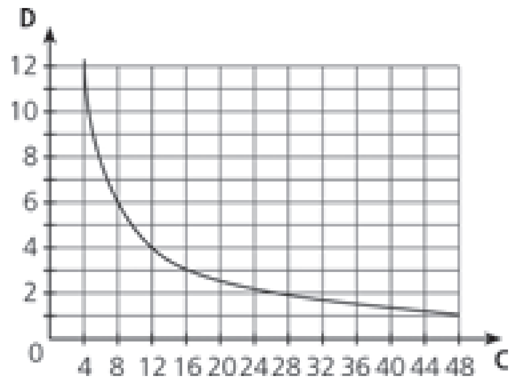
9. a) No
   b) No
   c) No

Página 109

10.

C	D	Producto entre C y D
6	8	48
8	6	48
4	12	48
24	2	48
48	1	48

   a) El mismo resultado: 48
   b)



11. Solo en la primera tabla.

MI PROGRESO

1.

Lado a (cm)	1	1,5	2	3	4	6
Lado b (cm)	6	4	3	2	1,5	1

a) Los lados **a** y **b** varían inversamente proporcional.
b) No

2. Aumenta 1,25 veces.

3. 350 m y 500 m.

Página 111

1. a) 21 temporeras
b) 6 días
c) 4 turnos

3. a) Carbón 4224 kg, salitre 1320 kg y azufre 396 kg.
b) 4000 piezas
c) 12 días
d) En aproximadamente 3,6 horas.
e) 6600 UF

Página 114

1. B **3.** C **5.** D **7.** D
2. C **4.** B **6.** C **8.** D

Página 115

9. 25 cm

10. 2,5 horas

11. 20 días

12. 48 cm, 80 cm y 112 cm

13. 75, 100 y 125

14. $ 56 000, $ 112 000, $ 168 000, $ 224 000

Unidad 5

Página 118

¿CUÁNTO SABES?

1. a) 24 **b)** 18 **c)** 4 **d)** 2

2. a) 6 **b)** –1 **c)** 24

3. a) –11 **c)** 12 **e)** –1
b) –30 **d)** 0 **f)** –26

4. En **a)**, **c)**, **d)**, **e)** y **f)** se cumplen las igualdades.

5. En **a)**, **c)**, **e)** y **h)** se cumple la igualdad para x = –6.

6. a) 8 **d)** 4 **g)** 15
b) –6 **e)** 7 **h)** –34
c) 2 **f)** –28

Página 119

7. a) $ 1875
b) $ 2500
c) 4 kg de peras, porque cuestan $ 165 menos que 5 kg de manzanas.
d) Le sobran $ 100.

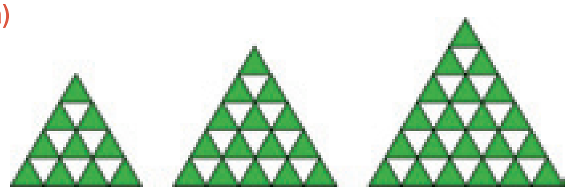
Página 121

1. a)

Número de etapa	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Número de puntos	5	8	11	14	17	20	23	26	29

b) Cantidad de puntos = Cantidad de etapas • 3 + 2

2. a)



b)

n	1	2	3	4	5	6
m	1	1 + 2	1 + 2 + 3	1 + 2 + 3 + 4	1 + 2 + 3 + 4 + 5	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6
Fórmula	$\frac{1 \cdot 2}{2}$	$\frac{2 \cdot 3}{2}$	$\frac{3 \cdot 4}{2}$	$\frac{4 \cdot 5}{2}$	$\frac{5 \cdot 6}{2}$	$\frac{6 \cdot 7}{2}$

c) $m = \frac{n(n + 1)}{2}$

d) 6 pisos; 20 pisos.

e) $\frac{60 \cdot 61}{2} = 1830$; al triángulo número 60.

Página 122

1. a) **x** representa tu edad.
   b) **x** e **y** representan las medidas del piso de tu sala (ancho y largo).

Página 123

2. La edad que tenías hace 5 años se; representa **x – 5**; la edad que tendrás dentro de 5 años se representa **x + 5**.

3. a) $3 - 3 \cdot 12$ b) $2(4 + -7)$ c) $\frac{3x}{2}$ d) $\frac{x}{4} + 2y$

4. a) 4c b) 180x c) 8x d) 5t

5. a) $x + y = 30$ c) $3x = 24$ e) $\frac{z}{5} - 3 = z$

   b) $\frac{36}{2} = y$ d) $10y = 100$ f) $\frac{4a}{6} = 7$

6. a) 96 cm^2 b) 96 cm^2

7. a) **x** : dinosaurios, **y** : muñecas, **z**: autos
   caja verde: $4x + 2y + 5z$
   caja roja: $6x + y + 3z$
   caja amarilla: $2x + 3y + 7z$

   b) Por los juguetes de la caja amarilla recibiría $ 9300. Por todos los juguetes recibiría $ 24 150.

Página 125

1. a) Sí b) Sí c) Sí

2. a) $-5a + 20b$
   b) $6a + 18b - 7ab$
   c) $-3a^2b + 4ab^2 + 3ab$
   d) $3y^2$

3. a) $6x + 7y - 2$
   b) $5x - 9z$
   c) $15a + b + 10$
   d) $-a - 4b - 7c$
   e) $3a^2 - 15ab + 12b^2$
   f) $2xyz + 8xy - 8xz - 6yz$

MI PROGRESO

1. Figura verde: $2x + 4w$
   Figura roja: $4x + 2w$
   Amarilla: $6x + 4w + 2y$
2. $6x + 4w + 2y$
3. Sí, porque $6 \cdot 2 + 4 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot 3 = 12 + 6 + 6 = 24$

Página 126

1. a) Se pueden comprar 5 kg.
   b) $ 150 y $ 450.
   c) El precio de cada lápiz es $ 90.
   d) Cada trozo de cuerda mide 1,9 m.
   e) Le faltan $ 1800.
   f) Cada kilogramo de naranja cuesta $ 280.
   g) La primera bolsa tiene 9 manzanas, la segunda tiene 24 manzanas y la tercera tiene 18 manzanas.

Página 127

2. a) 2 paquetes de 2 rollos.
   b) 3 paquetes de 2 rollos y gastaría $ 2100.

c)

Nº de paquetes de 1 rollo	Nº de paquetes de 2 rollos	Nº de paquetes de 4 rollos	Total a pagar
8			\$ 3120
6	1		\$ 3040
4	2		\$ 2960
4		1	\$ 3060
2	1	1	\$ 2980
2	3		\$ 2880
	2	1	\$ 2900
	4		\$ 2800
		2	\$ 3000

3. a) 100
   b) 9
   c) 40
   d) 9
   e) 104
   f) 10
   g) 5
   h) 4
   i) –12
   j) 37

4. a) En la máquina A el –5, y en la B, el 7.
   b) 8
   c) 3

Página 128

1. a) –2700
   b) –24 000
   c) $\frac{-3600}{7}$
   d) 10 500
   e) $\frac{5000}{3}$
   f) $\frac{47}{80}$
   g) $\frac{410}{3}$
   h) $\frac{-10}{7}$

Página 129

2. a) El kg de jamón cuesta \$ 3120.
   b) Llevó $\frac{450}{199}$ kilogramos de choclo congelado.
   c) 7 manzanas

Página 130

1. a) No necesita nota, sacándose un uno tiene un mayor promedio que 5,0.
   b) Debería sacarse un 7,1, lo que es imposible. Por lo tanto, no logrará promedio 5,1.
   c) 10 m
   d) Alcanza el dinero para 18 entradas al cine.
   e) Alcanza el dinero para 317 desayunos. Para 500 desayunos necesitan \$ 125 000.

Página 131

2. Hace 15 años Verónica tenía 40 años y Daniel 33 años. Los $\frac{9}{10}$ de 40 años son 36 años y no 33 años.
3. a) 60 diarios
   b) Lunes: 16 libros, martes: 8 libros, miércoles: 18 libros y jueves: 5 libros.

MI PROGRESO

1. \$ 200; \$ 1650.

2. Para 163 gramos, aproximadamente.

3. Para $\frac{1}{3}$ kg de galletas obleas y 100 gramos de galletas de mantequilla.

4. No le alcanza el dinero, le faltarían \$ 1225.

Página 135

BUSCANDO ESTRATEGIAS

1. a) Los números son 47, 48 y 49.
   b) Andrea tiene 10 años y Javiera tiene 35 años.
   c) Camila tiene \$ 130 y Javier \$ 170. A Camila le faltan 8 monedas de \$ 5 para juntar lo mismo que su hermano.
   d) Hay 12 caramelos de frutilla, 24 de menta y 108 de naranja.

3. a) 8 galletas.
   b) Los números son 17, 18, 19 y 20.
   c) Tiene a cargo 4 gatos y 6 perros.
   d) Vicente tiene 9 años y Gonzalo tiene 13 años.
   e) Hay 5 arañas, 7 matapiojos y 6 chicharras.

Página 136

¿QUÉ APRENDÍ?

1. C
2. B
3. C
4. C
5. D
6. B
7. D
8. C

Página 137

9. 108 cm^2
10. 450 metros
11. Carlos pierde 19 monedas, Javier 7 monedas y Aldo 14 monedas.
12. Hay 8 avestruces y 7 jirafas.

Unidad 6

Página 140

¿CUÁNTO SABES?

1. a) 64 cm^2
   b) 225 cm^2
   c) 36 cm^2
   d) 84 mm^2
   e) 4,5 cm^2
   f) 7,84 cm^2

2. a) 54 cm^2
   b) 216 cm^2
   c) 168 m^2
   d) 14 cm^2
   e) 2,96 m^2
   f) 14,4 m^2

3.

Milímetros (mm)	Centímetros (cm)	Metros (m)
125	12,5	0,125
4500	450	4,5
10 800	1080	10,8
37 500	3750	37,5
25	2,5	0,025

Página 141

4.

Milímetro cuadrado (mm^2)	Centímetro cuadrado (cm^2)	Metro cuadrado (m^2)
160 000	1600	0,16
720	7,2	0,00072
250 000	2500	0,25
9 600 000	96 000	9,6
19 600	196	0,0196

5. a) 80 rollos de alambre.
   b) 9 600 000 kg de uvas.
   c) 1000 m por lado.
   d) 10 000 000 kg de uvas.

Página 143

1. Son prismas rectos los cuerpos representados en **a)**, **c)**, **e)**, **g)** y **h)**, porque tienen dos caras basales que son polígonos, sus caras laterales son rectángulos y sus caras laterales son perpendiculares a sus caras basales.
4. No, porque tienen solo una cara basal y sus caras laterales son triángulos, es decir, son pirámides.

Página 144

1. El tercer cuerpo es el que tiene mayor volumen, 16 cm^3.

Página 145

2. a) Es mayor el cubo cuya arista mide 1 cm; es mayor el cubo cuya arista mide 1 m
   b) Dividir por 1000; dividir por 1 000 000; 1 000 000 000; multiplicar por 1000; multiplicar por 1 000 000; multiplicar por 1 000 000 000.

3. a) m^3 b) cm^3 c) cm^3 d) m^3

4. a) 6 540 000 cm^3
   b) 280 000 000 mm^3
   c) 4,9 cm^3
   d) 0,0675 m^3
   e) 0,0084 m^3
   f) 3 650 000 000 mm^3

Página 146

1. 3750 cm^3

Página 147

2. a) 735 cm^3
   b) 1176 m^3
   c) 630 cm^3
   d) 4950 mm^3
   e) 2380 cm^3
   f) 49 000 mm^3

   - El volumen se duplica. El volumen se reduce a la cuarta parte. En prismas de base rectangular, sí.

3. 1 125 000 litros

   - Con la mitad de los litros que llenan la piscina, es decir, con 526 500 litros

4. La altura debe ser 6 m.

5. a) 450 litros
   b) 45 000 cm^3

Página 149

1. a) 432 cm^3
   b) 1600 cm^3
   c) 4590 cm^3
   d) 40 m^3

2. a) 1 500 000 cm^3
   b) No alcanza la altura.
   c) 5 m^2
   d) No con la altura mínima que pide la educadora.

Página 151

1. 576 m^3, 450 cm^3, 1250 mm^3

2. 1987,2 cm^3, 557,55 cm^3

3. 300 m^3

MI PROGRESO

1. 3,84 m^3
3. 38,88 m^3

Página 153

1. La del ítem a, ya que tiene 16,666… cm^3, en cambio, la del ítem b tiene 4 cm^3 y la del ítem c tiene 6,85 cm^3.
2. 100 000 litros.
3. 2 592 968,434 m^3
4. a) 100 cm^2
   b) 8 aristas.
   c) 5 vértices.
   d) Se reduce a la mitad.
   e) Aumenta al cuádruple.

Página 155

BUSCANDO ESTRATEGIAS

1. a) 69 120 cm^3
   b) 3491,712 cm^3

3. a) 1128 mm^3
   b) 482,8 cm^3

Página 158

¿QUÉ APRENDÍ?

1. C
2. B
3. C
4. A
5. B
6. A
7. D
8. B
9. C

Página 159

9. 57 600 cm^3
10. Tiene mayor volumen el envase de 425 cm^2 de área basal y 0,25 m de altura.
11. 1,575 m^3

Unidad 7

Página 162

¿CUÁNTO SABES?

1. a) $\frac{9}{10}$
   b) $\frac{1}{4}$
   c) $\frac{9}{17}$
   d) $\frac{9}{64}$
   e) $\frac{5}{6}$
   f) $\frac{1}{4}$
   g) $\frac{1}{3}$
   h) $\frac{10}{11}$

2. a) 25%
   b) 40%
   c) $33,\overline{3}$%
   d) $8,\overline{3}$%
   e) 60%
   f) 62,5%
   g) $66,\overline{6}$%
   h) 20%

3. a) $\frac{2}{5}$
   b) $\frac{7}{20}$
   c) $\frac{3}{4}$
   d) $\frac{21}{25}$
   e) $\frac{4}{25}$
   f) $\frac{1}{2}$
   g) $\frac{1}{50}$
   e) $\frac{9}{10}$

4. a) $\frac{5}{25}$
   b) $\frac{10}{100}$
   c) $\frac{16}{60}$
   d) $\frac{1}{100}$
   e) $\frac{5}{12}$
   f) $\frac{1}{10}$
   g) $\frac{82}{82}$
   h) $\frac{6}{18}$

Página 163

5. a) 50%
   b) 12,5%
   c) 12,5%
   d) 60%
   e) 20%
   f) 0%
   g) 100%

Página 165

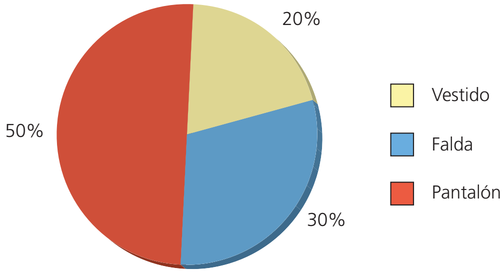
1. a) Gráfico circular.
   b) Pictograma.
   c) Histograma.
   d) Gráfico de barras.
   e) Gráfico circular.
   f) Histograma.

2. b) Para ilustrar y presentar un conjunto de datos relacionados entre sí, de manera que se facilite su comprensión, comparación y análisis.
   c) Se parecen en que se utilizan barras de dimensiones proporcionales a las magnitudes de los datos. Se diferencian en que en los gráficos de barras el ancho de la barra es igual para todas las barras, en cambio en el histograma es variable.
   d) Una ventaja es que ocupando una figura en el pictograma pueden presentarse mejor las características de los datos. Como desventaja, sucede que no es fácil de apreciar cuando las diferencias son menores.
   e) Cuando los datos se pueden expresar en porcentajes y las variables no tienen muchos valores posibles.

Página 166

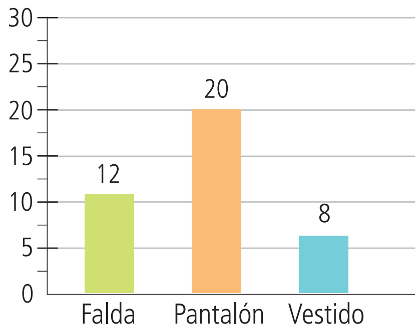
3. a) Histograma.
   b) 40 personas.
   c) El primero, porque sus porcentajes están calculados correctamente.

4. a) Un gráfico circular.

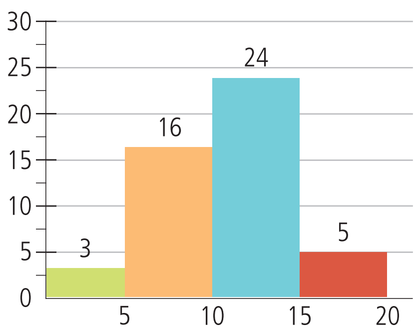


b) 12 niñas, 20 niñas.

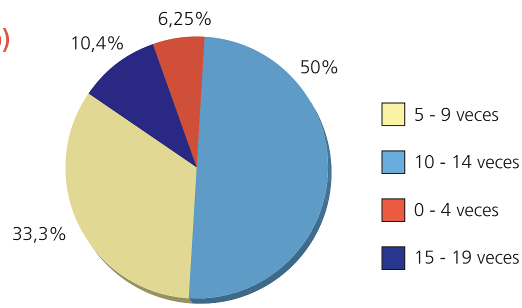
c)



5. a) Un histograma, porque los datos están agrupados en intervalos.



b)



Página 167

MI PROGRESO

1. 1500 personas.
2. 105 personas.
3.

¿Cuán de acuerdo está usted con la siguiente afirmación: "ambos, el hombre y la mujer, deben contribuir al ingreso familiar"?	Personas
Muy de acuerdo + de acuerdo	1260
Ni de acuerdo + ni en desacuerdo	105
Muy en desacuerdo + en desacuerdo	135

Página 169

1. a)

Color	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
Amarillo	12	0,29	29%
Verde	9	0,21	21%
Rojo	15	0,36	36%
Azul	6	0,14	14%

b) 1

c) 100%

2. a)

Área	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
Matemática	8	$\frac{8}{40}$	20%
Biológica	15	$\frac{15}{40}$	37,5%
Artística	13	$\frac{13}{40}$	32,5%
Educativa	4	$\frac{4}{40}$	10%

b) De mayor a menor: Biológica, Artística, Matemática, Educativa.

c) Área más preferida: Biológica, área menos preferida: Educativa.

3. a)

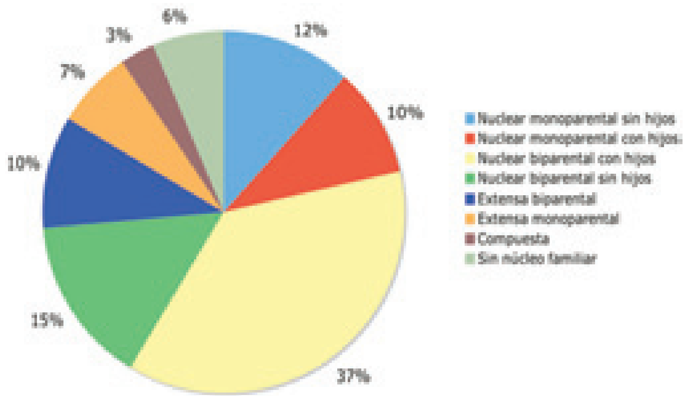
	Nº de familias	Frecuencia relativa	Frecuencia relativa porcentual
Nuclear monoparental sin hijos	480 647	0,116	11,6%
Nuclear monoparental con hijos	400 171	0,097	9,7%
Nuclear biparental con hijos	1 548 383	0,374	37,4%
Nuclear biparental sin hijos	617 757	0,149	14,9%
Extensa biparental	411 164	0,099	9,9%
Extensa monoparental	290 452	0,070	7%
Compuesta	132 057	0,032	3,2%
Sin núcleo familiar	260 769	0,063	6,3%
Total	4 141 427	1	100%

b) 3 046 958 familias son nucleares, 701 616 familias son extensas.

c) 47,1% (con hijos), 26,5% (sin hijos).

d)

Tipo de hogar que constituyen las familias chilenas



Página 172

1. a) Andrea.

b) En "Un elefante..." la frecuencia relativa de A es 0,23 y la de E es 0,12. En "Erre con erre..." la frecuencia relativa de A es 0,08 y la de E es 0,14.

c) En "Un elefante..." la frecuencia relativa de B es 0,04 y la de R es 0,06. En "Erre con erre..." la frecuencia relativa de B es 0 y la de R es 0,28.

d) Pregunta abierta.

e) Pregunta abierta.

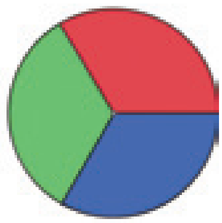
f) Pregunta abierta.

Página 173

2. a) En la primera, la probabilidad es de $\frac{1}{4}$. En la segunda, de $\frac{3}{8}$.

b) En la segunda ruleta.

c)



d)

MI PROGRESO

1.

Color	Frecuencias absolutas
Rojo	6
Azul	4

2.

Color	Frecuencias relativas
Rojo	0,6
Azul	0,4

3. La probabilidad de que caiga roja debiera ser $0,\overline{6}$, y de que caiga azul, $0,\overline{3}$.

4. La frecuencia absoluta del color rojo debiera ser 24 000 veces, y del color azul, 12 000 veces.

Página 176

1. A medida que aumenta la cantidad de valores que está promediando, su promedio se acerca al valor del promedio de todos sus compañeros y compañeras.

Página 177

2. a) Sí.
b) Las personas de 14 a 21 años.
c) Se habría concluido que la cantidad de personas que ven las teleseries que dan entre las 8 y 9 de la noche son muchas menos, aproximadamente 10% menos. Si se hubiesen considerado personas de 14 a 21 años, se habría concluido que la cantidad de personas son muchas más, aproximadamente 20% más. Al considerar los distintos grupos etarios que se consideraron en el estudio, se puede observar sus diferencias como televidentes respecto de las teleseries.

Página 179

BUCANDO ESTRATEGIAS

1. a) En el rango de 0 a 4 años.
b) En el rango 80 años y más.
c) No.
d) Disminuyó la población. Porque no han nacido tantos niños como antes.
e) Disminuyó la población. Porque la gente ahora prefiere vivir en la ciudad.

3. a) Las mujeres ganaron en promedio $ 160 000 en 1996 y $ 210 000 en 2000. Los hombres ganaron en promedio $ 265 000 en 1996 y $ 270 000 en 2000.
b) En 1997.
c) La diferencia entre los sueldos de hombres y mujeres disminuye.

Página 182

1. A	**3.** B	**5.** B	**7.** D
2. C	**4.** D	**6.** A	**8.** D

Página 183

9. a) El grupo de 35 a 54 años.
b) No. Porque estos porcentajes suman más que el 100% (no se refieren al mismo grupo de personas).
c) Histogramas.

Bibliografía

TEXTOS

- Mineduc. Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Básica. Ministerio de Educación de Chile, 2001.
- Mineduc. Propuesta Ajuste Curricular. Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios. Ministerio de Educación de Chile, septiembre 2007.

Material CRA

- Artigue, Michéle y otros. Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1995, 1ª ed.
  Profundiza uno de los aspectos característicos de la escuela francesa de didáctica de las matemáticas: la ingeniería didáctica, que desarrolla el área de la educación matemática con una doble función, la investigación que ha utilizado metodologías externas a la clase y la metodología de la investigación específica.
- Cedillo, Tenoch. Calculadoras: Introducción al Álgebra. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1997.1ª ed. [r. 1996]
  Las actividades propuestas están orientadas a la enseñanza del código algebraico como herramienta para expresar generalizaciones y resolver problemas, e introducir la noción de función a partir de la construcción e interpretación de gráficas.
- Guzmán, Miguel de. Para pensar mejor. Ediciones Pirámide, España, 1995, 2ª ed.
  El objetivo de la obra es mostrar cómo la exploración de los propios métodos de pensamiento es una tarea que puede mejorar la calidad del pensar y los aportes de la Matemática en este ámbito.
- Hitt, Fernando. Investigaciones en Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1996, 1ª ed.
  Reúne un conjunto de artículos sobre diversas investigaciones que tratan la problemática de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde el nivel básico hasta el universitario.
- Orobio, H. y Ortiz, M. Educación Matemática y desarrollo del sujeto. Magisterio, Colombia, 1997, 1ª ed.
  El autor propone una estrategia pedagógica que implica la comprensión del desarrollo de los sujetos, el proceso de construcción y estructuración lógica de los conceptos y de los saberes específicos abordados con los alumnos y alumnas.
- Rodríguez, José y otros. Razonamiento matemático. International Thompson Editores, México, 1997, 1ª ed.
  Organizado en cinco capítulos, el texto trata el modelo de Polya y presenta estrategias utilizadas para resolver problemas, conceptos de álgebra relacionados con ecuaciones de primer grado, interpretación gráfica y las matemáticas de finanzas.
- Steen, Lynn. La enseñanza agradable de las matemáticas. Editorial Limusa, México, 1998, 1ª ed.
  Pretende mostrar que es posible desarrollar el pensamiento matemático mediante experiencias informales a muy temprana edad, mucho antes de que los niños lleguen al punto de poder comprender fórmulas algebraicas.
- Varios autores. Enseñanza efectiva de las Matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1995, 1ª ed.
  Guía básica que sugiere técnicas y habilidades para la enseñanza de las matemáticas; incluye aspectos que abarcan desde la preparación y desarrollo de una clase hasta la elaboración y aplicación de pruebas y exámenes.

Libros

- Artigue, M. "Una introducción a la didáctica de la matemática", en Enseñanza de la Matemática. Selección bibliográfica, traducción para el PTFD, MCyE, 1994.
- Arenas Fernando y equipo. Geometría Elemental. Ediciones Universidad Católica de Chile, Santiago,1993.
- Bermeosolo, J. Metacognición y estrategias de aprendizaje e instrucción. Documentos de apoyo a la docencia, proyecto FONDECYT 1940767, Santiago, 1994.
- Brousseau, Guy. Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática. Traducción realizada por Dilma Fregona (FaMAF), Universidad de Córdoba, y Facundo Ortega, Centro de Estudios Avanzados, UNC, Argentina, 1993.

- Corbalán, Fernando. La matemática aplicada a la vida cotidiana. Graó, Barcelona, 1995.
- Coxeter, H.S.M.; Greitzer, S.L. Geometry Revisited. The Mathematical Association of America, EE.UU., 1967.
- Chevallard Y. La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Aique, Buenos Aires, 1991.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Horsori, Barcelona, 1997.
- Díaz, J. y otros. Azar y probabilidad. Ed. Síntesis, Madrid, 1987.
- Dickson, L. Brown, M. y Gibson, O. El aprendizaje de las Matemáticas. Ed. Labor, Barcelona, 1991.
- Enzensberger, Hans Magnus. El diablo de los números. Ediciones Siruela, España, 1998.
- E.T. Bell. Los grandes matemáticos. Editorial Losada S.A., Buenos Aires, 1948.
- Eves, H. Estudio de las Geometrías. Vol I, II. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana, México, 1969.
- Figueroa, Lourdes. "Para qué sirve medir". Cuadernos de Pedagogía, Nº 302, España, 2001.
- Flavell, John. El desarrollo cognitivo y el aprendizaje. Visor, Madrid, 1985.
- Gardner, Martin. Carnaval matemático. Alianza Editorial, Madrid, 1980.
- Gardner, Martin. ¡Ajá! Paradojas. Paradojas que hacen pensar. Labor S.A., Barcelona, 1989.
- Guedj, Denis. El imperio de las cifras y los números. Ediciones B S.A., Barcelona, 1998.
- Guzmán R., Ismenia. Didáctica de la matemática como disciplina experimental. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile, 2002.
- Jouette André. El secreto de los números. Ediciones Robinbook, Barcelona, 2000.
- Julius, Edgard. Matemáticas rápidas. Norma, Bogotá, 2002.
- Linares, Salvador. Fracciones, la relación parte-todo. Síntesis, Madrid, 1988.
- Mateos, Mar. Metacognición y educación. Aique, Buenos Aires, 2001.
- Miguel de Guzmán y otros. Matemáticas Bachillerato 3. Editorial Anaya, Madrid, 1991.
- Moise, E.; Downs, F. Geometría Moderna. Addison Wesley, EE.UU., 1966.
- Moise, E. Geometría Elemental desde un punto de vista Avanzado. Compañía Editorial Continental, S.A., México, 1980.
- Murray R. Spiegel. Álgebra Superior. Mc Graw Hill, Colombia, 1978.
- National Council of Teachers of Mathematics. Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sociedad Andaluza, Sevilla, 2003.
- Novak, J. Aprendiendo a aprender. Ediciones Martínez Roca S.A., Barcelona, 1988.
- Ontoria A. Mapas conceptuales. Editorial Nancea, 2ª edición, España, 1993.
- Perelman, Yakov. Matemáticas recreativas. Ediciones Martínez Roca S.A., Barcelona, 1987.
- Perero, Mariano. Historia e historias de matemáticas. Grupo Editorial Iberoamericano, México, 1994.
- Pozo, J. L. Teorías cognitivas del aprendizaje. Morata, Madrid, 1990.
- R. David Gustafson . Álgebra Intermedia. International Thomson Editores, México, 1997.
- Rencoret, María del Carmen. Iniciación matemática - Un modelo de jerarquía de enseñanza. Editorial Andrés Bello, Santiago, 2002.
- Sternberg, R., Apear-Swerling L. Enseñar a pensar. Aula XXI, Santillana, España, 1996.
- Stewart, Ian. Ingeniosos encuentros entre juegos y matemáticas. Gedisa, Barcelona, 1990.
- Vygotski, L. El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Libergraf, S.A., Barcelona, 1995.
- Winston H. Elphick D. y Equipo. 101 Actividades para implementar los Objetivos Fundamentales Transversales. Lom Ediciones, 2001.

RECURSOS TECNOLÓGICOS

Software educativos

- SÚPER MIX MAT 3 - 4
  Es un programa para apoyar la enseñanza de la Matemática. La metodología que utiliza este software, se sustenta en principios didácticos basados en la actividad y la libre experimentación.
  http://www.enlaces.cl/doc/catalogo_sw/Web_97/Ficha28.html

- MATEMATIX
  Es una herramienta creada para el estudio y comprensión de la Matemática. Funciona como un laboratorio, lo que nos permite organizar, clasificar, cuantificar, analizar y asimilar la información dispersa. Pretende dotar y capacitar a los estudiantes de las herramientas que permiten que puedan desenvolverse satisfactoriamente en el mundo científico y tecnológico.
  http://www.enlaces.cl/doc/catalogo_sw/Web_97/Ficha30.html
- ¿CÓMO EVALUAR EL PENSAMIENTO?
  Niveles Educativos: NM1 -– NM2 - NM3 - NM4
  Desarrolla los OFT.
  http://www2.redenlaces.cl/webeducativos/pensamiento/menu.htm

Páginas webs

- Ministerio de Educación de Chile
  http://www.mineduc.cl
- La Red Maestros cuyo propósito es fortalecer la profesión docente, mediante el aprovechamiento de las capacidades de los profesionales previamente acreditados como docentes de excelencia, contribuyendo así al desarrollo profesional del conjunto de los docentes de aula.
  http://www.rmm.cl
- Portal de Centro de Perfeccionamiento Experimentación e Investigaciones Pedagógicas.
  http://www.cpeip.cl
- Centro Comenius. Software educativos, en especial de matemáticas, recursos y muchas cosas más. Patrocinado por la USACH.
  http://www.comenius.usach.cl
- El Paraíso de las Matemáticas
  http://www.matematicas.net
- Enlaces a matemáticas básicas para niños, publicaciones y programas educativos. Debate, entretenimiento (juegos matemáticos) y bibliografía.
  http://www.arrakis.es/~mcj
- Entretenimiento, recursos y enlaces. Software, libros, Escher, Fibonacci: el Número de Oro. Problemas: taller de matemáticas. IRC: canal sobre educación.
  http://platea.pntic.mec.es/~aperez4
- Recursos matemáticos Redemat
  http://www.recursosmatematicos.com/redemat.html
- Base de datos de documentos para Educación.
  http://www.cide.cl/campos/profes/setreduc.htm
- REDUC: Red Latinoamericana de información y documentación en educación. Contiene base de datos sobre investigaciones, textos completos, recortes de prensa.
  http://www.reduc.cl
- Sociedad de Matemática de Chile
  http://www.mat.puc.cl/~socmat
- Recursos matemáticos Redemat
  http://www.recursosmatematicos.com/redemat.html
- La Sociedad Europea de Matemáticas (EMS) ofrece en este web una gran cantidad de información sobre matemáticas, desde congresos a los que te puedes apuntar por correo electrónico hasta monográficos de autores famosos que tratan sobre la materia.
  http://www.emis.de
- Sitio que incluye unidades didácticas, aplicaciones y experiencias en Matemática respecto de los contenidos que se trabajan en Enseñanza Media.
  http://www.cnice.mecd.es/Descartes

Buscador recomendado

- Sitio educativo con diversos recursos, planificaciones e información de todas las áreas. Incluye buscador.
  http://www.educarchile.cl/home/escritorio_docente

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Santillana

9 789561 514867

EDICIÓN ESPECIAL PARA EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN
PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN

AÑO 2011